

- [2] Zhou X., Bhattacharya P.K., Huggo G., Hong S.C., Culari E. // Appl. Phys. Lett. 1989. V. 54. N 9. P. 855-856.
- [3] Sollner T.C.L.G., Goodhue W.D., Tannenwald P.E., Parker C.D., Peck D.D. // Appl. Phys. Lett. 1983. V. 43. N 6. P. 588-590.
- [4] Levine B.F., Choi K.K., Bethea C.G., Walker J., Malik R.J. // Appl. Phys. Lett. 1987. V. 50. N 16. P. 1092-1094.
- [5] Казаринов Р.Ф., Сурис Р.А. // ФТП. 1972. Т. 6. № 16. С. 148-162.
- [6] Дюк К.Б. В кн.: Туннельные явления в твердых телах / Под редакцией Э. Бурштейна, С. Лундквиста. М.: Мир, 1973. С. 36.
- [7] Riccio B., Azbel M.Ya. // Phys. Rev. B. 1984. V. 29. N 4. P. 1970-1981.
- [8] Tsuchiya M., Sakaki H., Yoshino J. // JJP. 1985. V. 24. P. L466-L469.
- [9] Yokoyama N., Imamura K., Muto S. // JJP. 1985. V. 24. P. L853-L856.
- [10] Долманов И.Н., Рыжий В.И., Толстихин В.И. // ФТП. 1989. Т. 23. № 3. С. 499-504.

Институт радиотехники
и электроники
АН СССР, Москва

Поступило в Редакцию
31 июля 1989 г.

Письма в ЖТФ, том 15, вып. 24

26 декабря 1989 г.

01

РАЗМЕРНОСТЬ АТТРАКТОРОВ ПЕРЕХОДА ФЕЙГЕНБАУМА В ЭКСПЕРИМЕНТЕ

В.С. Анищенко, П.И. Сапарин

Решение широкого круга проблем, связанных с моделированием динамических систем, анализом их свойств и характеристик по экспериментальным данным, требует в качестве центральной задачи определения размерности аттрактора исследуемого режима. Это дает возможность оценить число задействованных в движении степеней свободы, без чего нельзя приступать к решению задачи синтеза динамической системы [1-4]. Исходной информацией для определения размерности аттрактора в эксперименте является дискретная последовательность значений одной динамической переменной $x(t_i)$, $t_i = t_0 + i\Delta t$, $i=0, 1, 2, \dots$, получаемая цифровым преобразованием

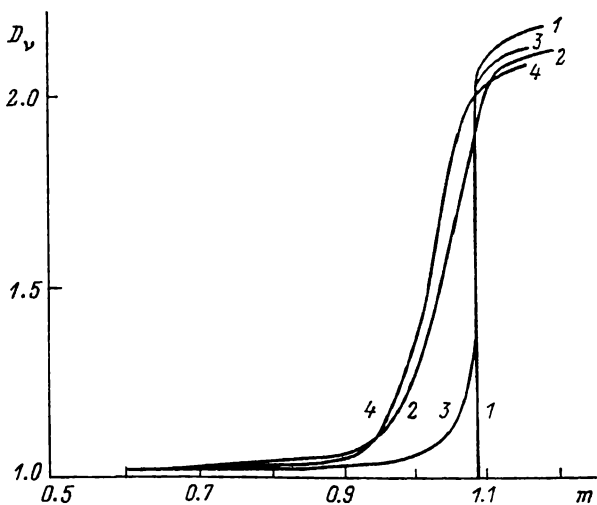


Рис. 1. Размерность аттракторов системы (1) при переходе к хаосу через удвоения Фейгенбаума. 1 - теория, 2 - физический эксперимент, 3 - численный эксперимент в отсутствии шума, 4 - численный эксперимент в присутствии шума с $\mathcal{D} = 10^{-2}$.

соответствующего аналогового сигнала $x(t)$. В ряде работ создана фундаментальная основа для компьютерного решения задачи определения корреляционной размерности по экспериментальным данным [1, 3, 4]. Однако на практике возникают важные вопросы, связанные с общей оценкой роли флуктуационных воздействий, их влиянием на результаты вычислений размерности, зависимостью результатов измерений от степени топологической сложности режимов колебаний и рядом других причин. Влияние указанных факторов особо ярко проявляется при исследовании систем со сложной динамикой при вариации параметров.

