

## Ангармонические взаимодействия упругих и ориентационных волн в одномерных кристаллах

© Т.Н. Драгунов, И.С. Павлов, А.И. Потапов

Институт машиноведения Российской академии наук,  
603024 Нижний Новгород, Россия

(Поступила в Редакцию 12 января 1996 г.  
В окончательной редакции 19 июля 1996 г.)

Рассмотрены плоские колебания цепочки гантелевидных частиц, имеющих три степени свободы. Такая система моделирует, в частности, динамику квазиодномерных кристаллов, состоящих из анизотропных молекул вытянутой формы. Из предположения о кубическом потенциале взаимодействия между частицами получена система нелинейных дифференциальных уравнений, описывающая ангармоническое взаимодействие упругих и ориентационных волн в решетке, соответствующих разным степеням свободы частиц. Показано, что в низкочастотном приближении полученная система эквивалентна уравнениям моментной теории упругости, широко используемым для описания нелинейных и дисперсионных свойств слоистых кристаллов и фазовых превращений в сплавах. Исследованы некоторые типы трехволновых коллинеарных взаимодействий, указывающие на возможность возбуждения ориентационных волн в органических кристаллах за счет их нелинейного взаимодействия с акустическими волнами.

Многие динамические свойства "ориентированных" сред, состоящих из анизотропных молекул и имеющих кристаллическую решетку, относящуюся к типу так называемых молекулярных решеток [1–3], можно выяснить на примере плоских колебаний цепочки гантелевидных частиц [4]. Такие частицы имеют три степени свободы: смещения центра масс в плоскости колебаний и поворот. Каждая степень свободы в континуальном приближении определяет свой тип волновой моды: две трансляционные моды, связанные с продольными и поперечными перемещениями центров масс частиц в цепочке, и ротационная мода, связанная с пространственными изменениями их ориентации. Эта мода обусловлена действием моментов, возникающих при относительных поворотах анизотропных частиц [3], и имеет критическую частоту, ниже которой она является нераспространяющейся. Примерами упругих ориентированных сред служат слоистые и молекулярные кристаллы со сложной решеткой, такие как сероуглерод ( $CS_2$ ), бензол ( $C_6H_6$ ), нафталин ( $C_{10}H_8$ ), нитрит натрия ( $NaNO_2$ ), нитрат калия ( $KNO_3$ ) и др. [2,5–9], жидкие кристаллы [10,11], упругие ферромагнитные и ферроэлектрические кристаллы [12], поликристаллические и композитные материалы [13,14].

На важность учета вращательных степеней свободы анизотропных молекул обратил внимание в 1940 г. Гросс при изучении рассеяния света в жидкости [15]. Он наблюдал эффект изменения длины волны рассеянного света, связанный с флуктуациями ориентации анизотропных молекул, и отметил, что при вращательных колебаниях оси молекул могут поворачиваться на значительную величину, если период колебаний много больше времени релаксации. В дальнейшем Гросс и Коршунов экспериментально установили [2], что и у кристаллов некоторых органиче-

ских веществ спектр рассеяния малых частот связан с вращательными колебаниями молекул. Наиболее интенсивен спектр рассеяния у веществ, молекулы которых обладают большой оптической анизотропией (сероуглерод, нафталин, бензол).

В начале 40-х годов Френкель рассмотрел модель цепочки ориентированных диполей с закрепленными центрами тяжести и показал, что в ней могут распространяться "волны вращательных качаний" [16] (т.е. ориентационные волны). Первую же модель взаимодействия трансляционных и вращательных колебаний в молекулярной решетке предложили в 1949 г. Ансельм и Порфирьева [3]. Однако в этой работе авторами было рассмотрено лишь нелинейное взаимодействие ориентационных волн с одним видом трансляционных колебаний — продольными волнами.

Более подробно динамику анизотропных упругих сред, состоящих из частиц вытянутой формы, исследовали в 1960 г. Аэро и Кувшинский [17]. На основании допущения о вращательном взаимодействии частиц ими была обобщена феноменологическая теория упругости<sup>1</sup> с целью объяснения некоторых аномалий динамического поведения пластиков, которым классическая теория упругости не давала удовлетворительной трактовки. В дальнейшем идея "ориентированного" континуума, в котором каждой точке приписывается еще и направление (поле директора), получила свое развитие в теории жидких кристаллов [20,21].

