

05
**Динамическая трещиностойкость металлических материалов
в условиях быстрого распространения самоподобной трещины**

© Г.Г. Савенков,¹ Б.К. Барахтин,² К.А. Рудомёткин,¹ Н.В. Лебедева²

¹ Специальное конструкторско-технологическое бюро „Технолог“,
192076 Санкт-Петербург, Россия

² Санкт-Петербургский государственный морской технический университет,
190008 Санкт-Петербург, Россия
e-mail: sav-georgij@yandex.ru

(Поступило в Редакцию 22 октября 2013 г.)

Предложена модель определения динамической трещиностойкости K_{ID} металлов и сплавов для быстро распространяющейся фрактальной или самоаффинной трещины. Показано, что ее значения положительно коррелируют с величиной фрактальной размерности D_f будущего контура профиля поверхности трещины. В зависимости от величины фрактальной размерности K_{ID} будет меньше или больше значения K_{IC} .

Введение

Динамическое разрушение твердых тел, в особенности при очень коротких импульсах нагружения (субмикро- и наносекундной длительности), характеризуется чрезвычайно сложными явлениями и является не вполне изученным процессом, который плохо поддается аналитическому описанию. Численное же решение уравнений динамической механики разрушения наталкивается на ряд принципиальных трудностей, связанных с экспериментально определяемыми параметрами материала, которые необходимы для подстановки в соответствующие уравнения. В частности, эти затруднения связаны с экспериментальным определением динамического критического коэффициента интенсивности напряжений (ККИН), который определяется на разных стадиях развития трещины: ее старта K_{Id} , распространения K_{ID} и остановки K_{Ia} , и является характеристикой трещиностойкости материала. За базу сравнения выбирается минимальное (K_{Im}) значение из перечисленных коэффициентов. Считается [1], что снижение интенсивности напряжений до уровня ниже определяемого K_{Im} вызывает остановку трещины, кроме того, эти характеристики необходимы для расчета максимально допустимого размера дефекта, наличие которого не вызовет катастрофического разрушения в условиях динамического воздействия на конструкцию или ее элемент. И поскольку многие современные конструкции в процессе эксплуатации подвергаются воздействию интенсивных динамических нагрузок, то корректное определение всех трех характеристик динамической трещиностойкости является с точки зрения инженерных приложений важной проблемой динамической механики разрушения.

Состояние проблемы

В известных литературных данных [2–5 и др.] содержатся противоречивые сведения относительно значений динамического ККИН в зависимости от скорости деформации, скорости нагружения или скорости трещины. Как

отмечается в [5], практически для каждого экспериментального результата, связанного с определением динамического ККИН, в научной литературе можно подобрать противоположный, опровергающий его результат.

Зависимость характеристик трещиностойкости как от скоростей деформации или нагружения, так и от скорости трещины V [6–8] имеет немонотонный вид. При этом если авторы [6] данный феномен объясняют с привлечением концепции инкубационного времени, то в [8] немонотонность изменения K_{Id} связывают с неоднородностью скоростей частиц материала при динамическом нагружении, в частности немонотонностью изменения дефекта скорости.

В работах [7,9] предприняты попытки объяснить возникающие противоречия с позиций структурно-временного критерия разрушения [10]. Авторы полагают, что старт трещины происходит при условии передачи критического импульса только в течение определенного временного интервала, называемого ими „инкубационным“ временем. При этом другие характеристики разрушения могут существенно меняться в зависимости от особенностей используемой экспериментальной схемы с „максимальным“ или „минимальным“ разрушающим импульсом [9].

Так, например, если при заданном законе изменения напряжения во времени определяется момент разрушения, то для данной длительности воздействия реализуется „максимальный разрушающий импульс“. Такой импульс является максимальным в том смысле, что любое его увеличение за счет роста напряжений привело бы к „досрочному“ разрушению, т.е. разрушению за меньшее время. В этом случае уровень напряжений оказывается существенно выше необходимого для разрушения, и материал „перегружается“. Противоположным случаем является схема нагружения, при которой его длительность фиксирована, и определяется пороговая (минимальная) амплитуда напряжений, приводящая к разрушению материала. В этом случае реализуется минимальный разрушающий импульс, который является минимальным в том смысле, что любое его уменьшение

за счет уменьшения напряжения приведет к тому, что разрушения не произойдет. В отличие от первой схемы, где разрушение происходит в момент достижения напряжением максимального значения, во второй схеме момент разрушения „задерживается“.

