[2] Ворович Е.М., Пряхина О.Д., Тукодова О.М. – ПММ, 1987, т. 51, в. 1, с. 109–116.
[3] Бабешко В.А. – ДАН СССР, 1987, т. 295, № 2, с. 312–316.
[4] Бабешко В.А. Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. М.: Наука, 1984. 256 с.
[5] Ворович Е.И., Пряхина О.Д. – МТТ, 1987, № 3, с. 101–106.

Кубанский государственный
университет

Поступило в Редакцию
24 августа 1987 г.

Письма в ЖТФ, том 14, вып. 8 26 апреля 1988 г.

СКОРОСТЬ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ В КВАДРАТИЧНО-НЕЛИНЕЙНОЙ СРЕДЕ

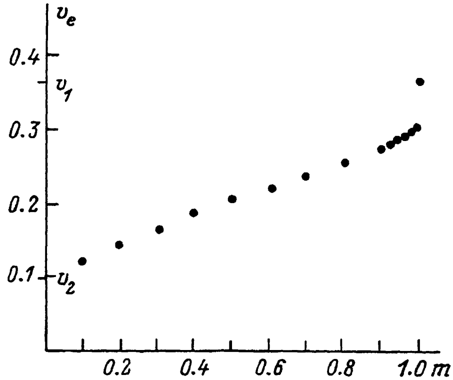
Ю.Н. Зайко

Вопрос, которому посвящена статься, представляет интерес как с теоретической, так и с практической точки зрения, определяя, например, время прохождения сигнала в нелинейной среде. Для линейных сред он достаточно полно рассмотрен в обзоре [1], где отмечалось, что в непоглощающей среде скорость переноса энергии в волне $v_e = \frac{S}{W}$ (S – поток энергии, W – плотность энергии) совпадает с групповой скоростью на несущей частоте. Для нелинейных сред вопрос усложняется. Наиболее последовательным является, по-видимому, метод усреднения Уизема [2], который уже в простейшем случае уравнения $\varphi_{tt} - \varphi_{xx} + V(\varphi) = 0$ $(V(\varphi)$ – нелинейная функция$)$ приводит к двум характеристическим скоростям, кроме скорости распространения энергии, определяемой так же, как и для линейной среды, и непонятно заренее, какую из них следует отождествить с групповой скоростью. Кроме того, понятие несущей частоты в нелинейной среде является недостаточно определенным, поскольку возможны процессы распада и слияния волн. В простейшем приближении трехволнового взаимодействия уравнения для комплексных амплитуд u_K имеют вид [3]:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} = i\varepsilon u_2 u_3; \quad \frac{\partial u_2}{\partial t} + v_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} = i\varepsilon u_1 u_3^*; \qquad (1)$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial t} + v_3 \frac{\partial u_3}{\partial x} = i\varepsilon u_1 u_2^*.$$

Волной накачки является волна $u_1: \omega_1 = \omega_2 + \omega_3$, v_K – групповые скорости волн, ε – характеризует интенсивность взаимодействия.



В системе отсчета, где волна накачки покоится, волны $u_{2,3}$ движутся в одном направлении. Рассмотрим стационарный случай: $\partial u_k/\partial t = 0$. Представляя амплитуды волн в виде $u_k = \omega_k e^{i\varphi_k}$, получим систему уравнений для ω_k и фазы $\Phi = \varphi_2 + \varphi_3 - \varphi_1$ [4], обладающие следующими независимыми интегралами:

$$v_1\omega_1^2 + v_2\omega_2^2 = C, \quad v_1\omega_1^2 + v_3\omega_3^2 = B, \quad \omega_1\omega_2\omega_3\cos\Phi = G. \qquad (2)$$

