[2] I l ' i n R.N. „Atomic Physics 3", ed. by Smith S.J. and Walters G.K., N.-Y.: Plenum, 1973, p. 309-312.
[3] M a c A d a m K.B., R o l f e s R.G. - Rev. Sci. Instrum., 1982, v. 53, N 5, p. 592-595.
[4] S c h i a v o n e J.A., T a r r S.M., F r e u n d R.S. - Phys. Rev. A, 1979, v. 20, N 1, p. 71-76.
[5] P e r o v A.A. et al. - Proc. of the Third Intern. Conference of Infrared Phys., Zürich, Switserland, 1984, p. 541-542.
[6] M o r g a n T.J. et al. - Phys. Rev. A, 1979, v. 20, N 3, p. 1062-1071.

Научно-исследовательский физико-химический институт им. Л.Я. Карпова

Поступило в Редакцию 27 октября 1987 г.

Письма в ЖТФ, том 14, вып. 8 26 апреля 1988 г.

О НЕКОТОРЫХ ОСОБЕННОСТЯХ КОЛЕБАНИЯ ПОЛУОГРАНИЧЕННЫХ ТЕЛ

В.А. Б а б е ш к о

1. Известно, что в полуограниченных линейно упругих телах, таких как конечный пакет слоев, неограниченные цилиндры при гармоническим во времени возбуждении их поверхности, возникают бегущие волны, начиная с критической частоты $\omega^* \geqslant 0$, которые уносят энергию на бесконечность [1]. Для полуограниченных тел, у которых $\omega^* > 0$, установлено существование неограниченного резонанса массивных штампов в диапазоне частот $0 < \omega < \omega^*$ [2].

Считалось [2, 3], что для таких тел на частотах $\omega > \omega^*$, а также на любых частотах для тел, у которых $\omega^* = 0$, неограниченный резонанс массивных штампов невозможен. Ниже это положение корректируется. Установлено, что существует сложная, но доступная для аналитического описания связь между характеристиками областей контакта и способами воздействия на поверхность полуограниченного тела, свойствами среды и частотами колебаний, при наличии которой на данной частоте $\omega > \omega^*$ тело приобретает особый режим динамического поведения. Он характерен отсутствием излучения энергии на бесконечность. Находясь в этом режиме, при определенном соотношении параметров система обнаруживает поведение, которое ранее либо исключалось, либо не подозревалось для таких тел.

Так, в случае конечного пакета слоев при вибрации на нем штампов, для некоторых значений масс штампов может иметь место их неограниченный резонанс; может случиться резонанс системы (колебание слоя при неподвижных штампах) невесомых конечных штампов; возможен при некоторых размерах трещины-полости ее неограниченный резонанс, если берега параллельны границе области.

Получены необходимые и достаточные условия перевода системы полуограниченное тело – штампы – полости в особый режим; эти условия сформулированы в виде аналитических формул, названных соотношениями статичности.

2. Дадим формулировку соотношений статичности в обозначениях решений интегральных уравнений динамических контактных задач о действии без трения штампов на упругий слой, пакет слоев. Если область контакта $\mathcal{D}$ допускает разбиение на выпуклые области $\mathcal{D}_m$, то интегральное уравнение динамической контактной задачи имеет вид [1]:

$$\mathcal{K}q = \iint_{\mathcal{D}} k(x-\xi, y-\eta) q(\xi,\eta) d\xi d\eta = f(x,y), \quad x, y \in \mathcal{D}; \tag{1}$$

$$k(x,y) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{\sigma_1 \sigma_2} K(u) e^{-i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta, \quad u = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}, \quad \mathcal{D} = \bigcup_{m=1}^{N} \mathcal{D}_m. \tag{2}$$

Описание свойств ядра и интегральных уравнений детально изложено в [1] и здесь не приводится.

Обозначив через z_n, ρ_n все положительные нули и полюсы (их число $p < \infty$) четной функции $K(u)$, которые считаем однократными, введем функцию

$$K_0(u) = K(u) \prod_{n=1}^{p} (u^2 - \rho_n^2)(u^2 - z_n^2)^{-1} > 0. \tag{3}$$

Наряду с уравнением (1) будем рассматривать интегральное уравнение

$$\mathcal{K}_0 q_0 = f(x,y), \quad x, y \in \mathcal{D}, \tag{4}$$

в представлении ядра (2) которого вместо $K(u)$ внесено $K_0(u)$. По своим свойствам интегральное уравнение (4) в силу (3) полностью подобно аналогичному уравнению статической контактной задачи [4].

