[7] А с а и н о в О.Х., К р и в о б о к о в В.П., Л и г а ч е в А.Е., С а п у л ь с к а я Г.А. // Физика и химия обработки материалов. 1987. № 2. С. 53–59.
[8] Д и д е н к о А.Н., К р и в о б о к о в В.П. // ЖТФ. 1988. Т. 58. № 10. С. 2002–2009.

Поступило в Редакцию
12 января 1989 г.
В окончательной редакции
10 апреля 1989 г.

Письма в ЖТФ, том 15, вып. 12 26 июня 1989 г.
01

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ РАЗЛИЧНЫХ РАЗМЕРНОСТЕЙ ХАОТИЧЕСКОГО АТТРАКТОРА

В.С. А н и щ е н к о, М.А. С а ф о н о в а

Свойства хаотических аттракторов характеризуются различными размерностями, количественное взаимосоответствие которых пока дается оценками типа неравенств и в общем случае требует специальных теоретических исследований [1–3]. Представляется целесообразным проведение численных экспериментов по расчету различных закономерностей хаотического аттрактора и детальное их сопоставление. С этой целью рассмотрим режим развитой стохастичности в динамической системе [4]

$$\dot{x} = mx + y - xz, \quad \dot{y} = -x, \quad z = g\left[z - I(x)\,x^2\right]$$
$$I(x) = 1\ (x > 0), \quad 0\ (x \leq 0) \qquad (1)$$

при значениях параметров m =1.5 и g =0.2, которым отвечает аттрактор седло-фокусного типа, представленный на рис. 1, а. Вначале рассчитаем размерности двумерного хаотического множества, реализующегося в сечении Пуанкаре. Экспериментально было подтверждено, что величина размерностей не зависит от выбора секущей поверхности. Полная размерность D аттрактора в трехмерном фазовом пространстве системы (1) связана с размерностью хаотического множества в сечении Пуанкаре соотношением

$$D = d + 1. \qquad (2)$$

Численным интегрированием (1) с начальными данными на аттракторе формировался массив данных из $3.18 \cdot 10^4$ точек в секущей x =0, который рассматривался как двумерный хаотический аттрактор (см. рис. 1, б). Для вычисления размерностей этот аттрактор

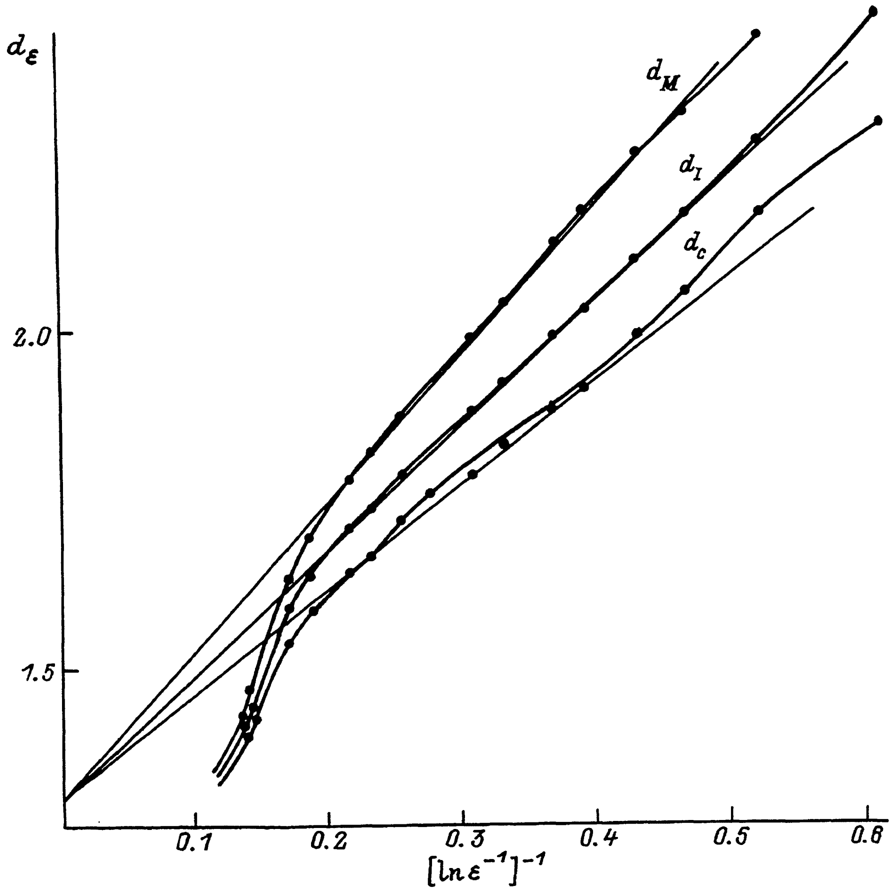

Рис. 1.