В работе [7] проведен анализ изменения динамического ККИН в момент срагивания трещины (K_{Id}) в зависимости от реализуемой схемы нагружения. Показано, что в схемах, реализующих „максимальный“ разрушающий импульс, ККИН существенно возрастает по сравнению с критическим значением, определенным в квазистатических условиях нагружения (K_{IC}), и растет по мере увеличения скорости нагружения. Для схем нагружения, реализующих „минимальный“ разрушающий импульс, ККИН в момент разрушения оказывается меньше квазистатического и убывает по мере уменьшения времени воздействия.

Хотя в реальных экспериментах величина K_{Id} и лежит в диапазоне между указанными выше крайними значениями, тем не менее рассмотренный анализ различного поведения динамической трещиностойкости в зависимости от условий нагружения не объясняет, например, экспериментальных результатов работы [11]. В ней приведены данные, касающиеся определения K_{Id} алюминиевого сплава АМц в зависимости от структурно-механического состояния (поставки и термообработки). На фоне сопоставимых стандартных механических характеристик на растяжение обнаружена связь значений K_{Id} со структурой сплава: на одной и той же экспериментальной установке, на одинаковых образцах и при одной и той же скорости деформации для состояния поставки K_{Id} меньше K_{IC} , для термообработанного — больше.

Наличие разных подходов и точек зрения в объяснении экспериментальных результатов свидетельствует об актуальности и сложности рассматриваемой проблемы. Поэтому, как представляется, необходима разработка новых подходов, с одной стороны, более общих, а с другой, дающих конкретные результаты. В настоящей работе с привлечением концепции динамической фрактальной механики разрушения [12,13] предлагается один из вариантов разрешения проблемы.

Модель трещины и определение динамической трещиностойкости

Хотя в механике разрушения трещину упрощенно представляют в виде линии на плоскости, тем не менее хорошо известно, что поверхности, образующиеся при разрушении большинства материалов, сильно нерегулярны и шероховаты. Естественно, что учет нерегулярности изменит длину и площадь трещины, а следовательно, изменятся и критерии разрушения (в том числе трещиностойкость материала).

Начиная с пионерской работы Б. Мандельброта с соавторами [14], было установлено, что нерегулярные и шероховатые поверхности разрушения в некотором

диапазоне масштабов обладают свойствами самоподобия и могут моделироваться фракталами. Предполагается, что самоподобные поверхности разрушения содержат следы образования и распада полимасштабных самоподобных структур дефектов кристаллического строения, которые формировались механизмом самоорганизации и существовали в материале при прохождении упругопластического импульса нагрузки, что в целом свойственно нелинейным открытым системам [12]. Однако в полной мере природа и физические причины проявления фрактальности на поверхностях разрушения неясны и являются предметом многочисленных исследований. Ряд исследователей [15], например, полагает, что физический смысл фрактальных эффектов поверхностей разрушения может быть осознан в рамках концепции физической мезомеханики.

Поскольку конструкционные металлы и сплавы являются поликристаллами, то все их свойства являются усредненными по множеству отдельных зерен (кристаллов), вследствие чего и их поверхности разрушения, которые образуются при испытаниях, являются в общем случае не фрактальными, а самоаффинными. В этом случае поверхность характеризуется локальной фрактальной размерностью, равной $D_f^{loc} = 2 - H$, где H — показатель Херста [16,17] или $D_f^{loc} = 1/H$ в зависимости от определения. Естественно, что при таком подходе возрастает роль методики определения фрактальных размерностей, поскольку они являются параметрами конкретных моделей разрушения.

В предлагаемой модели используется „истинная“ длина трещины. Поэтому для описания ее генезиса использована фрактальная размерность ее контура D_f вне зависимости самоподобная это трещина или самоаффинная. Согласно [16], истинная (или эффективная) длина трещины равна

$$I(a) = l_0 a^{1-D_f}, \quad (1)$$

где l_0 — длина трещины, измеренная по прямой, a — масштаб измерения.

