Л и т е р а т у р а

[1] А х м а н о в С.А., Д ь к о в Ю.Е., Ч и р к и н А.С. Введение в статистическую радиофизику и оптику. М.: Наука, 1981. 640 с.

[2] С м и р н о в Д.Ф., Т р о ш и н А.С. – УФН, 1987, т. 153, в. 2, с. 233–271.

[3] М а р ч е н к о В.Ф., П е т р и н Ю.М., Т р о ф и м е н к о И.Т. Радиотехника и электроника, 1985, т. 30, № 8, с. 1653–1655.

[4] Р у д е н к о О.В., С о л у я н С.И. Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975, 287 с.

[5] Г о р ш к о в А.С., М а р ч е н к о В.Ф., С т р е л ь ц о в А.М. и др. – Изв. вузов, Радиофизика, 1978, т. 21, № 3, с. 450–452.

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Поступило в Редакцию 22 марта 1988 г.

Письма в ЖТФ, том 14, вып. 17 12 сентября 1988 г.

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ В ВИДЕ УЕДИНЕННОГО ТОРОИДАЛЬНОГО ВИХРЯ

А.Т. С к в о р ц о в

Проблема теоретического описания движения жидкости в форме уединенных вихрей характерна для самых различных научных направлений (гидродинамики, теории плазмы, сверхтекучести и т.д., см., например, [1–3]), поэтому представляет общефизический интерес. Ее общее решение сдерживается ввиду сложности уравнений, описывающих уединенные вихри. Известные частные решения этих уравнений, отвечающие вихрю Хилла [2], вихревому кольцу [2], равновесным плазменным конфигурациям [4] характеризуются достаточно слабым (степенным) спаданием скорости (магнитного поля) при удалении от вихря, поэтому такие вихри нельзя в полной мере считать уединенными [1]. В этой связи в работе [1] было указано на возможность существования так называемых вихрей с экранировкой, для которых возмущенная скорость (магнитное поле) убывает экспоненциально быстро при удалении от центра вихря; там же были численно исследованы примеры такого рода решений. В настоящей работе найдено точное решение уравнений магнитной гидродинамики, отвечающее локализованному вихрю с экранировкой.

Следуя [1], будем исходить из уравнения Грэда–Шафранова [4]:

$$\tilde{\Delta}\Psi = -ff' - r^2F', \quad \tilde{\Delta} = r\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{1}$$

Здесь r, z – оси цилиндрической системы координат; Ψ – функция тока (потенциал Стокса); f, F – произвольные функции Ψ. Для связи функции Ψ с полем скорости $\vec{v}$ (магнитным полем $\vec{B}$) имеются две возможности [1]. Первая из них (параллельный вихрь [1]) определяется формулами

$$rB_r = \partial\Psi/\partial r, \quad rB_z = -\partial\Psi/\partial z, \quad rB_\varphi = f(\Psi) \tag{2}$$

и $\vec{v} = \alpha\rho^{-1/2}\vec{B}$, где $\alpha = const$, ρ – плотность жидкости. Вторая возможность отвечает чисто гидродинамическому вихрю и описывается выражениями (2) с заменой $\vec{B} \to \vec{v}$ (динамический вихрь [1]).

Будем искать решение уравнения (1) в предположении, что его правая часть – линейная функция Ψ. Для этого полагаем, что $f = k\Psi$, $F = -m^2\Psi^2/2 + c$, где $k, m, c = const$ и подставляем это в (1) (случай $f \sim F \sim \Psi$, не приводящий к экранировке, рассмотрен в [2]). В результате получаем уравнение

$$\tilde{\Delta}\Psi = (m^2r^2 - k^2)\Psi \equiv \Omega r, \tag{3}$$

где функция Ω с точностью до постоянного множителя совпадает с распределением завихренности (тока) [1, 2, 4]. Видно, что при $r = |k/m|$ правая часть (3) меняет знак, т. е. распределение завихренности (тока) имеет двухслойную осесимметричную структуру (см. также (7)). Такое распределение приводит к взаимной компенсации (экранировке) влияния слоев с противоположным знаком завихренности (тока) на характер движения в „дальней зоне" и, как следствие, к экспоненциальному затуханию скорости (магнитного поля) при удалении от центра вихря.

Полагая $\Psi \sim \bar{r}^2 exp(-\bar{r}^2) Z(z)$, (4)

где $\bar{r} = r/r_0$, r_0 – характерный пространственный размер вихря, и подставляя это в (3), получаем, что $m = 4/r_0^2$, а функция $Z(z)$ удовлетворяет уравнению

$$Z'' - \varkappa^2 Z = 0, \quad \varkappa^2 = k^2 - 8/r_0^2. \tag{5}$$

Очевидное решение (5) запишется в виде $Z = C_1 e^{-\varkappa z} + C_2 e^{\varkappa z}$, где $C_1, C_2 = const$, откуда заключаем, что существует два типа решений уравнения (4), различающихся характером изменения параметров вихря вдоль оси z. Первый тип, возникающий при $k^2 \geqslant 8/r_0^2$, отвечает монотонным по z решениям. В противоположном случае ($k^2 < 8/r_0^2$) имеет место гармоническая зависимость $Z(z)$ в (4). Поскольку решения в виде уединенных вихрей относятся к первому типу, то мы здесь только его и рассмотрим.