покрывался квадратами со стороной ε и рассчитывались следующие величины:

$$d_\mu = \lim_{\varepsilon \to 0} \ln N(\varepsilon)/\ln(1/\varepsilon),$$
$$d_I = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[-\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i \ln p_i\right]/\ln(1/\varepsilon), \qquad (3)$$
$$d_c = \lim_{\varepsilon \to 0} \ln\left[\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i^2\right]/\ln(1/\varepsilon),$$

где $N(\varepsilon)$ – количество ячеек, покрывающих аттрактор, p_i – вероятности того, что точка аттрактора принадлежит i-й ячейке покрытия, d_μ, d_I и d_c – метрическая, информационная и корреляционная размерности аттрактора соответственно [1-2].

Так как при $\varepsilon = 0$ расчеты проводить нельзя, то вычислялась оценка соответствующей размерности d_ε, зависящая от ε:

$$d_\varepsilon = H_\varepsilon [\ln(1/\varepsilon)]^{-1}, \tag{4}$$

где в соответствии с определениями (3)

$$H_\varepsilon = \ln N(\varepsilon), \quad H_\varepsilon = -\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i \ln p_i, \quad H_\varepsilon = \ln\left[\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i^2\right]. \tag{5}$$

При достаточно малых ε можно считать, что

$$\exp H_\varepsilon \simeq C \cdot \varepsilon^{-d}, \tag{6}$$

где C – некоторая постоянная, а d – значение соответствующей размерности. Тогда справедливо

$$H_\varepsilon = \ln C + d \ln(1/\varepsilon). \tag{7}$$

Таким образом, d линейно зависит от $[\ln(1/\varepsilon)]^{-1}$ и в пределе $\varepsilon \to 0$ стремится к точному значению размерности аттрактора. В эксперименте необходимо ограничиться интервалом малых значений ε, в котором приближенно справедлива линейная зависимость (7), и для нахождения размерности d экстраполировать эту зависимость в область $\varepsilon \to 0$ [5].

Результаты расчетов приведены на рис. 2. Из графиков видно, что экспериментальные зависимости близки к линейным в интервале $0.01 < \varepsilon < 0.30$. Количественная оценка коэффициентов линейной зависимости методом наименьших квадратов и аппроксимация соответствующих прямых до $\varepsilon = 0$ дали следующие результаты:

$$d_\mu = 1.306 \pm 0.015, \quad d_I = 1.300 \pm 0.013, \quad d_C = 1.277 \pm 0.017, \tag{8}$$

где погрешность характеризует среднеквадратичные отклонения теоретических аппроксимаций от расчетных данных. Полные размерности легко получить, приплюсовав к результатам (8) единичку (см.(2)). Полученные экспериментальные результаты удовлетворяют теоретическим неравенствам $D_\mu > D_I > D_C$, однако, учитывая ошибки расчетов, не исключается и полное равенство:

$$D_\mu = D_I = D_C = 2.29 \pm 0.013. \tag{9}$$

Проведем расчет корреляционной размерности, используя дискретную последовательность одной из координат двумерного аттрактора в отображении, методом Грассбергера–Takeнca [6–7]. С этой целью из набранного массива данных используем последовательность ко-

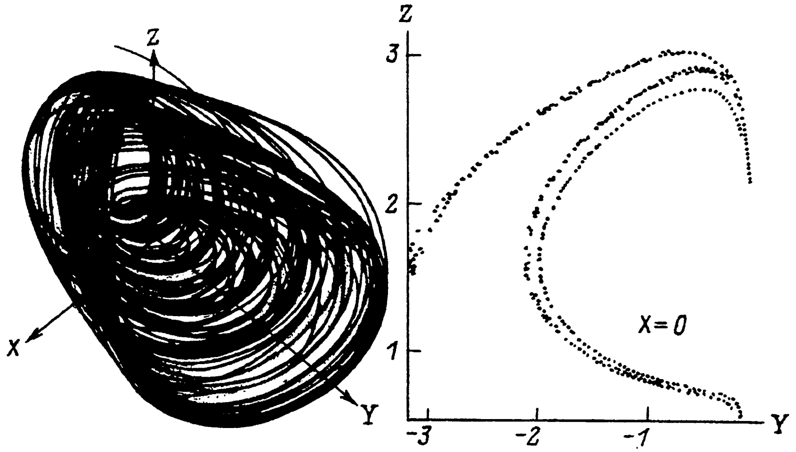

Рис. 2.

