

- [5] Ильин В.А., Шурминова Т.М., Эткин В.С. — Радиотехника и электроника, 1981, т. 26, № 8, с. 1760–1764.
- [6] Есепкина Н.А., Корольков Д.В., Парийский Ю.М. Радиотелескопы и радиометры, М.: Наука, 1973. 416 с.

Московский государственный
педагогический институт
им. В.И. Ленина

Поступило в Редакцию
5 февраля 1988 г.

Письма в ЖТФ, том 14, вып. 9

12 мая 1988 г.

СИНХРОНИЗАЦИЯ И УДВОЕНИЕ КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ В МНОГОМОДОВЫХ СИСТЕМАХ

И.С. Арансон, Н.Ф. Рульков

К настоящему времени достаточно хорошо изучена структура зон синхронизации, возникающей при взаимодействии двухчастотных колебаний в относительно простых системах. В этом случае могут быть использованы модели с малым числом параметров, например одномерные отображения окружности и двумерные отображения кольца в себя [1, 2]. Однако при исследовании более сложных многомодовых систем (например, автогенераторов СВЧ диапазона [3, 4]), проявление синхронизации может быть существенно более многообразным, и зоны синхронизации могут быть качественно иной структуры. Несмотря на обилие экспериментального материала, фактически отсутствуют работы, посвященные систематическому анализу явлений синхронизации в системах с многомерным фазовым пространством¹. Целью нашего сообщения является исследование зон синхронизации, типичных для многомодовых систем и имеющих принципиальные отличия от изученных ранее.

Экспериментально исследуется синхронизация в неавтономном СВЧ автогенераторе с ферритовым резонатором. Установлено, что переход к хаосу в таком генераторе связан с резонансным взаимодействием трех близких по частоте мод резонатора [4, 5, 7]. Поэтому динамика такой системы приближенно описывается шестью дифференциальными уравнениями, зависящими от трех параметров [4]. Это свидетельствует о возможности существования более сложной, чем в [2], бифуркационной структуры синхронизации.

В эксперименте параметры генератора выбирались так, чтобы в отсутствие внешней модуляции наблюдался переход к хаосу через

¹ Нам известна лишь одна работа, где на примере модельных систем обсуждаются подобные явления [6].

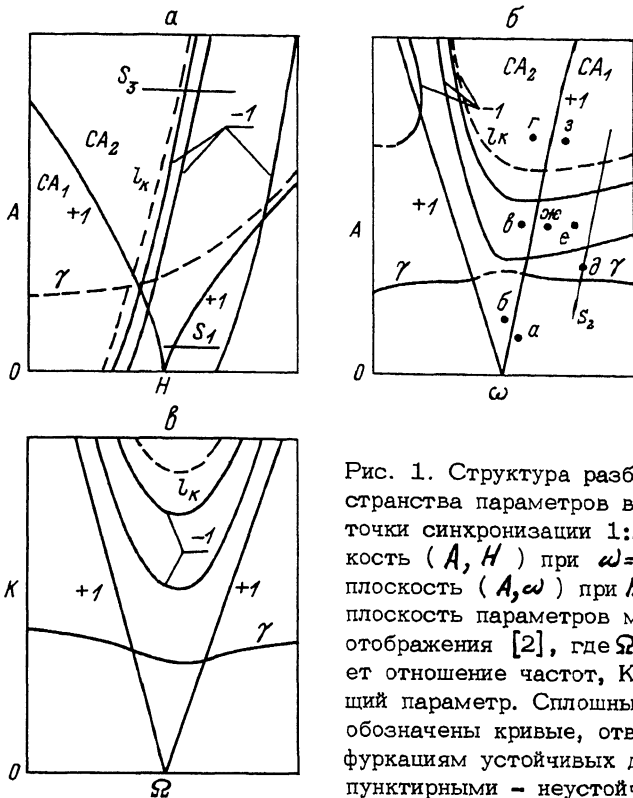


Рис. 1. Структура разбиения пространства параметров в окрестности точки синхронизации 1:2. а - плоскость (A, H) при $\omega = \text{const}$; б - плоскость (A, ω) при $H = \text{const}$; в - плоскость параметров модельного отображения [2], где Ω характеризует отношение частот, K - управляющий параметр. Сплошными линиями обозначены кривые, отвечающие бифуркациям устойчивых движений, пунктирными - неустойчивых.