С учетом граничных условий на плоскости $z=0$ (непрерывность давления, нормальных компонент скорости, магнитного поля и т. д.

[4]) решение (5), убывающее при $|z|\to\infty$, имеет вид $Z = C\exp\times$ $\times(-\varkappa|z|)$, где $C = const$. Подставляя его в (4), получаем окончательно

$$\Psi = C\bar{r}^2 \exp(-\bar{r}^2 - \varkappa|z|), \quad \varkappa > 0. \qquad (6)$$

Входящую в эту формулу постоянную C можно выразить через скорость (магнитное поле) в центре вихря (в точке $z = r = 0$), где жидкость движется только в осевом направлении. Обозначая величину этой скорости через U из (6), (2) находим, что $C = Ur_0^2/2$.

Решение (6) содержит три свободных параметра: r_0, U, k. Последний параметр имеет размерность обратной длины и характеризует интенсивность азимутального движения. Поэтому удобно связать его с угловой скоростью вращения вихревого „ядра" Ω_0 (т. е. с угловой скоростью вращения жидкости при $r \ll r_0$, $|z| \to 0$). Определяя Ω_0 при помощи (6), получаем, что $k = \Omega_0/U$. После этого движение в вихре будет полностью определяться всего одним безразмерным параметром $U/\Omega_0 r_0$, имеющим смысл числа Россби [2].

Распределение завихренности в вихре находится на основании (3) и (6):

$$\Omega = 4(\bar{r}^2 - 2)\bar{\Psi}/r + [(\varkappa r_0)^2 - 2\varkappa r_0^2 \delta(z)]\bar{\Psi}/r, \qquad (7)$$

где $\bar{\Psi} = \Psi/r_0^2$, а Ψ дается выражением (6). Видно, что наряду с „распределенной" компонентой завихренность имеет еще и „сосредоточенную" компоненту (слагаемое с δ – функцией). Последняя представляет собой неоднородный тангенциальный разрыв (вихревой слой), совпадающий с плоскостью $z = 0$ (для магнитогидродинамического вихря на этом разрыве будет сосредоточен еще и токовый слой). Отметим, что $\Omega \to 0$ при $r \to 0$ и $\sqrt{r^2 + z^2} \to \infty$, т. е. распределение завихренности имеет тороидальную структуру.

Можно ожидать, что описанные выше свойства вихрей, отвечающих решению (6) (общность исходных уравнений, отсутствие из-за экранировки проблемы „дальнодействия", относительная простота теоретического описания), позволяют их эффективно использовать в качестве структурных элементов в различных моделях гидродинамической и магнитогидродинамической турбулентности.

Автор благодарит Л.М. Лямшева за внимание к работе.

Литература

[1] Петвиашвили В.И., Похотелов О.А., Чудин Н.В. – ЖЭТФ, 1982, т. 82, в. 6, с. 1833–1840.
[2] Бэтчэлор Дж. Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973, 758 с.
[3] Петвиашвили В.И., Похотелов О.А. В кн.: Нелинейные волны. М.: Наука, 1983, с. 107–116.

[4] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982, 620 с.

Акустический институт
им. Н.Н. Андреева
АН СССР, Москва

Поступило в Редакцию
6 июня 1988 г.

Письма в ЖТФ, том 14, вып. 17 12 сентября 1988 г.

ОБРАТИМЫЕ И НЕОБРАТИМЫЕ ПРОЦЕССЫ НА ПОВЕРХНОСТИ МЕТАЛЛОВ ПРИ ИМПУЛЬСНОМ НАГРЕВЕ ИЗЛУЧЕНИЕМ

Р.А. Лиуконен, А.М. Трофименко

В сообщении приведены результаты экспериментального исследования интегральной (за импульс) поглощательной способности металлической поверхности в связи с упругопластической деформацией, возникающей в ходе поглощения импульсного излучения. Измерение поглощательной способности проводилось калориметрическим методом [1]. Состояние поверхности образца, как во время импульса, так и после него, контролировалось теневым методом (нож Фуко, экспозиция 1.5 мкс), а изменения в процессе деформирования – оптоакустическим. Учитывая, что величина акустического сигнала определяется интенсивностью воздействия (вводимой энергией) и упругими свойствами вещества, переход в область пластической деформации, где механические напряжения нелинейно связаны с деформацией, отражается на характере изменения акустического сигнала. Обычно отклонение от линейности при оптоакустических измерениях приписывается началу оплавления (например, в [2]), хотя контроль поверхности при этом, как правило, не проводился. Однако, как показали проведенные нами эксперименты, первое отклонение от линейности (при измерениях с относительной погрешностью 2%) начинается задолго до достижения температуры плавления (не выше 100 ^{0}C) и совпадает с появлением пластической деформации.

В качестве испытуемых образцов были использованы медные диски диаметром 20 мм и толщиной 10 мм, отполированные по оптическому классу. К тыльной стороне образца приклеивался либо датчик температуры для измерения поглощенной энергии за весь импульс (поглощательная способность равна отношению поглощенной энергии к падающей), либо на акустическом контакте пьезоэлектрический преобразователь на основе ЦТС-19. В экспериментах использовался ЭИ CO_2-лазер с длительностью импульса по полувысоте 17–20 мкс, по основанию до 24 мкс. Диаметр пятна фокусировки составлял 2.5 мм. Неравномерность плотности энергии в пятне была не более 15 %. Теневая съемка