Список литературы

[1] Felber F.S., Liberman M.A. and Velikovich A.L. // Appl. Phys. Lett. 1985. V. 46. N 11. P. 1042-1044.
[2] Фишер, Мако, Шило // Приборы для научных исследований. 1978. № 6. С. 206-207.
[3] Wessel F.J., Felber F.S., Wild N.C. et al. // Appl. Phys. Lett. 1986. V. 48. N 17. P. 1119-1121.

Институт сильноточной электроники СО АН СССР, Томск

Поступило в Редакцию 9 ноября 1987 г.

Письма в ЖТФ, том 15, вып. 18 26 сентября 1989 г.

КВАЗИРЕЗОНАНСНОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ НА ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ СО СТРАННЫМ АТТРАКТОРОМ

В.В. Афанасьев, Ю.Е. Польский

Особенностью открытых нелинейных динамических систем (ДС) является возможность протекания в них качественно отличающихся процессов – образование устойчивых структур, возникновение колебательных и хаотических режимов [1–5]. ДС различной физической природы описываются аналогичными системами нелинейных дифференциальных уравнений, что указывает на присущую им общность протекающих в них процессов. Так, динамика процессов генерации в квантовом генераторе [2, 3], гидродинамические процессы возникновения турбулентности в слое жидкости [4, 5] и процессы в автоколебательных системах с инерционным возбуждением [6, 7] описываются одной и той же системой уравнений Лоренца:

$$\begin{cases} \dot{X} = -\sigma(X-Y) \\ \dot{Y} = rX - Y - XZ \\ \dot{Z} = XY - bZ \ , \end{cases} \qquad (1)$$

где σ, r, b – параметры системы, инвариантной относительно преобразований $X \to -X$, $Y \to -Y$, $Z \to Z$.

Анализ решений (1), проведенный с использованием численных методов, показывает [3–5], что при $r > 1$ в системе имеются два аттрактора: $A_{1,2} = (\pm X_0, \pm Y_0, Z_0)$, где $X_0 = Y_0 = \sqrt{b(r-1)}$, $Z_0 = r-1$

С увеличением r стационарный режим генерации сменяется хаотическим с последующим возникновением странного аттрактора (СА). Возникновение СА сопровождается квазипериодическим движением в трехмерном фазовом пространстве по раскручивающейся спирали с некоторой характеристической квазирезонанской частотой Ω около одного из состояний равновесия $A_{1,2}$, а также чередующимися в случайные моменты времени переходами из области с A_1 в области с A_2 и обратно в течение интервалов времени, соизмеримых с периодом $T = \frac{2\pi}{\Omega}$.

Известно, что малыми резонансными воздействиями на ДС, согласованными с ее внутренними свойствами, можно изменить состояние системы [8–10]. Например, возможно осуществление синхронизации ДС со СА, когда частота взаимных переходов между областями с A_1 и A_2 синхронизируется внешним сигналом с частотой, близкой к квазирезонансной частоте Ω, определяемой экспериментально [7, 10]. При этом в качестве критерия стохастичности системы вводится экспериментально определяемый порог синхронизации ДС сигналами с частотой, близкой к квазирезонансной частоте системы [6].

Целью работы является определение области изменения квазирезонансной частоты Ω системы (1) и установление аналитической связи Ω с параметрами ДС.

В качестве первого приближения для Ω определим максимально возможные значения Ω при квазипериодическом движении около одного из состояний равновесия $A_{1,2}$ по раскручивающейся спирали минимального радиуса, когда движение происходит в квазистационарном слое с $\dot{z} \to 0$. При этом приближении система (1) преобразуется в уравнение Дуффинга с нелинейным диссипативным членом:

$$\ddot{X} + \dot{X}(d_1 + d_2 X^2) - \rho X + c X^3 = 0, \tag{2}$$

где $d_1 = (1+\sigma)$, $d_2 = 1/b$, $\rho = \sigma(r-1)$, $c = \sigma/b$.
Из (2) следует, что, описываемая этим уравнением ДС имеет, как и (1), 3 состояния равновесия – 0, $\pm X_0$ При движении вблизи состояний равновесия X_0, когда $X = X_0 + u$, $u \ll X_0$, из (2) получает уравнение для малых отклонений u:

$$\ddot{u} + \dot{u}(d_1 + d_2 X_0^2 + 2u d_2 X_0) + u(3cX_0^2 - \rho) = 0, \tag{3}$$

Так как в ДС (1) со СА $\sigma > (1+b)$, то с учетом малости u имеем

$$|2u d_2 X_0| \ll d_1 + d_2 X_0^2$$

Последнее неравенство позволяет оценить искомую частоту Ω по формуле:

$$\Omega = 0.5\left[8\sigma(r-1) - (\sigma + r)^2\right]^{1/2}. \tag{4}$$

Режим СА в системе (1) всегда сопровождается колебаниями около состояний равновесия, а из (4) следует, что это происходит только при $\Omega > 0$, когда $max(1; (3\sigma - M)) < r < (3\sigma + M), M = 2\sqrt{2\sigma(\sigma-1)}$. Поэтому режим СА в (1) должен сменяться режимом регулярных колебаний как при уменьшении параметра r, так и при его увеличении, что подтверждается результатами численного анализа [3-5].