удвоения периода.² Регулируемыми параметрами служили: величина магнитного поля H , определяющего частоту собственных колебаний резонатора, амплитуда A и частота ω внешней модуляции. В эксперименте регистрировались: проекции фазового пространства, отображения Пуанкаре через период внешнего сигнала и бифуркационные диаграммы по параметру H .³ На рис. 1 приведены разбиения пространства параметров на плоскостях (A, H) при $\omega = \text{const}$ и (A, ω) при $H = \text{const}$ в окрестности точки синхронизации 1:2 между частотами автомодуляции и внешнего сигнала.⁴ Индексом

² Имеется в виду период автомодуляции. Высокочастотное заполнение СВЧ сигнала может не приниматься во внимание, поскольку его период более чем в 1000 раз меньше характерного времени изменения автомодуляции и внешнего воздействия. С математической точки зрения это означает рассмотрение явлений, происходящих в усредненной по высокой частоте системе [4].

³ О построении бифуркационной диаграммы см. [4, 8].

⁴ Подобные структуры зон синхронизации наблюдались и в других резонансных точках.

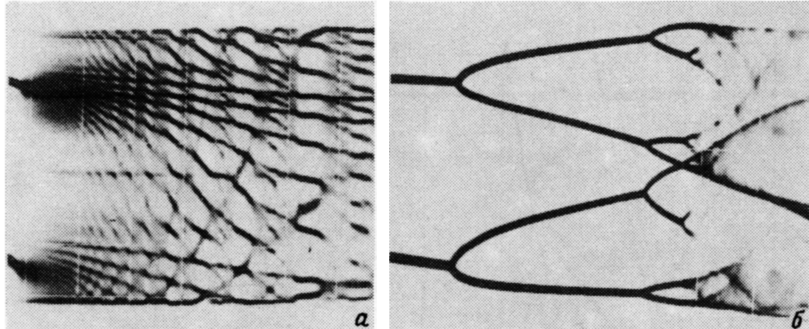


Рис. 2. Бифуркационные диаграммы: а - удвоенный периода (линия S_3), б - областей синхронизации высокого порядка (линия S_1).

„+1” отмечены бифуркационные кривые, ограничивающие „клюв” рассматриваемого резонанса. Индексом „-1” обозначены бифуркационные кривые удвоенный периода- периодических движений внутри „клюва” синхронизации и на оси $A = 0$, и двумерных эргодических торов вне областей резонансов. Граница области существования эргодических торов обозначена через „ \mathcal{J} ”. В области ниже кривой „ \mathcal{J} ” при переходе через бифуркационную линию „+1” в область резонанса происходит рождение устойчивого и седлового циклов на торе размерности два. В окрестности основного резонанса для малых A наблюдается тонкая структура резонансов более высокого порядка (для простоты на рис. 1 не отмечена), фрагмент бифуркационной диаграммы которой вдоль линии „ S_1 ” приведен на рис. 2, а. Пересечение кривой „ \mathcal{J} ” при увеличении параметра A вдоль линии „ S_2 ” приводит к возникновению складок на торе (гофрировке) (рис. 3, в), а затем к его разрушению с образованием странного аттрактора CA_1 (рис. 3, з).

Внутри „клюва” синхронизации регистрируется каскад бифуркаций удвоения периодического движения и рождение странного аттрактора CA_2 (рис. 3, б, в, г). Бифуркационная диаграмма вдоль линии „ S_3 ”, соответствующая этому случаю, приведена на рис. 2, б. Пересечение линии „-1” вне „клюва” синхронизации (рис. 1, а) соответствует удвоению двумерного эргодического тора. Внутри „клюва” происходят удвоения синхронизированных предельных циклов совместно с инвариантным тором, на котором они находятся.⁵ При этом, из-за сохранения инвариантного тора, наряду с устойчивым предельным циклом одновременно удваивается и седловой.

Существенно более сложная ситуация возникает при больших амплитудах внешнего воздействия A (т.е. выше линии „ \mathcal{J} ”). Теперь

⁵ Это не противоречит известным результатам [2, 9], т.к. рассматриваемая здесь система не сводится к двумерному отображению кольца в себя.