С учетом (1) квазистатическая трещиностойкость (ККИН) для фрактальной (самоаффинной) трещины будет определяться выражением

$$K_{IC}^f = K_{IC} a^{0.5(1-D_f)}. \quad (2)$$

Из соотношения (2) следует, что с увеличением фрактальной размерности и с уменьшением масштаба измерения критический коэффициент интенсивности напряжений увеличивается. Такой вывод соответствует физике и логике процесса разрушения, хорошо согласуется с многочисленными экспериментальными результатами [12]. Однако он прямо противоположен с выводами работы [18], авторы которой усмотрели необычный масштабный фактор, связанный с уменьшением коэффициента интенсивности напряжений при увеличении фрактальной размерности, который следовал из полученного ими соотношения для K_{IC}^f .

В случае быстрого развития трещины динамическая трещиностойкость при движении трещины является функцией ее скорости (V) [19]:

$$K_{ID} = f(V)K_{IC}, \quad (3)$$

где

$$f(V) = \frac{1 - V/C_R}{(1 - 0.95V/C_2)^{0.5}} [20],$$

C_R — скорость волны Рэлея, C_2 — скорость поперечных звуковых волн.

С учетом (2) соотношение (3) для фрактальной трещины примет вид

$$\begin{aligned} K_{ID}^f &= f(V)K_{IC}a^{0.5(1-D_f)} \\ &= K_{IC} \frac{(1 - V/C_R)}{(1 - 0.95V/C_2)^{0.5}} a^{0.5(1-D_f)}. \end{aligned} \quad (4)$$

Скорость фрактальной трещины при динамическом нагружении можно найти из выражения [20]

$$V = C_R a_0^{1-1/D_f}. \quad (5)$$

Здесь $a_0 = 0.3bC_1/\Lambda C_R$, b — параметр кристаллической решетки материала, C_1 — скорость продольных звуковых волн, Λ — длина свободного пробега дилатона (флуктуации плотности).

Примем для материалов, имеющих коэффициент поперечных деформаций (Пуассона) в диапазоне 0.3–0.4, $C_2 \approx 1.075C_R$ [21], тогда $0.95V/C_2 \approx 0.884V/C_R$. С учетом этого результата, подставляя (5) в (4), получим

$$K_{ID}^f = K_{IC} \frac{(1 - a_0^{v/D_f})}{(1 - 0.884a_0^{v/D_f})^{0.5}} a^{-0.5v}, \quad (6)$$

где $v = (D_f - 1)$ — нецелая часть фрактальной размерности.

Как видно из соотношения (6), на величину динамической трещиностойкости оказывает влияние фрактальная размерность формирующегося контура магистральной трещины, диапазон масштабов, на котором проявляются ее фрактальные свойства, и параметры материала (через основание степени a_0).

Поскольку фрактальная размерность является пост-экспериментальной характеристикой материала, то необходимо связать ее с внешними параметрами нагружения. Ранее было установлено, что фрактальная размерность контура поверхности разрушения ударно нагружаемого материала является линейной функцией скорости удара u [22], которая справедлива для некоторого диапазона скоростей удара

$$D_f = A - Bu. \quad (7)$$

Здесь A и B — эмпирические коэффициенты. Зависимость (7) можно выразить в терминах скорости деформации ($\dot{\epsilon}$)

$$D_f = A_1 - B_1\dot{\epsilon}, \quad (8)$$

где A_1 и B_1 — перенормированные коэффициенты. Обозначим $x = B_1\dot{\epsilon}$, $S = A_1 - 1$, тогда соотношение (6) с учетом (8) и принятых обозначений примет окончательный вид

$$K_{ID}^f = K_{IC} \frac{(1 - a^{(S-x)/(A_1-x)})}{(1 - 0.884a^{(S-x)/(A_1-x)})^{0.5}} a^{0.5(S-x)}. \quad (9)$$

Таким образом, динамическая трещиностойкость материала, определяемая по параметрам трещины, имеющая предполагаемую самоподобную фрактальную (или самоаффинную) поверхность, может нелинейно зависеть от скорости деформации, свойств материалов (через коэффициенты A_1 , S и a_0) и диапазона масштабов, на котором проявляются ее фрактальные свойства.

