Письма в ЖТФ, том 14, вып. 21 12 ноября 1988 г.

СВОЙСТВА ПОЛЕЙ ТОКОВ, РАСПРЕДЕЛЕННЫХ НА НЕЗАМКНУТЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ

Б.З. Каценеленбаум, М.Ю. Шалухин

1. Существуют такие незамкнутые поверхности, что полем любого электрического тока, распределенного на них, нельзя сколь угодно точно приблизить (аппроксимировать) поле, не удовлетворяющее некоторому условию. Именно незамкнутость поверхности, на которой расположен ток, ограничивает возможность не только точно реализовать полем этого тока некоторые поля, но даже и аппроксимировать их. Для замкнутых поверхностей такое ограничение возможно только для некоторых дискретных частот; в приведенных ниже примерах незамкнутых поверхностей этот запрет существует при всех частотах. Его надо учитывать при постановке задач антенного синтеза.

Мы ниже рассмотрим двумерную скалярную модель – плоская кривая или сечение цилиндра, на которой распределен электрический ток. Обобщения на магнитный ток и на трехмерные векторные задачи производятся очевидным образом. Результаты основываются лишь на взаимности решений уравнений Максвелла и могут быть перенесены на задачи акустики и т. д., если в них имеет смысл понятие поверхностного (линейного) источника.

2. Задан незамкнутый контур L и охватывающий его замкнутый достаточно гладкий контур C (рис. 1а, 2а). На L распределен ток j; этот ток создает электромагнитное поле u. Находится такая функция $\hat{j}$ на C, что для всех токов j созданное ими поле u удовлетворяет условию

$$\int_C u\hat{j}\,ds = 0. \qquad (1)$$

Мы примем далее, что $\hat{j}$ пронормировано условием $\int_C |\hat{j}|^2 ds = 1$.

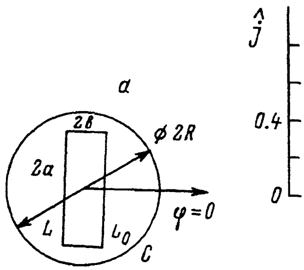
При этом для любой функции U, заданной на C, нижний предел значений, который для разных j может принимать интеграл $\int_C |U-u|^2 ds$, равен квадрату модуля интеграла того же типа, что и (1), но взятого от U

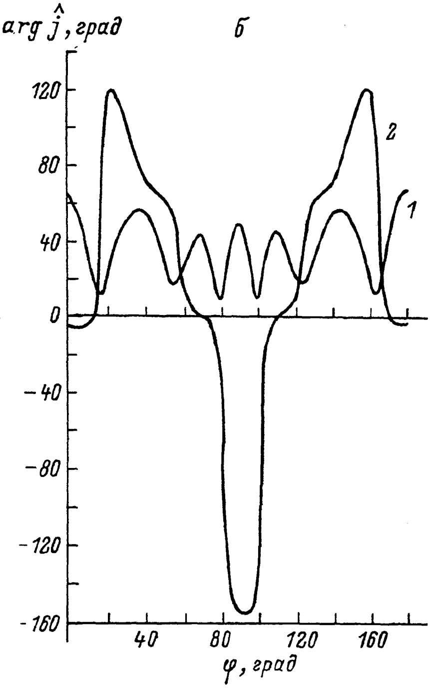
$$\int_C |U-u|^2 ds \geqslant \left|\int_C U\hat{j}\,ds\right|^2, \qquad (2)$$

если для U принята та же нормировка, что и для $\hat{j}$.

Если поле U не удовлетворяет тому же условию (1), что и все поля u, то оно не только не может быть реализовано полями токов j, но не может быть этими полями u приближено точнее, чем по (2). Аппроксимируемость будет иметь место только для таких U, для которых правая часть в (2) равна нулю. Если это не имеет место, то, в отличие от условий реа-

Рис. 1. а) Контуры L_0 и C.
б) $|\hat{j}|$ (кривая 1); $\arg\hat{j}$ (кривая 2); K=3.77, $2a$=1, $2b$=1.5, R=2.5.





лизуемости, аппроксимируемость не может быть достигнута малым возмущением функции u. Если u задано случайным образом на всей замкнутой кривой C, то вероятность того, что оно будет аппроксимируемо на всей замкнутой кривой, равно нулю.

На C могут существовать не одна, а несколько функций $\hat{j}$, для которых справедливо (1). Тогда в (2) справа будет стоять сумма квадратов модулей соответствующих интегралов, относящихся к ортогональной системе функций $\hat{j}$.