Кроме того, интегралом является также поток энергии $S = v_1\omega_1\omega_1^2 + v_2\omega_2\omega_2^2 + v_3\omega_3\omega_3^2 = \omega_2 C + \omega_3 B$. Решение (1) выражается через эллиптические функции Якоби. Приведем явное выражением для

$$N_1 = v_1\omega_1^2 = N_a + (N_b - N_a)\,sn^2\left[\frac{\mathcal{E}(N_c - N_a)^{1/2}}{(v_1 v_2 v_3)^{1/2}}(x - x_0); m\right] \quad m = \frac{N_b - N_a}{N_c - N_a};$$

x_0 определяется граничными условиями: $N_{a,b,c}$ – корни многочлена $N(B-N)(C-N) - G^2 v_1 v_2 v_3$, $N_c \geq N_b \geq N_a$ [4]. $N_2 = v_2\omega_2^2$ и $N_3 = v_3\omega_3^2$ выражаются через N_1 с помощью (2). Вычислим скорость переноса энергии:

$$v_e = \frac{\omega_2 C + \omega_3 B}{\left\langle \frac{\omega_1}{v_1}N_1 + \frac{\omega_2}{v_2}N_2 + \frac{\omega_3}{v_3}N_3 \right\rangle} = \frac{\omega_2 C + \omega_3 B}{\frac{\omega_2}{v_2}C + \frac{\omega_3}{v_3}B + \langle N_1\rangle\left[\frac{\omega_1}{v_1} - \frac{\omega_2}{v_2} - \frac{\omega_3}{v_3}\right]}. \qquad (3)$$

Усреднение в (3) происходит по периоду решения $\frac{4K(m)}{\mathcal{E}}\sqrt{\frac{v_1 v_2 v_3}{N_c - N_a}}$. Вычислим $\langle N_1\rangle = N_a + (N_c - N_a)\left[1 - \frac{E(m)}{K(m)}\right]$; $K(m)$, $E(m)$ – полные эллиптические интегралы 1-го и 2-го рода [5].

Рассмотрим конкретный случай гравитационно-капиллярных волн на поверхности воды $\omega = (gk + \sigma k^3/\rho)^{1/2}$, σ – поверхностное натяжение, ρ – плотность, k – волновой вектор. Задавая частоты ω_1 = 200 Рад/с, ω_2 = 50 Рад/с, ω_3 = 150 Рад/с (λ_1 = 7.7 мм, λ_2 = 1.9 см, λ_3 = 9.3 мм), получаем v_1 = 0.367 м/с, v_2 = 0.098 м/с, v_3 = 0.333 м/с. На рисунке приведена зависимость скорости переноса энергии в волновом пакете от параметра m, определяемого граничными условиями для случая точного резонанса $\varphi_K = \frac{\pi}{2}$, $\Phi = \frac{\pi}{2}$, $m = \frac{B}{C} \leq 1$. Для $m > 1$ волны 2 и 3 меняются местами. Участок на кривой $v_e(m)$, где $\frac{dv_e}{dm}$ неограниченно возрастает, исчезает при $\frac{\omega_1}{v_1} = \frac{\omega_2}{v_2} + \frac{\omega_3}{v_3}$. Таким образом, скорость распространения энергии в квадратично-нелинейной среде изменяется в интервале, определяемом минимальной и максимальной групповыми скоростями волн, присутствующих в пакете, в зависимости от начального распределения энергии между ними.

Литература

[1] Вайнштейн Л.А. – УФН, 1976, т. 118, № 2, с. 339-367.

[2] Бхатнагар П. Нелинейные волны в одномерных диспергных системах. Пер. с англ. М.: Мир, 1983. 136 с.

[3] Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. Теория солитонов: метод обратной задачи. М.: Наука, 1980. 320 с.

[4] Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984. 432 с.

[5] Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. 832 с.

Поступило в Редакцию
22 сентября 1987 г.

Письма в ЖТФ, том 14, вып. 8 26 апреля 1988 г.

ПРОХОЖДЕНИЕ БЫСТРЫХ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ ЧЕРЕЗ УПРУГО-ДЕФОРМИРОВАННЫЕ МОНОКРИСТАЛЛЫ

В.В. Белошицкий, В.А. Старостин

При высоких энергиях пробеги частиц в веществе возрастают до макроскопических размеров. Одновременно растут затраты на управление траекторией частиц с помощью магнитных полей. Поэтому представляет интерес использование кристаллов для поворота пучков частиц [1]. Первые эксперименты показали практическую осуществимость этого метода, однако теоретически было рассмотрено лишь действие центробежного потенциала, связанного с искривлением траектории частицы [2]. Такое рассмотрение справедливо лишь для тонкого кристалла. Практически же важно прохождение через толстый кристалл для увеличения угла поворота. В настоящей работе развита теория, позволяющая расчитывать интенсивность пучка, про-