С другой стороны, в 1952 г. Лифшиц [22], рассматривая вопрос о тепловых свойствах цепных и

<sup>1</sup> Следует отметить, что основы теории упругого континуума, состоящего из твердых недеформируемых тел, были развиты еще в 1909 г. братьями Коссера [18,19], но эта теория была забыта и оставалась неизвестной до начала 60-х годов.

слоистых структур при низких температурах, обратил внимание на влияние поперечной жесткости отдельных атомных слоев или цепей на закон дисперсии акустических колебаний слоистого кристалла в длинноволновой части спектра, где она по законам теории упругости должна отсутствовать. В этой работе приведены законы дисперсии для продольных и поперечных (изгибных) волн. Впоследствии изгибные волны в кристаллической решетке были более детально изучены Косевичем [23]. Он отметил, что в отличие от продольных волн, обусловленных центральными силами взаимодействия, изгибные волны вызываются более слабыми силами нецентрального взаимодействия, возникающими при поперечных смещениях частиц. Он также показал, что для более точного описания нелинейной динамики кристаллической решетки в уравнениях колебаний необходимо учитывать и моментные напряжения, описываемые четвертыми пространственными производными от поперечных смещений частиц.

Изложенные выше представления о существовании в кристаллической решетке ротационных степеней свободы и различных типов взаимодействий в настоящее время широко используются при изучении динамических процессов в средах сложной структуры [8,9,11–13,18,19]. Разработка теории ангармонических эффектов в решетке, состоящей из анизотропных частиц, представляется весьма важной для развития ультразвуковых методов исследования в физике твердого тела [24,25].

Целью настоящей работы является построение математической модели, описывающей ангармонические эффекты в одномерной цепочке, состоящей из анизотропных частиц, исследование дисперсионных свойств различных типов волновых мод и изучение трехволновых когерентных взаимодействий между ними.

## 1. Основные уравнения

Рассматриваются плоские колебания цепочки гантелевидных частиц ("диполей"), в исходном состоянии расположенных на расстоянии  $a$  друг от друга и ориентированных перпендикулярно линии, соединяющей их центры масс (рис. 1). Диполь моделируется двумя одинаковыми точечными массами  $m/2$ , соединенными жесткими невесомыми стержнями длины  $2l$ . Его центр масс  $O_n$  совпадает с геометрическим центром. Каждая частица имеет три степени свободы: смещения центра масс и в плоскости  $xy$  и вращение вокруг нормали, проходящей через ее центр масс.

Движение  $n$ -й частицы складывается из горизонтального  $u_n$  и вертикального  $w_n$  перемещений ее центра масс и поворота на угол  $\varphi_n$  (рис. 1) (приращение  $\varphi_n$  считается положительным, если оно происходит

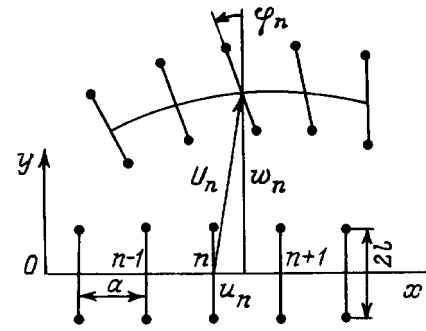


Рис. 1. Модель цепочки.

против часовой стрелки). Кинетическая энергия цепочки равна

$$T = \sum_n T_n = \sum_n \frac{m}{2} \left( \left( \frac{du_n}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dw_n}{dt} \right)^2 + l^2 \left( \frac{d\varphi_n}{dt} \right)^2 \right), \quad (1)$$

где  $T_n$  — кинетическая энергия  $n$ -го диполя.

Считается, что каждая масса диполя взаимодействует со всеми массами двух ближайших соседей по цепочке, и это взаимодействие описывается кубическим потенциалом, зависящим от разности смещений масс (рис. 1). Предполагается, что частицы колеблются вблизи положений равновесия и углы их поворотов малы ( $\varphi_n \ll \pi$ ).