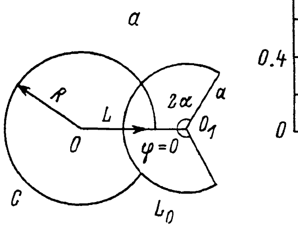
3. При доказательстве (1) будем функцию $\hat{j}$ рассматривать как ток, распределенный на C, и введем в рассмотрение созданное им поле $\hat{u}$. Между током j и полем u, с одной стороны, и между $\hat{j}$, $\hat{u}$ – с другой, согласно лемме Лоренца, существует связь

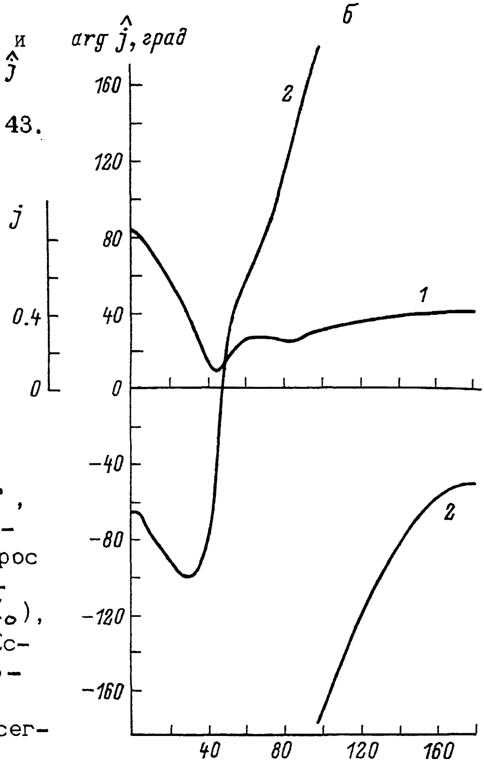
$$\int_C u\hat{j}\,ds = \int_L \hat{u} j\,ds. \qquad (3)$$

Если поле $\hat{u}$, создаваемое током $\hat{j}$, равно нулю на L, то (1) будет справедливо для любого j. Построим сначала поле $\hat{u}$ с этим свойством, а затем найдем создающий его ток $\hat{j}$.

Дополним L до замкнутого резонансного контура L_0, т.е. до такого контура, внутри которого при заданной частоте K существует собственная функция u_0 – ненулевое решение уравнения Гельмгольца, равное нулю на L_0. Продолжим u_0 во внешнюю относительно L_0 область до контура C с сохранением на L_0 непрерывности функции и ее нормальной производной. Контур C может охватывать весь контур L_0 (рис. 1, а) или только его часть, содержащую L (рис. 2, а). В п. 4 приведены два примера, когда такое продолжение возможно, т. е. когда в нем не возникает особых точек между L_0 и C. Во-

Рис. 2. а) Контуры L_0, L и C. б) $|\hat{j}|$ (кривая 1) и $\arg \hat{j}$ (кривая 2); K=3.49, a=1, $2\alpha=4\pi/3$, R=1.15, OO_1=1.43.





прос об условиях на L_0 и C, допускающих такое продолжение (т. е. по существу вопрос об особых точках аналитического продолжения u_0 вне L_0), нами не рассматривается. Если L_0 удовлетворяет некоторым простым условиям, то близкий к нему контур C всегда существует.

Решим внешнюю относительно C задачу Дирихле и тем самым найдем всюду решение уравнения Гельмгольца внутри C, равное u_0 и его аналитическому продолжению, непрерывное на C и удовлетворяющее условию излучения на бесконечности. Это поле и есть $\hat{u}$. Единственная его особенность – скачок нормальной производной на C есть искомый ток $\hat{j}$. Создаваемое им поле $\hat{u}$ равно нулю на L по построению.

Таким образом, (1) следует из (3), если существует стоящий справа в (3) интеграл. Достаточным условием этого является интегрируемость функции $|j|$ на L.

В терминах функционального анализа u на C получается применением некоторого оператора к j на L, а $\hat{u}$ на L получается применением сопряженного оператора к $\hat{j}$ на C. Существование такой функции $\hat{j}$ на C, для которой $\hat{u}$ на L равно нулю, означает, что ядро этого сопряженного оператора не пусто. Конструктивное доказательство этого утверждения и является центральным пунктом всего рассуждения. При этом существует ортогональное дополнение $\hat{j}$ к системе функций u на C [условие (1)], а из этого следует (если еще $\hat{j}$ принадлежит к L_2 на C) условие (2).

4. На рис. 1, а L_0 есть прямоугольник $2a \times 2b$, C – окружность; т. к. C охватывает L_0, то под L можно понимать любую часть L_0, например два или три отрезка прямых.

Модуль и фаза функции $\hat{j}$ представлены на рис. 1, б. В этом примере радиус R окружности C может быть как угодно велик. При $R \to \infty$ (1) переходит в условие на диаграммы, а $\hat{j}$ становится равным сумме четырех δ-функций. Для диаграмм ограничения (2) нет, т. к. $\hat{j}$ не принадлежит L_2. Во втором примере (рис. 2, а) L_0 есть сектор круга, C -окружность, содержашая часть дуги круга; под L можно понимать любую часть этой дуги, содержащуюся внутри C. Функция $\hat{j}$ представлена на рис. 2, б.

Выражаем благодарность Ю. А. Еремину за многочисленные плодотворные дискуссии.

Институт радиотехники
и электроники АН СССР,
Москва

Поступило в Редакцию
10 августа 1988 г.