В качестве следующего приближения для определения квазирезонансной частоты Ω предлагается брать оценки, получаемые заменой квазистационарного Z-слоя на квазигармонической Z-слой:

$$Z \simeq Z_0 + \varphi_Z \cos(\Omega t + \theta_Z), \quad \varphi_Z \leqslant Z_0.$$

При этом из результатов, полученных с использованием численных методов [3, 5], следует возможность приближения $\dot{Z} \simeq (y - y_0)\Omega$, откуда, подставляя $\dot{Z}$ в (1), имеем

$$\ddot{X} + \dot{X}\left[d_1 + d_2(X^2 - \Omega X)\right] - X(\rho - y_0 c\Omega) - cX(\Omega X - X^2) = 0. \qquad (5)$$

Из (5) следует уравнение для малых отклонений относительно X_0:

$$\ddot{u} + \dot{u}\left[d_1^* - u d_2^*\right] + u\rho^* = 0, \qquad (6)$$

где $d_1^* = d_1 + d_2(X_0^2 - X_0\Omega)$, $d_2^* = d_2(\Omega - 2X_0)$, $\rho^* = \rho + \Omega(d_2\sigma y_0 - 2cX_0)$.
С учетом неравенства $|u d_2^*| \ll d_1^*$, из уравнения (6) следует, что частота Ω определяется квадратным уравнением:

$$\Omega^2\left(1 + \frac{(r-1)}{4b}\right) + \dot{\Omega}\frac{X_0}{b}\left(\frac{\sigma - r}{2}\right) - 2\sigma(r-1) + \frac{(\sigma + r)^2}{4} = 0. \qquad (7)$$

Уравнение (7) позволяет оценить минимальное и максимальное значения квазирезонансной частоты Ω, соответствующие наибольшей и наименьшей величине диссипации в уравнении (6) при $X_0 \simeq \mp\sqrt{b(r-1)}$, $u \leqslant \Omega$.

Из (5) также следует, что при движении в квазигармоническом слое нелинейность диссипации приводит к увеличению частоты Ω при удалении от точки неустойчивого равновесия $A_0 = (0, 0, 0)$ и уменьшению Ω при приближении к A_0.

Результаты расчетов Ω для квазистационарного (Ω_1) и квазигармонического ($\Omega_{2min}, \Omega_{2max}$) Z-слоев приведены в таблице, где представлены для сравнения также значения $\Omega_э$, определенные экспериментально и при помощи численных методов [3-5, 7].

Из таблицы видно, что оценки Ω по (4) и (7) дают верхнюю и нижнюю границы области возможных значений квазирезонансной частоты: $\Omega_{2min} \leqslant \Omega \leqslant max(\Omega_1, \Omega_{2max})$. Это позволяет оценивать аналитически по параметрам r, σ, b ДС (1) частоту квазирезонансного воздействия, изменяющего состояние системы со СА.
Из полученных уравнений (3) и (5) и данных таблицы следует, что увеличение амплитуды колебаний около состояний равновесия неизбежно сопровождается изменением Ω (например, при переходе от квазистационарного к квазигармоническому Z-слою). Обеспечение же неизменности Ω может позволить устранить рост амплитуды этих колебаний, а значит – предотвратить переход системы из

Зависимость квазирезонансных частот от параметров ДС

Параметры ДС			Эксперимент, $\Omega_э$	Квазистационарный z-слой, Ω_1	Квазигармонический z-слой	
r	σ	b			$\Omega_{2\,min}$	Ω
28	10	8/3	9...11 [4]	13.4	4.13	12.2
20	4	1	0,9..1,2 [3]	2.8	0.22	6.29
55	10	2.67	8,5..12,5 [7]	4.9	0.23	16.9
22	10	8.3	7,5...9 [5]	12.8	5.12	10.8

одного состояния в другое. В результате этого обеспечивается стабилизация состояния динамической системы со СА при определенных начальных условиях системы. Это указывает на необходимость дополнительного исследования влияния на ДС (1) стабилизирующих сигналов с частотами, принадлежащих области изменения Ω, определенной по (4) и (7), что выходит за рамки данной статьи и будет рассмотрено в отдельной работе.

Список литературы

[1] Хакен Г. Синергетика. Иерархия неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройства. М.: Мир, 1985. 423 с.

[2] Ханин Я.И. Динамика квантовых генераторов. М.: Сов. радио, 1975. 496 с.

[3] Ораевский А.Н. // Квантовая электроника. 1981. Т. 8, № 1. С. 130-142.

[4] Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984. 528 с.

[5] Странные аттракторы / Под ред. Синай Я.Г., Шильникова Л.П. М.: Мир, 1981. 253 с.

[6] Кузнецов Ю.И., Ланда П.С., Ольховой А.Ф., Перминов С.М. // ДАН СССР. 1985. Т. 291. № 3. С. 291-294.

[7] Дудник Е.Н., Кузнецов Ю.И., Минакова И.И. // Вестн. МГУ, сер. 3. Физика, астрономия. 1983. Т. 24. № 4. С. 84-87.

[8]Ваврин Д.М., Третьяков О.А., Чернышов И.Ю. // Письма в ЖТФ, 1988. Т. 14. В. 10. С. 903-908.

[9] Компьютеры и нелинейные явления / Авт. предисл. А.А. Самарский. М.: Наука, 1988. 192 с.

[10] Анищенко В.С., Постнов Д.Э. // Письма в ЖТФ, 1988. Т. 14. В. 6. С. 569-573.

Поступило в редакцию
22 мая 1989 г.