ординаты y. Для размерности пространства вложения, равной четырем, результаты эксперимента следующие:

$$d_c = 1.292 \pm 0.041, \quad D_c = 2.292 \pm 0.041. \tag{10}$$

Из сопоставления (10) и (8) видно, что и этот метод дает результаты, позволяющие предполагать справедливость (9).

Алгоритм Грассбергера-Такенса для расчета корреляционной размерности можно применить и непосредственно к последовательности значений одной из координат трехмерного аттрактора системы (1). С этой целью формировался массив данных координаты $x(i\Delta t)$, $i = 0, 1, 2, \ldots, 2 \cdot 10^4$, $\Delta t = 0.25$. Для размерности пространства вложения, равной пяти, и времени задержки $k \cdot \Delta t = 2$ результаты следующие:

$$D_c = 2.214 \pm 0.026. \tag{11}$$

Наконец, вычислялась и ляпуновская размерность D_L на основе полного спектра ляпуновских экспонент аттрактора по формуле Каплана-Йорке [8-10]. Результаты следующие:

$$\lambda_1 = 0.062, \; \lambda_2 = 0.000, \; \lambda_3 = -0.187, \; D_L = 2.33. \tag{12}$$

Результаты расчета корреляционной (11) и ляпуновской (12) размерностей аттрактора системы (1) дают несколько отличающиеся от (9) значения размерностей, рассчитанных по отображению. Есть основания полагать, что указанные различия, не превышающие 3 %, обусловлены относительно малой длиной анализируемой реализации $x(t)$ (D_c), и малым временем усреднения (D_L). В экспериментах наращивание массива данных и временем усреднения демонстрировали явную тенденцию к росту величины D_c и уменьшению D_L.

Несмотря на некоторые отличия в количественных значениях анализируемых типов размерностей, с точки зрения физики выводы следуют однозначные: эти отличия можно считать несущественными. Для решения вопроса о числе активных степеней свободы, задействованных в конкретном режиме автоколебаний системы, можно использовать любой тип размерности и соответствующий алгоритм, использование которого по тем или иным причинам наиболее удобно. Что касается рассмотренного конкретного примера аттрактора седло-фокусного типа, то не исключено, что все исследованные типы размерностей теоретически имеют одинаковое количественное значение. Как известно, для трехмерных потоковых систем с дивергенцией векторного поля скоростей, зависящей от фазовых координат, теоретически этот вопрос пока остается открытым.

Список литературы

[1] Farmer J.D., Ott E., Yorke J.A. // Physica. 1983. V. D7. N 1/3. P. 153-180.

[2] Grassberger P., Procaccia I. // Physica. 1984. V. D13. N 1/3. P. 34-54.

[3] Ваврив Д.М., Рябов В.Б., Третьяков О.А. Фрактальная размерность самоподобных и несамоподобных аттракторов. Харьков: Радиоастрономический институт АН УССР. Препринт № 17, 1988.

[4] Анищенко В.С. Стохастические колебания в радиофизических системах. – Саратов: СГУ. Ч. 2. 1986.

[5] Russel D.A., Hanson J.D., Ott E. // Phys. Rev. Lett. 1980. V. 45. N 14. P. 1175-1178.

[6] Takens F. // Lecture Notes in Mathematics / Ed. by D.A. Rand, L.S. Young. – Berlin: Springer. 1981. V. 898. P. 366-382.

[7] Grassberger P., Procaccia I.// Phys. Rev. Lett. 1983. V. 50. N 5. P. 346-348.

[8] Kaplan J.L., Yorke J.A. // Lecture Notes in Mathematics / Ed. by H.O. Peitgen, H.O. Walters. – Berlin: Springer. 1979. V. 730. P. 204-227.

[9] Shimada I., Nagasima T. // Progr. Theor. Phys. 1979. V. 61. P. 1605-1616.

[10] Сафонова М.А. // Алгоритмы и программы. Информационный бюллетень ГОСФАП. 1986. № 675. С. 4.

Саратовский
государственный
университет
им. Н.Г. Чернышевского

Поступило в Редакцию
3 февраля 1989 г.