Непосредственные вычисления, которые опущены в силу их громоздкости, показывают, что при сделанных предположениях потенциальная энергия цепочки может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \Pi = \sum_n \frac{1}{2} & \left( K_1(u_n - u_{n-1})^2 + K_2(w_n - w_{n-1})^2 \right. \\ & + K_3 l^2 (\varphi_n - \varphi_{n-1})^2 + K_4 l^2 (\varphi_n + \varphi_{n-1})^2 \\ & + K_5 l (w_n - w_{n-1})(\varphi_n + \varphi_{n-1}) \\ & + p_1 (u_n - u_{n-1})^3 + p_2 (u_n - u_{n-1})(w_n - w_{n-1})^2 \\ & + p_3 l^2 (u_n - u_{n-1})(\varphi_n + \varphi_{n-1})^2 \\ & \left. + p_4 l (u_n - u_{n-1})(w_n - w_{n-1})(\varphi_n + \varphi_{n-1}) \right). \quad (2) \end{aligned}$$

Здесь первые два члена описывают энергию продольной и сдвиговой деформаций в гармоническом приближении, обусловленную взаимодействием ближайших соседей по цепочке [23]. Третий и четвертый члены характеризуют энергию, связанную с моментными взаимодействиями в цепочке, а пятое слагаемое описывает линейную связь между поперечной и ротационной степенями свободы частиц. Последние четыре члена определяют ангармонические эффекты третьего порядка [24].

В выражении (2) сохранены лишь члены, имеющие порядок малости не выше  $\varepsilon^5$ , при условии, что между

силами  $F_u = -\partial\Pi/\partial u_n$  и  $F_w = -\partial\Pi/\partial w_n$ , а также моментами  $lF_\varphi = -l\partial\Pi/\partial\varphi_n$  выполнены следующие соотношения:  $F_u \sim \varepsilon$ ,  $F_w \sim \varepsilon^{3/2}$ ,  $lF_\varphi \sim \varepsilon^2$ , где величина  $\varepsilon \ll 1$  характеризует условные деформации в цепочке. Расстояние между диполями и их длины считаются величинами одного порядка малости. Входящие в (2) коэффициенты  $K_i$  ( $i = 1-5$ ) и  $p_j$  ( $j = 1-4$ ) представляют собой комбинации из констант межатомного взаимодействия и в дальнейшем рассматриваются как феноменологические коэффициенты, определяемые по экспериментальным данным. Дифференциально-разностные уравнения, описывающие нелинейные динамические процессы в такой цепочке, могут быть получены из вариационного принципа Гамильтона.

В континуальном пределе, когда характерная длина волны  $\lambda$  много больше расстояния между частицами ( $\lambda \gg a, l$ ), погонная плотность функции Лагранжа  $L$  примет вид

$$L = \frac{\rho}{2}(u_t^2 + w_t^2 + l^2\varphi_t^2) - \frac{\rho}{2}(c_1^2 u_x^2 + c_2^2 w_x^2 + l^2 c_3^2 \varphi_x^2 + \frac{l^2}{a^2} \beta_1 \varphi^2 + \frac{2l}{a} \beta_2 w_x \varphi + \frac{1}{3} \alpha_1 u_x^3 + \alpha_2 u_x w_x^2 + \frac{l^2}{a^2} \alpha_3 u_x \varphi^2 + \frac{2l}{a} \alpha_4 u_x w_x \varphi). \quad (3)$$

Здесь  $\rho = m/a$  — погонная плотность среды,  $l$  — радиус инерции диполя,

$$c_j^2 = aK_j/\rho \quad (j = 1-3) \quad (4)$$

— квадраты скоростей продольных, поперечных и ротационных волн,

$$\beta_j = aK_{j+3}/\rho \quad (j = 1-3) \quad (5)$$

— параметры дисперсии,

$$\alpha_1 = 3a^2 p_1/\rho, \quad \alpha_2 = a^2 p_2/\rho, \quad \alpha_3 = 4a^2 p_3/\rho, \quad \alpha_4 = a^2 p_4/\rho \quad (6)$$

— коэффициенты нелинейностей. Индекс  $t$  обозначает частную производную по времени, а  $x$  — пространственную производную.