На рис. 1 приведены графики изменения отношения K_{ID}/K_{IC} в зависимости от изменения фрактальной размерности для железа и алюминия, построенные по соотношению (6). Масштаб измерения в обоих случаях принят 10^{-6} м, основание степени $a_0 = 0.0133$ — для железа, $a_0 = 0.00264$ — для алюминия, необходимые данные для их расчета — из [20]. На этом же рисунке приведено изменение отношения K_{ID}/K_{IC} как функции скорости деформации для стали Сп.28. Зависимость фрактальной размерности для этой стали от скорости удара известна [22], а зависимость D_f от скорости деформации $\dot{\epsilon}$ получена пересчетом экспериментальных результатов [22] в виде $D_f = 1.39 - 4.4 \cdot 10^{-6}\dot{\epsilon}$. Данная зависимость справедлива в достаточно узком диапазоне скоростей деформации $\dot{\epsilon} = (2.9 \cdot 10^4 - 6.5 \cdot 10^4) \text{ s}^{-1}$, что

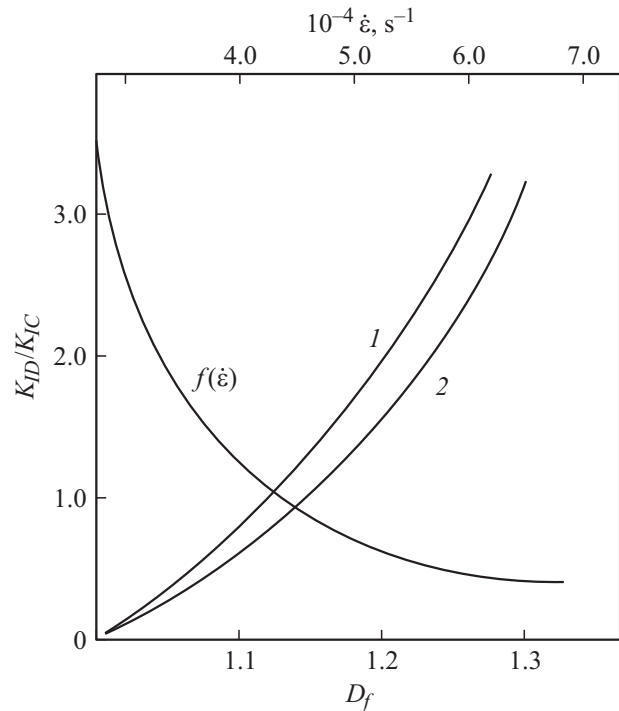


Рис. 1. Изменение безразмерной трещиностойкости (1 — алюминий, 2 — железо) в зависимости от D_f и фрактальной размерности ($f(\dot{\epsilon})$).

является ее существенным недостатком, но и стимулирующим фактором к проведению экспериментальных исследований.

Из графиков видно, что динамическая трещиностойкость K_{ID} по распространению трещины уменьшается с увеличением скорости деформации и соответственно увеличивается с ростом фрактальной размерности. При этом данная характеристика может быть как меньше квазистатической, так и больше даже в ограниченном диапазоне скоростей деформации. Кроме того, в процессе движения трещины K_{ID} не является постоянной величиной и может менять свое значение.