Представляется целесообразным провести экспериментальное определение корреляционной размерности режимов эталонной системы, реализующей при вариации параметров множество аттракторов и допускающей сравнительный анализ данных теории, численных и физических экспериментов.

Исследовалась корреляционная размерность аттракторов системы

$$\dot{x} = mx + y - xz, \quad \dot{y} = -y, \quad \dot{z} = -gz + gI(x)x^2, \quad (1)$$

$$I(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

реализующей переход Фейгенбаума при вариации параметра $0.6 \leq m \leq 1.2$, ($g = 0.3$) [6]. Кривая 1 на рис. 1 отражает теорети-

ческую зависимость ляпуновской размерности \mathcal{D}_L .¹ В области циклов периода $2^n T_0$ (до критической точки $m < m^* \approx 1.085$) размерность $\mathcal{D}_L = 1$. В критической точке имеет место скачок размерности до $\mathcal{D}_L = 2$, далее размерность растет по универсальному закону:

$$\mathcal{D}_L = 2 + C(m - m^*)^\gamma, \quad \gamma = \frac{\ln 2}{\ln 4.669}$$

С целью определения корреляционной размерности \mathcal{D}_y по экспериментальным данным был использован реальный генератор, описываемый уравнениями (1), сигнал $x(t)$ с которого после аналогоцифрового преобразования анализировался с помощью персонального компьютера известными методами [3, 5]. Эксперимент проводился для значений параметров генератора $g = 0.3$, $0.6 \leq m \leq 1.20$. Результаты представлены кривой 2 на рис. 1. Как видно из графиков, отличие кривых 1 и 2 весьма существенно и заключается в отсутствии скачка размерности (вместо критической точки появляется конечный интервал значений параметра $1.0 \leq m \leq 1.10$, отвечающий переходу к хаосу) с общим смещением кривой 2 влево относительно кривой 1. В области многотактных циклов экспериментальные значения \mathcal{D}_y превышают теоретические, в области хаоса $\mathcal{D}_y < \mathcal{D}_L$ (отметим, что по теории $\mathcal{D}_y \leq \mathcal{D}_L$ всегда! [2, 4]). Установлено, что указанные различия заметно превышают возможные ошибки расчетов и требуют специального анализа. С этой целью проводился численный эксперимент. Путем интегрирования системы (1) осуществлялся набор данных $x(t_i)$ и вычислялась зависимость $\mathcal{D}_y(m)$ для $g = 0.3$, представленная на рис. 1 кривой 3. Нетрудно видеть, что количественно близкими являются кривые 1 и 3, однако качественно кривая 3 идентична экспериментальной зависимости 2. Естественно предположить, что малые отличия кривых 1 и 3 обусловлены малыми шумами ЭВМ, а качественное совпадение хода зависимостей 2 и 3 — единством основной причины: воздействия шумов эксперимента. Для проверки такого предположения в правые части уравнений (1) вводились источники близкого к δ -коррелированному шуму варьируемой интенсивности \mathcal{D} . По реализации $x(t_i)$, полученной численным интегрированием стохастической системы (1), вновь вычислялись зависимости $\mathcal{D}_y(m)$ для различных значений интенсивности шума. Для значений $\mathcal{D} = 10^{-2}$ результаты представлены кривой 4 на рис. 1, анализ которых свидетельствует о правильности сделанных предположений.

Таким образом, при экспериментальном определении корреляционной размерности воздействие шумов эксперимента приводит: 1) к завышенным значениям \mathcal{D}_y для сложных многотактных циклов, 2) к размытию значений параметра вблизи детерминированной критической точки с общим сдвигом экспериментальной кривой в область меньших значений управляющего параметра, 3) к зани-

¹ Отметим, что для системы (1) фрактальная, ляпуновская и корреляционная размерности количественно мало различимы.