Из вариационного принципа Гамильтона по известному лагранжиану (3) легко получить систему дифференциальных уравнений, описывающую взаимодействие различных типов волн в рассматриваемой микрополярной среде,

$$\begin{aligned} u_{tt} - c_1^2 u_{xx} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \alpha_1 u_x^2 + \alpha_2 w_x^2 + \frac{l^2}{a^2} \alpha_3 \varphi^2 + \frac{2l}{a} \alpha_4 w_x \varphi \right), \\ w_{tt} - c_2^2 w_{xx} - \frac{l}{a} \beta_2 \varphi_x &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \alpha_2 u_x w_x + \frac{l}{a} \alpha_4 u_x \varphi \right), \\ a^2 (\varphi_{tt} - c_3^2 \varphi_{xx}) + \beta_1 \varphi + \frac{a}{l} \beta_2 w_x &= -\alpha_3 u_x \varphi - \frac{a}{l} \alpha_4 u_x w_x. \end{aligned} \quad (7)$$

Первые два уравнения описывают упругие (продольные и поперечные) волны в кристалле, а третье уравнение описывает ротационные волны, связанные с микроповоротами анизотропных частиц. К таким же уравнениям приводит, в частности, нелокальная теория упругости сред с микроструктурой (нелинейный континуум Коссера) [19,26]. Правые части уравнений (7) характеризуют эффекты нелинейного взаимодействия между различными волновыми модами.

## 2. Двухмодовое приближение моментной теории упругости

Волновые свойства линейной части системы (7) полностью характеризуются дисперсионным соотношением (рис. 2, *a*)

$$(\omega^2 - c_1^2 k^2)[(c_2^2 k^2 - \omega^2)(\beta_1 + a^2 c_3^2 k^2 - a^2 \omega^2) - \beta_2^2 k^2] = 0 \quad (8)$$

и линейной связью между комплексными амплитудами поперечных  $A_w$  и ротационных  $A_\varphi$  волн

$$\begin{aligned} A_\varphi &= i \frac{a(c_2^2 k^2 - \omega^2)}{l\beta_2 k} A_w \\ &= i \frac{a\beta_2 k}{l(\beta_1 + a^2 c_3^2 k^2 - a^2 \omega^2)} A_w = id(\omega, k) A_w, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $\omega$  — частота колебаний,  $k$  — волновое число,  $d(\omega, k)$  — коэффициент линейной связи между амплитудами. Из рис. 2, *a* видно, что в данном приближении продольная мода (кривая 1) не имеет дисперсии, а ротационная мода (кривая 3) обладает дисперсией волноводного типа и имеет критическую частоту  $\omega_* = \sqrt{\beta_1}/a$ , ниже которой она является нераспространяющейся. Например, для кристаллов бензола  $\omega_* \sim 10^9 \text{ s}^{-1}$  [2], а для нематического жидкого кристалла типа МББА, помещенного в магнитное поле с напряженностью  $H_0 = 10^5 \text{ Oe}$ , критическая частота  $\omega_* \approx 3 \cdot 10^7 \text{ s}^{-1}$  [27].

В низкочастотном приближении ( $\omega < \omega_*$ ) ротационная мода становится нераспространяющейся, и переменную  $\varphi$  можно выразить методом последовательных приближений через  $w$  и ее производные

$$\varphi(x, t) \approx -A \frac{\partial w}{\partial x} - B \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} + c_3^2 B \frac{\partial^3 w}{\partial x^3},$$

где  $A = a\beta_2/l\beta_1$ ,  $B = \lambda a^2 \beta_2/l\beta_1^2$ . В результате с принятой степенью точности (7) сведется к двухмодовой модели

$$\begin{aligned} u_{tt} - c_1^2 u_{xx} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\alpha_1 u_x^2 + \gamma_1 w_x^2), \\ w_{tt} - c_{*2}^2 w_{xx} - c_3^2 B_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + B_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} &= \gamma_2 \frac{\partial}{\partial x} (u_x w_x). \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь  $\gamma_1 = \alpha_2 + \alpha_3(\beta_2/\beta_1)^2 - 2\alpha_4\beta_2/\beta_1$ ,  $\gamma_2 = \alpha_2 - \alpha_4\beta_2/\beta_1$ ,  $c_{*2}^2 = c_2^2 - \beta_2^2/\beta_1$ ,  $B_1 = l\beta_2 B/a = a\lambda(\beta_2/\beta_1)^2$ .