Это связано с тем, что из экспериментальных результатов известно о двух, в общем случае трех зонах поверхности трещины, в которых она (поверхность) имеет различный вид [5]: начальный участок — „зеркальный“, второй — „матовый“ и третий (которого может и не быть) — „перьевой“. Названия зон соотносятся с материалом гомалит-100, на котором были получены экспериментальные результаты, описываемые в работе [5]. Поэтому переносить эти названия зон на металлические материалы можно только в том смысле, в каком вообще результаты экспериментов на гомалите пригодны для металлов. Авторы указанных экспериментов полагают, что для квазихрупких металлов результаты могут быть сопоставимы с результатами, полученными на неметаллическом хрупком материале гомалите-100. Но известно [22], что появление зеркальной зоны разрушения в металлах связано с фазовыми переходами при соответствующих внешних нагрузках (давлениях). Так, например, для железа это давление составляет ~ 13 ГПа, что соответствует скорости стального ударника по плите из стали свыше 650 м/с или подрыву на ней заряда взрывчатого вещества, имеющего скорость детонации свыше 5 км/с. То есть для большинства металлов и сплавов для реальных условий нагружения можно говорить о двух зонах поверхностей разрушения. Например, в работе [23] поверхность разрушения быстрых трещин ($V = 785\text{--}950$ м/с и $V = 2150\text{--}2300$ м/с) в образцах из стали марки Ст.3 состояла из двух зон: в первой зоне, примыкающей к выращенной усталостной трещине, разрушение происходило по механизму микроскола, во второй, находящейся на значительном расстоянии от очага разрушения, — по механизму межзеренного разрушения (иногда наблюдались и зоны сдвиговой деформации).

Проведем оценку участия каждой зоны в формировании значения динамической трещиностойкости материала по распространению трещины.

Мощность, вводимая в образец, может быть представлена как

$$N = \sigma \dot{\epsilon} = \int \dot{\epsilon} d\sigma + \int \sigma d\dot{\epsilon} = J + Q \geq 0, \quad (10)$$

где σ — напряжение, $\dot{\epsilon}$ — скорость деформации.

Помимо рассеяния энергии в форме тепла предполагается, что вклад Q характеризует упрочнение и фрагментацию материала образца с возможным образованием

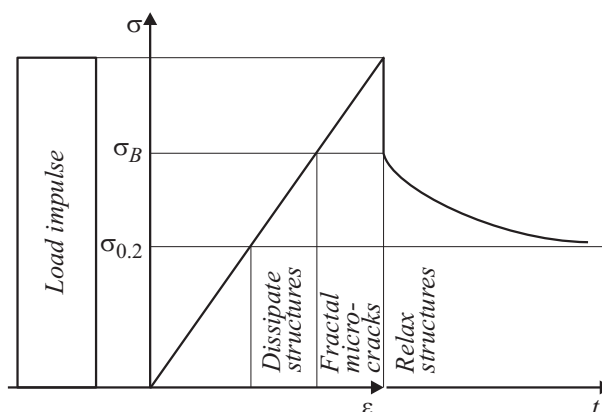


Рис. 2. Схема наблюдаемых структур при различных видах нагружения и напряжениях.

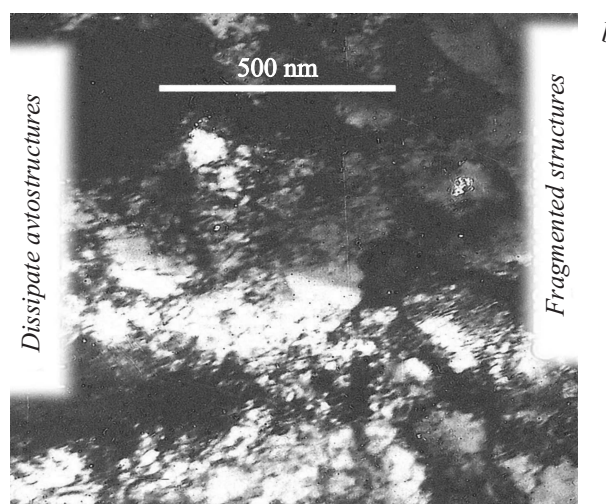
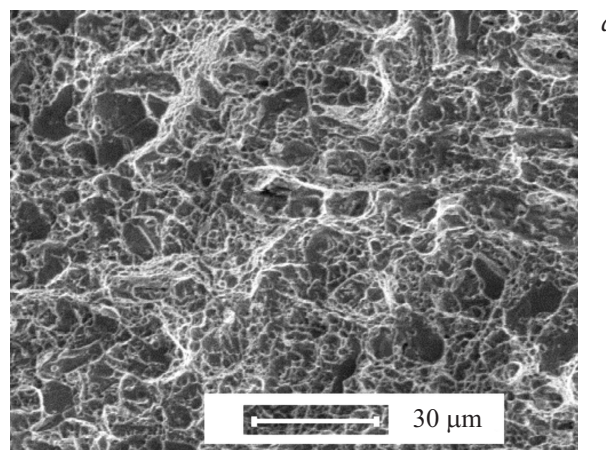


Рис. 3. Поверхность разрушения (а) и тонкая структура (b) образца стали, легированной 0.5% азота, микрорельеф в зоне мелких ячеек фрагментированного состояния (показан стрелкой) вблизи концентратора напряжений.