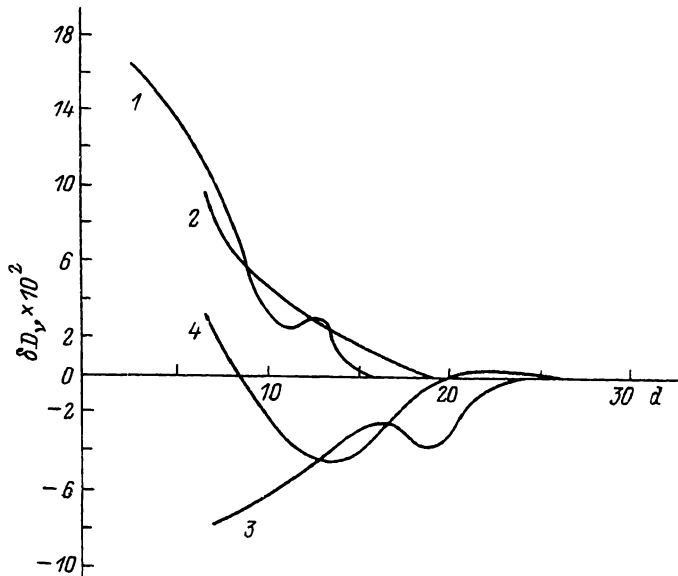


Рис. 2. Относительная ошибка расчета корреляционной размерности δD_y в зависимости от задаваемой величины размерности пространства вложения d . 1 - многотактные циклы, норма (2); 2 - многотактные циклы, норма (3); 3 - хаос, норма (2); 4 - хаос, норма (3).

женным значениям D_y в области хаоса (все в сравнении с теоретической кривой 1 рис. 1).

Следует подчеркнуть, что рассматриваемая система (1) обладает сложной динамикой. Реакция такой системы на внешние шумы оказывается принципиально нелинейной и приводит к изменению ее динамики. Таким образом, эффекты, обусловленные наличием шумов, в описываемом случае не сводятся лишь к размыванию траекторий аттрактора системы в фазовом пространстве и, вследствие этого, появлению второго линейного участка на кривой корреляционного интеграла, как это описано в [5].

Наконец, отметим важное в прикладном плане обстоятельство. Практическая реализация алгоритмов расчета D_y выявила, что за счет конечности используемых массивов данных $x(t_i)$ (10240 отсчетов) и ряда других причин требуемые для достоверных расчетов D_y значения размерности пространства вложения d должны существенно превышать минимальные теоретические $d' = 2r + 1$, где r - размерность пространства, на котором определен аттрактор [1]. Кроме того, требующиеся значения размерности пространства вложения существенно зависят от способа вычисления нормы.

Напомним, что норма между d -мерными векторами

$$\vec{X}_j = \{x_j; x_{j+1}; \dots; x_{j+d-1}\} \text{ и } \vec{X}_k = \{x_k; x_{k+1}; \dots; x_{k+d-1}\}$$

может вычисляться одним из двух способов:

евклидова норма определяется как

$$\rho(\vec{X}_j, \vec{X}_k) = \left[\sum_{l=1}^d (x_{k+l-1} - x_{j+l-1})^2 \right]^{1/2} \quad (2)$$

а максимальная норма [2] -

$$\rho(\vec{X}_j, \vec{X}_k) = \max_{l=1 \dots d} \{|x_{k+l-1} - x_{j+l-1}|\} \quad (3)$$

Для иллюстрации сказанного на рис. 2 приведены типичные кривые зависимости относительной ошибки расчета δD_j от размерности пространства вложения d . Видно, что даже для размерности многотактных циклов, когда теоретически казалось бы достаточным значения $d'=3$, требуемые значения $d \geq 15$. В области хаоса, где $d'=7$, практические значения $d > 20$. Видно также, что меньшие значения d получаются в случае использования в алгоритме определения евклидовой нормы (2).

В заключение авторы выражают благодарность М.А. Сафоновой за помощь в реализации программ и проведении численных экспериментов.

С п и с о к л и т е р а т у р ы

- [1] T a k e n s F. Lecture notes in mathematics. Dynamics system and Turbulence. Ed. by D.A. Rand, L.S. Young. Berlin, 1981. V. 898. P. 366-382.
- [2] Dimensions and Entropies in Chaotic Systems. Ed. G. Mayer-Kress. Berlin-Heidelberg, 1986. 259 p.
- [3] G r a s s b e r g e r P., P r o c a c c i a I. // Phys. Rev. Lett. 1983. V. 50. N 5. P. 346-348.
- [4] G r a s s b e r g e r P., P r o c a c c i a I. // Physica. 1984. V. D13. N 1/3. P. 34-54.
- [5] B e n - M i z r a c h i A., P r o c a c c i a I. G r a s s b e r g e r P. // Phys. Rev. A. 1984. V. 29. P. 975-977.
- [6] А н и щ е н к о В.С. Стохастические колебания в радиофизических системах. Саратов: Саратовский госуниверситет, 1986. Ч. 2. 198 с.

Саратовский
государственный
университет
им. Т.Г. Шевченко

Поступило в Редакцию
5 сентября 1989 г.