Во втором уравнении появляются четвертые производные, приводящие к дисперсии поперечной упругой моды. Слагаемое, пропорциональное  $\partial^4 w / \partial x^4$ , учитывает моментные ("изгибные") напряжения, возникающие при поперечных смещениях частиц [18,19,23], а слагаемое, пропорциональное  $\partial^4 w / \partial x^2 \partial t^2$ , связано с приближенным учетом вклада ротационных движений частиц в кинетическую энергию цепочки. Заметим, что именно такие слагаемые описывают дисперсию поперечной (изгибной) моды, обнаруженную в слоистых кристаллах при низких температурах [22,23]. В работе [28] уравнения подобного типа привлекаются для описания структурных превращений в мартенситных сплавах. Уравнения (10) соответствуют моментной теории упругости, являющейся первым приближением нелокальной теории [19].

Примером органического кристалла с ротационной степенью свободы анизотропных молекул может служить кристалл нафталина. Для него известны значения упругих констант второго порядка в широком диапазоне температур [29]. При комнатной температуре (20 °C) значение скорости продольной акустической волны, распространяющейся в таком кристалле вдоль оси второго порядка, равно  $c_1 = 9.86 \cdot 10^5$  м/с, а скорость поперечной волны  $c_2$  зависит от ее поляризации и лежит в интервале от  $5.45 \cdot 10^5$  до  $6.84 \cdot 10^5$  м/с. Критическая частота  $\omega_*$ , которая может быть оценена из спектрограмм рассеяния света (см., например, [1,2]), составляет  $10^{11} - 10^{12}$  с<sup>-1</sup>. Таким образом, ориентационная волновая мода в кристалле нафталина может наблюдаться лишь в гиперзвуковом диапазоне частот, а при более низких частотах справедлива приближенная двухмодовая модель (10). По значениям критической частоты  $\omega_*$  и скорости распространения ориентационной волны  $c_3$  можно вычислить с помощью соотношений (4) и (5) константы  $K_3$  и  $K_5$ , характеризующие энергию ориентационного взаимодействия в кристалле. Для определения констант упругости третьего порядка нужно рассматривать нелинейные взаимодействия различных типов волн [24,26,30]. Некоторые из таких взаимодействий обсуждаются далее.

### 3. Эволюционные уравнения трехволновых взаимодействий

Для анализа решений уравнений (7) может быть использован либо пространственно-временной, либо спектральный подход. Пространственно-временное описание, как правило, используется при исследовании систем со слабой дисперсией, когда из-за когерентного взаимодействия большого числа гармоник форма нелинейной волны может быть близка к солитону. Решения подобного типа, широко обсуждаемые в литературе по теории нелинейных волн, для полной системы уравнений (7) не найдены. В

двухмодовом приближении моментной теории (10) с учетом высших степеней нелинейности исследовались солитоноподобные волны, описывающие структурные превращения в мартенситных сплавах [28]. Можно искать солитоны деформации на продольной моде, которая в линейном приближении отщепляется от ориентационной и поперечной мод. Такие эффекты следует ожидать при достаточно малых длинах волн, когда начнет сказываться дисперсия, обусловленная дискретным строением кристалла [31]. Однако, как будет далее показано, еще раньше нелинейная продольная волна становится неустойчивой относительно малых возмущений и начинает параметрическим образом возбуждать в кристалле поперечную и ориентационную волны, перекачивая в них свою энергию. Подобные ангармонические процессы весьма привлекательны с точки зрения развития ультразвуковых методов исследования в физике твердого тела, так как их в отличие от солитонов деформации можно сравнительно легко реализовать экспериментально, например в акустических резонаторах [32]. Именно такие многоволновые процессы и являются предметом дальнейшего анализа.

В рассматриваемой системе, обладающей дисперсией ориентационных и поперечных волн (рис. 2,а), упругая нелинейность существенно сказывается лишь при когерентном взаимодействии нормальных волн, когда их частоты  $\omega_j$  и волновые числа  $k_j$  удовлетворяют условию фазового синхронизма [33–35]

$$\sum_{j=1}^N n_j \omega_j = 0, \quad \sum_{j=1}^N n_j k_j = 0. \quad (11)$$

Здесь  $N$  — число взаимодействующих волн. Такие группы волн называют резонансными волновыми ансамблями. Простейшие из них триплеты ( $N = 3$ ) и тетрады ( $N = 4$ ). Для анализа резонансных волновых ансамблей широко используются асимптотические методы, основанные на спектральном подходе [30,33,35]. Модальный анализ показывает [34], что условия фазового синхронизма (11) выделяют в правых частях уравнений (7) "резонансные" нелинейные слагаемые, связывающие между собой нормальные моды. Эти слагаемые невозможно уничтожить никакими взаимно однозначными заменами переменных. По этой причине резонансные волновые ансамбли отсутствуют в линейных системах и являются динамическими объектами нелинейной природы.