сети микротрещин фрактальной морфологии, а доля энергии J обусловлена аккомодационными подстройками в ансамблях дефектов кристаллического строения

в виде диссипативных фрактальных структур неравновесного состояния [24] (рис. 2). Например, в условиях динамического нагружения образцов с надрезом статические диссипативные автоструктуры представляют собой фрагментированную мелкоячеистую мезоструктуру, следы которой различимы в микрорельефе изломов вблизи концентратора напряжений (рис. 3).

Поскольку общая деформация ε в зоне предразрушения определяется как

$$\varepsilon = \rho_m b l, \quad (11)$$

где ρ_m — плотность подвижных дислокаций, b — вектор Бюргера, l — длина свободного пробега дислокаций.

Из (11) следует, что скорость деформации в зоне предразрушения равна

$$\dot{\varepsilon} = b \left(l \frac{d\rho_m}{dt} + \rho_m \frac{dl}{dt} \right). \quad (12)$$

Первое слагаемое в скобках (12) определяет в общем случае участок зоны предразрушения, в которой формируется диссипативная структура самоорганизации с заведомо фрактальными свойствами, второе является релаксационным вкладом, который обеспечивает старт и продвижение трещины с образованием „менее фрактальной“ поверхности разрушения. Таким образом, в (10) J — вклад неравновесных (фрактальных) мезоструктур диссипации, Q — вклад мезоструктуры релаксации.

Разделение мощности между вкладами J и Q осуществляется с помощью параметра m (коэффициента „разделения“ мощности). Допуская, что изменение этого параметра определяется только изменением скорости деформации и не зависит от изменения напряжения, получим выражение для его определения:

$$m = \frac{dJ}{dQ} = \frac{\dot{\varepsilon} d\sigma}{\sigma d\dot{\varepsilon}} = \frac{\dot{\varepsilon} \sigma d(\ln \sigma)}{\sigma \dot{\varepsilon} d(\ln \dot{\varepsilon})} \approx \frac{\lg \sigma}{\lg \dot{\varepsilon}}. \quad (13)$$

На основании соотношения (13) при реализуемых напряжениях $\sim 10^8 - 10^9$ Па и скоростях деформации $10^4 - 10^5$ с⁻¹ коэффициент разделения $m \approx 2 - 3$. То есть фрактальная зона в 2–3 раза превосходит по длине релаксационную. Тогда можно полагать, что в релаксационной зоне динамическая трещиностойкость меньше квазистатического значения, в диссипативной (фрактальной) — больше. Этот вывод полностью соответствует положениям работы [25] и сделан на основании независимых результатов настоящей работы.

Что касается идентичности изменения ККИН по старгиванию трещины K_{Id} и по распространению трещины K_{ID} в зависимости от скорости деформации $\dot{\varepsilon}$, скорости нагружения $\dot{K}_I = dK_I/dt$ и/или скорости трещины, то здесь видимой однозначности нет. Как следует из работы [1], в которой сделан теоретический анализ динамического поведения материала в зоне предразрушения, K_{Id} растет как с повышением скорости деформации, так и с повышением скорости трещины (что, однако,

не соответствует выводам других работ, например, [7]). В нашем же случае K_{ID} , как уже говорилось выше, уменьшается с ростом обоих указанных параметров процесса. Однако в той же работе [1] по результатам экспериментальных исследований сделан вывод о том, что с ростом скорости нагружения (\dot{K}) трещиностойкость по старту трещины K_{Id} уменьшается для сталей низкой и средней прочности и слабо изменяется для высокопрочных сталей. Аналогичный вывод для K_{Id} и K_{ID} малоуглеродистых сталей низкой и средней прочности сделан в работе [26]. К сожалению, в работе [1] не проведен анализ изменения K_{Id} для этих же сталей в зависимости от их характеристик пластичности (относительного удлинения δ и относительного сужения ψ). И поскольку при низкой пластичности материалов следует ожидать линейный характер зависимости между скоростью деформации $\dot{\varepsilon}$ и скоростью нагружения $\dot{\sigma}$, то здесь могла бы появиться база для сравнения K_{Id} и K_{ID} .