Пусть $P_{[\mathcal{D}_m]}$ – проектор на область $\mathcal{D}_m$. Одним из методов [4] построим систему решений интегральных уравнений

$$\mathcal{K}_0 q_{mn} = P_{[\mathcal{D}_m]} \exp i z_n (x\cos\gamma + y\sin\gamma), \quad x, y \in \mathcal{D}, \tag{5}$$
$$n = 1, 2, \ldots, p; \quad m = 1, 2, \ldots, N, \quad 0 \le \gamma < 2\pi.$$

Если $\operatorname{Re} f(x,y) e^{-i\omega t}$ – амплитуда колебаний подошв штампов в области $\mathcal{D}$, то особый режим колебания слоя будет иметь место при выполнении соотношений

$$\iint\limits_D f(x,y)q_{mn}(x,y)\,dx\,dy=0, \tag{6}$$
$$m=1,2,\ldots,N;\ n=1,2,\ldots,p;\ 0\leqslant\gamma<2\pi.$$

Находясь в этом режиме, упругая система „полуограниченное тело–штампы" не излучает энергию на бесконечность, т.е. при отсутствии внутреннего поглощения ведет себя как ограниченное тело. Это означает, что система может обладать дискретными резонансными частотами. Путем изменения параметров системы, не выводя ее из этого режима, можно добиться, как это сделано в [2] за счет изменения массы m штампа при $\omega<\omega^*$, чтобы данная частота $\omega>\omega^*$ была бы резонансной. Характерно, что при выполнении соотношений (6) обнаруживается явление локализации вибрационного процесса в зоне расположения штампов.

З а м е ч а н и е. В протекающих в полуограниченных областях электродинамических, диффузионных, теплопроводности и других процессах также может обнаруживаться отмеченное явление.

3. П р и м е р. Пусть на упругом слое с защемленной нижней гранью совершает антиплоское колебание штамп массы m. Вырождающееся в одномерное, интегральное уравнение (1) принимает вид (2.1) работы [5], в котором для частот $\Omega>\Omega^*$ применяется описанное в [1] правило расположения контуров в представлении ядра $k(x)$. Полагая, что $\Omega^2=\rho\omega^2h^2\mu^{-1}$ и $\pi<\Omega<1.5\pi$, т.е. $\Omega>\Omega^*=\pi/2$, находим значения размеров ширины A штампа, при которых имеют место соотношения (6). Эти значения даются в обозначениях работы [5] соотношениями

$$A_n=\lambda_n^{-1}=(n\pi+c)\varkappa^{-1}[1+O(n^{-1})],\ n\gg1,\ c=const.$$

Резонансные массы m_n имеют представление

$$m_n=\frac{Q_n\varkappa^2}{(\Omega^2-0.25\pi^2)\Omega^2},\quad Q_n=\int\limits_{-1}^{1}\tau_n(x)\,dx,\quad \varkappa=\sqrt{\Omega^2-\pi^2},$$

где $\tau_n(x)$ – решения интегрального уравнения (2.1) работы [5], $w\equiv1$, $\lambda=\lambda_n$ с ядром, в котором принято

$$L(\alpha)=\frac{(\alpha^2-\Omega^2+0.25\pi^2)\,th\sqrt{\alpha^2-\Omega^2}}{(\alpha^2-\Omega^2+\pi^2)\sqrt{\alpha^2-\Omega^2}}.$$

Л и т е р а т у р а

[1] В о р о в и ч И.И., Б а б е ш к о В.А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 320 с.

[2] Ворович Е.М., Пряхина О.Д., Тукодова О.М. – ПММ, 1987, т. 51, в. 1, с. 109–116.
[3] Бабешко В.А. – ДАН СССР, 1987, т. 295, № 2, с. 312–316.
[4] Бабешко В.А. Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. М.: Наука, 1984. 256 с.
[5] Ворович Е.И., Пряхина О.Д. – МТТ, 1987, № 3, с. 101–106.

Кубанский государственный
университет

Поступило в Редакцию
24 августа 1987 г.

Письма в ЖТФ, том 14, вып. 8 26 апреля 1988 г.

СКОРОСТЬ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ В КВАДРАТИЧНО-НЕЛИНЕЙНОЙ СРЕДЕ

Ю.Н. Зайко

Вопрос, которому посвящена статься, представляет интерес как с теоретической, так и с практической точки зрения, определяя, например, время прохождения сигнала в нелинейной среде. Для линейных сред он достаточно полно рассмотрен в обзоре [1], где отмечалось, что в непоглощающей среде скорость переноса энергии в волне $v_e = \frac{S}{W}$ (S – поток энергии, W – плотность энергии) совпадает с групповой скоростью на несущей частоте. Для нелинейных сред вопрос усложняется. Наиболее последовательным является, по-видимому, метод усреднения Уизема [2], который уже в простейшем случае уравнения $\varphi_{tt} - \varphi_{xx} + V(\varphi) = 0$ ($V(\varphi)$ – нелинейная функция) приводит к двум характеристическим скоростям, кроме скорости распространения энергии, определяемой так же, как и для линейной среды, и непонятно заранее, какую из них следует отождествить с групповой скоростью. Кроме того, понятие несущей частоты в нелинейной среде является недостаточно определенным, поскольку возможны процессы распада и слияния волн. В простейшем приближении трехволнового взаимодействия уравнения для комплексных амплитуд u_k имеют вид [3]:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} = i\varepsilon u_2 u_3; \quad \frac{\partial u_2}{\partial t} + v_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} = i\varepsilon u_1 u_3^*; \tag{1}$$
$$\frac{\partial u_3}{\partial t} + v_3 \frac{\partial u_3}{\partial x} = i\varepsilon u_1 u_2^*.$$

Волной накачки является волна $u_1 : \omega_1 = \omega_2 + \omega_3$, v_k – групповые скорости волн, ε – характеризует интенсивность взаимодействия.