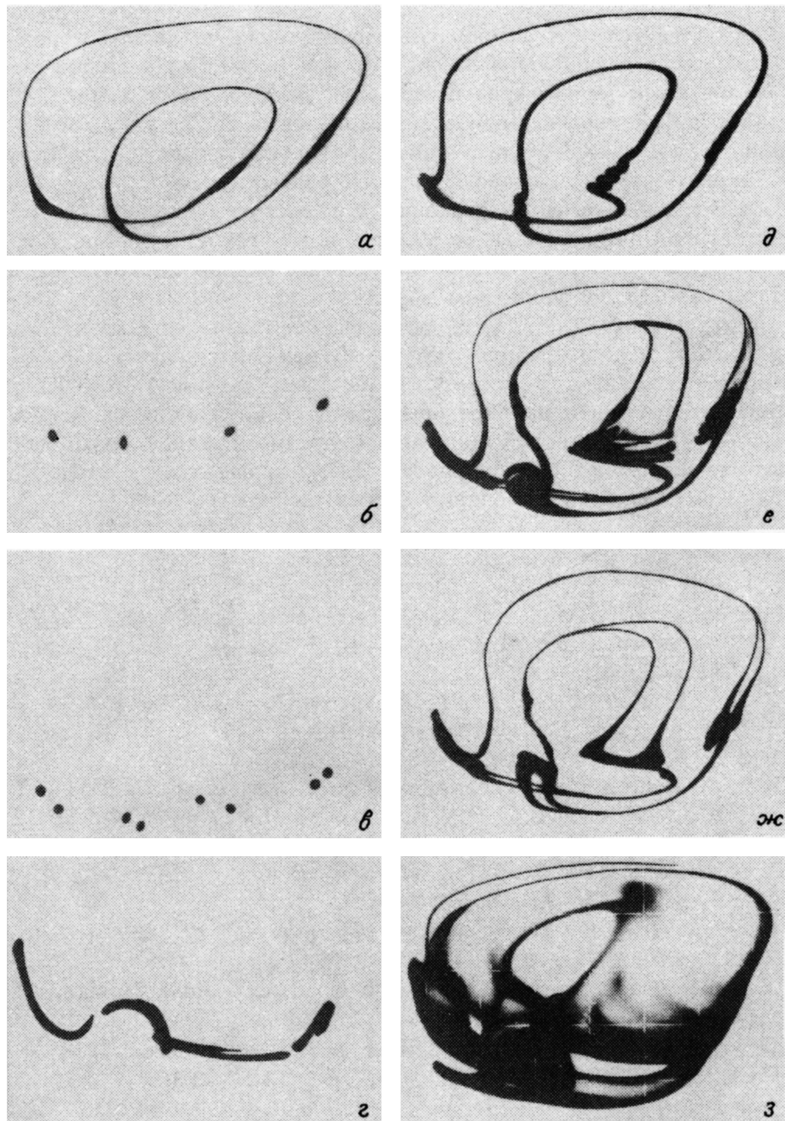


Рис. 3. Отображения через период внешнего воздействия для значений параметров, обозначенных соответствующими буквами на рис. 1,б.

удвоения происходят с негладкими (гофрированными) инвариантными торами. Пересечение линии „+1” при выходе из „клюва” выше кривой „↑” (см. рис. 1,б) соответствует слиянию устойчивого и седлового циклов с образованием устойчивого негладкого тора. При этом существует продолжение линий удвоения „-1” и вне „клюва”,

которые соответствуют теперь удвоениям таких негладких торов. Это следует из сопоставления рис. 3, д и 3, ж. Пересечение линии „+1” выше критической кривой удвоений „ $1/k$ ” вызывает кризис странного аттрактора Фейгенбаумовского типа CA_2 (рис. 3, г) и рождение нового — CA_1 (рис. 3, з), соответствующего более сложному хаотическому движению большей размерности.

Рассмотренные выше бифуркации не могут быть описаны в рамках модели [2] (сравни рис. 1, а, б и в), так как удвоения и слияния устойчивых и седловых предельных циклов на торах происходят по разным направлениям в фазовом пространстве (для отображения). Поэтому для их исследования необходимо пользоваться отображением с размерностью не ниже трех (или системой с непрерывным временем, размерностью не ниже четырех). Наблюдение подобной структуры в эксперименте свидетельствует о необходимости выбора математической модели достаточно высокой размерности.

Авторы выражают благодарность В.С. Афраймовичу и М.И. Рабиновичу за полезные замечания и обсуждения.

Л и т е р а т у р а

- [1] P r o c a s s i a I., T h o m a e S., T r e s s e r Ch. — Phys. Rev. A, v. 35, N 4, p. 1884–1899.
- [2] O s t l u n d S., R a n d D., S e t h n a J., S i g g i a E. — Physica 8D, 1983, p. 303–342.
- [3] К а ц В.А. — Радиофизика, 1985, т. 28, в. 2, с. 161–176.
- [4] А р а н с о н И.С., Р у л ь к о в Н.Ф. — ЖТФ, 1988, т. 58, № 4.
- [5] А р а н с о н И.С., П а в л о в Д.А. — Письма в ЖТФ, 1985, т. 11, в. 16, с. 993–996.
- [6] B r y a n t P., J e f f r i e s C. — Physica 25D, 1987, p. 196–232.
- [7] А р а н с о н И.С., П а в л о в Д.А. — Радиофизика, 1986, т. 29, в. 7, с. 781–787.
- [8] B u s k i r k R., J e f f r i e s C. — Phys. Rev. A, 1985, v. 31, N/5, p. 3332–3356.
- [9] А ф р а й м о в и ч В.С., Ш и л ь н и к о в Л.П. В кн.: Методы качественной теории дифференциальных уравнений. Горький, 1983, с. 3–26.

Институт прикладной физики
АН СССР, Горький

Поступило в Редакцию
3 декабря 1987 г.