Письма в ЖТФ, том 14, вып. 15		12 августа 1988 г.

РАЗЛОЖЕНИЕ ПО ТРАЕКТОРИЯМ И ИМПУЛЬСАМ В ТЕОРИИ ИЗЛУЧАТЕЛЬНЫХ НЕУСТОЙЧИВОСТЕЙ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭЛЕКТРОННЫХ ПУЧКОВ

А.Т. Богданов, М.В. Кузелев

В зависимости от условий распространения прямолинейного релятивистского пучка электронов возможны различные механизмы возбуждения в нем волн плотности заряда и различные механизмы возникающих при этом излучательных неустойчивостей. Многие из них поддаются единому описанию с помощью следующей системы интегродифференциальных уравнений [1–3]:

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\tau} = -\nu\hat{\rho}_\alpha e^{-i\tau}, \quad \hat{\rho}_\alpha = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e^{-iy}\frac{1}{P^\alpha}dy_0,$$
$$\frac{dy}{d\tau} = \frac{1}{\mu}\left(1-\frac{1}{P^2}\right), \quad \rho_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e^{-iny}dy_0, \tag{1}$$
$$\frac{dP}{d\tau} = -\frac{\mu}{4}\left[\left(i\sum_{n=1}^{2}\frac{1}{n}\rho_n e^{iny} - \nu\frac{1}{P^\alpha}\mathcal{E}e^{i\tau+iy}\right)+\text{к.с.}\right].$$

Здесь $\mathcal{E}$ – амплитуда излучаемой волны, ρ_n – гармоника волны плотности заряда (обезразмеренная на невозмущенную плотность), $y(y_0,\tau)$ – траектория электрона, исходящая из точки y_0, $P = \left(1-\mu\frac{dy}{d\tau}\right)^{-1/2}$ - импульс электрона, $\tau=\Omega_0 t$, $\mu=2\gamma^2\Omega_b/\omega$ – релятивистский параметр, Ω_b – частота плазменных колебаний пучка (в движущейся с пучком системе координат), $\nu\approx|\delta\omega|/\Omega_b$, а $\delta\omega$ – инкремент неустойчивости. Параметр α в (1) может принимать значения 0.1 и 3. При α = 0 система описывает излучение полностью замагниченным прямолинейным пучком замедленной квазипоперечной электромагнитной волны [3]. Случай α = 1 относится к излучению незамагниченным пучком чисто поперечной волны в поле поперечной волны накачки [4]. При α = 3 система описывает излучение полностью замагниченным пучком квазипоперечной волны в поле продольной волны накачки [2].

Нерелятивистский (μ = 0) вариант уравнений (1) был исследован для случая $\nu \ll 1$ в работе [1] аналитически. В этой работе был развит метод разложения трансцендентных нелинейностей уравнений (1) по степеням возмущений траекторий электронов. Ниже такое разложение дополняется разложением и алгебраических релятивистских нелинейностей по степеням возмущений импульсов электронов. Тем самым строится аналитическая теория излучения произвольнорелятивистских электронных пучков в условиях довольно общего вида. Единственным ограничением, как и в работе [1], является требование

$$\nu \ll 1. \tag{2}$$

Заметим, что при выполнении неравенства (2) инкремент неустойчивости дается формулой

$$\frac{|\delta\omega|}{\Omega_b} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\nu\,\sqrt{1+\frac{1}{2}\alpha\mu}\,. \tag{3}$$

Ищем решения системы (1) в виде

$$\begin{gathered} y = y_0 + L(\tau) + \tilde{y}(y_0,\tau), \qquad P = 1-\delta, \\ \tilde{y} = \left(Ae^{iy_0} + \text{к.с.}\right) + \left(Be^{2iy_0} + \text{к.с.}\right), \\ \delta = q(\tau) - \left[\left(ae^{iy_0} + \text{к.с.}\right) - \left(be^{2iy_0} + \text{к.с.}\right)\right], \end{gathered} \tag{4}$$