В принципе в работе [27] получена двухпараметрическая зависимость, связывающая динамическую трещиностойкость при движении трещины со скоростью нагружения \dot{K} и скоростью трещины V

$$K_{ID} = \frac{\pi \sigma_{0.2}^2}{2(1-\nu)^2} \frac{V}{\dot{K}_I}. \quad (14)$$

Из этой формулы следует, что K_{ID} зависит от размерного отношения V/\dot{K}_I . Чем оно выше, тем больше значение динамической трещиностойкости в процессе быстрого распространения трещины. Однако экспериментальные данные, подтверждающие этот вывод, отсутствуют и, кроме того, к этому соотношению необходимо подходить достаточно осторожно, поскольку из него следует, что в области высоких скоростей трещин для реальных конструкционных материалов (например, сталей) необходимо обеспечение очень высоких скоростей нагружения ($\dot{K}_I \geq 10^9$ МПа · м^{0.5} · с⁻¹), которые в настоящее время на существующих экспериментальных установках недостижимы (современные методы позволяют определять K_{Id} при скоростях нагружения $\dot{K}_I < 10^8$ МПа · м^{0.5} · с⁻¹ [3]).

Поэтому в данном случае для сравнения динамических ККИН и получения результатов, подтверждающих соотношения (9) и (14), необходимы корректные с высоким разрешением по времени эксперименты по определению K_{Id} и K_{ID} (желательно металлов и сплавов с полным набором стандартных механических характеристик, а не модельных оптически прозрачных материалов), чего, к сожалению, в настоящее время нет.

Следует отметить, что хотя большинство исследователей приводят результаты определения K_{Id} как функции \dot{K}_I , все же желательно иметь их в виде $K_{Id} = F(\dot{\varepsilon})$. Это связано с тем, что, во-первых, как правило, все остальные динамические характеристики материалов приводятся именно в такой форме (т.е. как функции скорости деформации). Во-вторых, конструктор, разрабатывая изделие, работающее в том числе и в условиях динамических нагрузок, также на первичных этапах разработки имеет, как правило, информацию только о скоростях деформации и амплитудах нагрузки.

Заключение

На основании проведенного анализа простых модельных представлений о быстром распространении самоподобной (самоафинной) трещины можно сделать вывод, что такая характеристика металла или сплава, как трещиностойкость (критический коэффициент интенсивности напряжений), определенная в процессе движения быстрой трещины, в большей степени зависит от самоорганизации фрактальных (самоподобных или самоафинных) структур, образующихся в зоне предразрушения.

Численной характеристикой таких фрактальных структур, которая определяет зависимость от них K_{ID} , является фрактальная размерность контура образующейся трещины, поэтому требуется достаточно высокая точность при ее определении по соответствующим методикам.

Трещиностойкость материала при быстром распространении трещины уменьшается с ростом скорости упруго-пластического деформирования материала в зоне предразрушения трещины и может быть как больше, так и меньше своего квазистатического значения.

В процессе движения трещины критический коэффициент интенсивности напряжений не является постоянной величиной и может менять свое значение в зависимости от характера механизма разрушения, чем и можно объяснить немонотонность его изменения в зависимости от параметров нагружения. То есть данный параметр не может считаться характеристикой материала, а является характеристикой материала и параметров движения трещины, которые в свою очередь зависят от параметров нагружения. В связи с этим возникает проблема конструкторского выбора и аттестации материала по результатам лабораторных испытаний на стандартных образцах. Вероятно, здесь необходимо определение K_{ID} при какой-то предельной скорости (для данного материала) трещины, близкой к скорости поверхностной волны Рэлея.