считая, что $|\tilde{y}|, \delta$ малы по сравнению с единицей. Последнее, как будет показано далее, эквивалентно (2). В разложениях (4) учтены гармоники возмущенных величин вплоть до второй. Это сделано потому, что ниже учитываются нелинейности не выше кубических. Подставляя (4) в (1) и проводя весьма громоздкие вычисления (подробнее см. [1]), придем к следующей системе для амплитуд волн:

$$\begin{gathered} \frac{d\mathcal{E}_0}{d\tau} + i\mathcal{E}_0|A_0|^2\left[2+\mu\left(\frac{3}{2}+\alpha\right)\right] = 2i\nu\left(1+\frac{1}{2}\alpha\mu\right)A_0 + O(\nu), \\ \frac{dA_0}{d\tau} - iA_0|A_0|^2\frac{3}{2}\mu\left[1+\frac{5}{8}\mu\left(1+\frac{4}{5}\alpha\right)\right] = -\frac{1}{4}i\nu\mathcal{E}_0 + O(\nu). \end{gathered} \tag{5}$$

Здесь $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}e^{iL}$, $A_0 = Ae^{-i\tau}$, а $O(\nu)$ – кубично-нелинейные члены порядка ν и более высокого. Они не выписаны из-за своей громоздкости и из-за того, что в силу неравенства (2) могут быть опущены.

Система (5) содержит нелинейные сдвиги частот, обусловленные торможением пучка (этот сдвиг есть и в нерелятивистской теории) и релятивистской зависимостью частоты плазменных колебаний пучка от их амплитуды.

С учетом первых интегралов система (5) сводится к одному уравнению для величины $\chi = |A|^2$:

$$\begin{gathered} \frac{d\chi}{d\tau} = \frac{1}{2}\nu\left\{\chi\left[|\mathcal{E}|^2_{\tau=0} + 4(2+\alpha\mu)\chi\right] - \left[\frac{2g(\mu,\alpha)}{\nu}\right]^2\chi^4\right\}^{1/2}, \\ g(\mu,\alpha) = 1 + \frac{3}{2}\mu\left(1+\frac{1}{3}\alpha\right) + \frac{15}{32}\mu^2\left(1+\frac{4}{5}\alpha\right). \end{gathered} \tag{6}$$

Отсюда, устремляя $|\mathcal{E}|_{\tau=0}$ к нулю, определяем максимальные амплитуды возмущенных величин

$$|\rho_1|^2_{max} = 4|A^2|_{max} = \frac{4\nu\sqrt{2+\alpha\mu}}{g(\mu,\alpha)}, \tag{7}$$

$$|\mathcal{E}|^2_{max} = (2+\alpha\mu)|\rho_1|^2_{max}, \quad |a^2|_{max} = \frac{\mu^2}{16}|\rho_1|^2_{max}.$$

Отсюда как раз и следует, что предположение о малости возмущений $\tilde{y}$ и δ сводится к неравенству (2). Точнее, это так только для системы с $\alpha = 0$. В других случаях, как это видно из (7), возмущения импульса малы, только если (при $\mu \gg 1$)

$$\nu\sqrt{\mu} \ll 1. \tag{8}$$

Последнее ограничение не очень и существенно, поскольку плотные пучки с очень большими μ в настоящее время вряд ли реализуемы [5]. Таким образом, сложная задача теории вынужденного излучения (1) допускает аналитическое решение в условиях весьма общего вида.

Приведем еще выражение для эффективности излучения

$$КПД = \frac{\mu\nu(2+\alpha\mu)^{3/2}}{2g(\mu,\alpha)} \tag{9}$$

и решение уравнения (6) для случая адиабатического включения поля ($\mathcal{E} \to 0$ при $\tau \to -\infty$):

$$x = \frac{\nu\sqrt{2+\alpha\mu}}{g(\mu,\alpha)}\, ch^{-1}\left(\nu\sqrt{2+\alpha\mu}\,\tau\right), \quad -\infty < \tau < \infty. \tag{10}$$

Л и т е р а т у р а

[1] К у з е л е в М.В., Р у х а д з е А.А., Б о б ы л е в Ю.В., П а н и н В.А. – ЖЭТФ, 1986, т. 91, № 5(11), с. 1620-1632.

[2] К у з е л е в М.В. – ЖТФ, 1983, т. 53, № 6, с. 1029.

[3] К у з е л е в М.В., Р у х а д з е А.А., С а н а д з е Г.В. – ЖЭТФ, 1985, т. 89, № 5(11), с. 1591.

[4] Б о г д а н о в А.Т., К у з е л е в М.В., Р у х а д з е А.А. – Физика плазмы, 1986, т. 12, № 1, с. 57.

[5] Р у х а д з е А.А. и др. Физика сильноточных релятивистских электронных пучков, М.: Атомиздат, 1980. 165 с.

Московский государственный университет им. В.М. Ломоносова

Поступило в Редакцию 17 февраля 1988 г.
В окончательной редакции 1 марта 1988 г.