Работа выполнена при экспериментальной поддержке лабораторий центра коллективного пользования ФГУП „ЦНИИ КМ „Прометей“.

Список литературы

- [1] Степанов Г.В., Маковей В.А. Динамическая трещиностойкость сталей при квазистатическом нагружении / АН УССР. Ин-т проблем прочности. Препринт. Киев, 1988. 46 с.
- [2] Мецзяков Ю.И., Савенков Г.Г. // Прикладная механика и техническая физика. 1993. № 3. С. 138–142.
- [3] Степанов Г.В., Маковей В.А. Динамическая трещиностойкость конструкционных материалов. Киев: Наукова думка, 1993. 256 с.
- [4] Shockey D.A., Erlich D.C., Kalthoff J.F., Homma H. // Engin. fracture mechanics. 1986. V. 23. P. 311–321.
- [5] Партон В.З., Борисковский В.Г. Динамика хрупкого разрушения М.: Машиностроение, 1988. 240 с.
- [6] Плювинаж Г., Красовский А.Я., Красико В.Н. // Проблемы прочности. 1993. № 7. С. 3–8.
- [7] Морозов Н.Ф., Петров Ю.В., Тарабан В.В. // ДАН. 2000. Т. 371. № 2. С. 186–189.
- [8] Барахтин Б.К., Мецзяков Ю.И., Савенков Г.Г. // ЖТФ. 2010. Т. 80. Вып. 1. С. 79–84.
- [9] Морозов Н.Ф., Петров Ю.В. Проблемы динамики разрушения твердых тел. СПб.: СПбГУ, 1997. 132 с.
- [10] Петров Ю.В. // Исследования по упругости и пластичности. Вып. 18. Прочность и разрушение материалов и конструкций. СПб.: Изд-во СПб. ун-та, 1999. С. 196–210.
- [11] Попов Н.Н., Мартынов В.А., Пономарев В.А. // Проблемы прочности. 1993. № 11. С. 19–23.
- [12] Иванова В.С. Синергетика: Прочность и разрушение металлических материалов. М.: Наука, 1992. 160 с.
- [13] Савенков Г.Г. // ЖТФ. 2002. Т. 72. Вып. 12. С. 44–48.
- [14] Mandelbrot B.B., Passoja D.E., Paullay A.J. // Nature. 1984. V. 48. P. 721–722.
- [15] Панин В.Е., Кузнецов П.В., Дерюгин Е.Е. и др. // Физика металлов и металловедение. 1997. Т. 84. № 2. С. 118–122.
- [16] Федер Е. Фракталы. М.: Мир, 1991. 254 с.
- [17] Hui Su, Yugui Zh., Zhengi Y. // Scripta Metallurgica. 1991. V. 25. P. 651–654.
- [18] Гольдштейн Р.В., Мосолов А.Б. // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 4. С. 663–671.
- [19] Rose L.R.F. // International Journal of Fracture. 1976. V. 12. N 6. P. 799–806.
- [20] Морозов В.А., Савенков Г.Г. // Прикладная механика и техническая физика. 2013. Т. 54. № 1. С. 163–169.
- [21] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория упругости М.: Наука, 1987. 234 с.
- [22] Барахтин Б.К., Мецзяков Ю.И., Савенков Г.Г. // ЖТФ. 1998. Т. 68. Вып. 10. С. 43–52.
- [23] Клевцов Г.В., Жижерин А.Г., Степанов Г.В., Маковей В.А. // Проблемы прочности. 1989. № 4. С. 25–28.
- [24] Барахтин Б.К., Варгасов Н.Р., Лебедева Н.В., Рыбин В.В. // Деформация и разрушение материалов. 2006. № 7. С. 9–13.
- [25] Кальтхофф Й., Бейнерт Й., Винклер С. Механика разрушения. Быстрое разрушение, остановка трещин. М.: Мир, 1981. С. 23–25.
- [26] Черны М., Билек З. // Проблемы прочности. 1991. № 12. С. 22–26.
- [27] Плювинаж Г., Красовский А.Я., Красико В.Н. // Проблемы прочности. 1993. № 9. С. 3–8.