Рассмотрим случай трехволновых резонансных взаимодействий (триплеты), когда

$$\omega_3 = \omega_1 + \omega_2, \quad k_3 = k_1 + k_2. \quad (12)$$

В первом приближении теории нелинейных возмущений для сред с квадратичной нелинейностью такие взаимодействия являются наиболее общими. Из них,

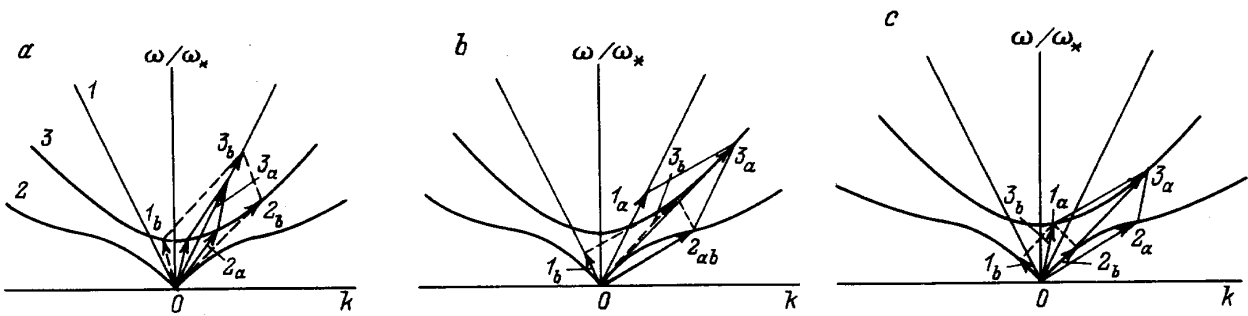


Рис. 2. Дисперсионные кривые.

в частности, вытекают условия параметрического взаимодействия волн, генерации второй гармоники и субгармоники. В зависимости от того, какие типы волновых мод участвуют в резонансном взаимодействии и какая из волн триплета является высокочастотной, а также в зависимости от направлений их распространения (а) три волны попутные, б) две волны попутные) возможно существование нескольких качественно различных видов трехволновых взаимодействий [34]. В рассматриваемой трехмодовой системе их число достигает шести (рис. 2, а-с).

Пусть продольная волна является высокочастотной и все волны попутные, т.е.  $0 < k_1 < k_2 < k_3$  (рис. 2, а триада типа а). Решение системы (7) будем искать в виде набора трех квазигармонических волн

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= A_3(x, t) \exp\{i\theta_3(x, t)\} + \text{с.с.}, \\
 w(x, t) &= A_1(x, t) \exp\{i\theta_1(x, t)\} \\
 &\quad + A_2(x, t) \exp\{i\theta_2(x, t)\} + \text{с.с.}, \\
 \varphi(x, t) &= d_1 A_1(x, t) \exp\{i\theta_1(x, t)\} \\
 &\quad + d_2 A_2(x, t) \exp\{i\theta_2(x, t)\} + \text{с.с.} \quad (13)
 \end{aligned}$$

Здесь  $A_1, A_2, A_3$  — медленно меняющиеся комплексные амплитуды,  $\theta_j = \omega_j t - k_j x$  ( $j = 1-3$ ) — фазы волн,  $d_r$  ( $r = 1, 2$ ) — коэффициенты линейной связи, вычисляемые по формуле (9), с.с. обозначает комплексно-сопряженную часть решения.

Подставляя (13) в (7) и проводя усреднение по быстро осциллирующим переменным [33,34], получаем систему эволюционных уравнений для медленно меняющихся комплексных амплитуд

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial A_1}{\partial t} + V_1 \frac{\partial A_1}{\partial x} &= -\Gamma A_2^* A_3, \\
 \frac{\partial A_2}{\partial t} + V_2 \frac{\partial A_2}{\partial x} &= -\Gamma A_1^* A_3, \\
 \frac{\partial A_3}{\partial t} + V_3 \frac{\partial A_3}{\partial x} &= \Gamma A_1 A_2. \quad (14)
 \end{aligned}$$

Здесь  $V_j = (d\omega/dk)_j$  — групповые скорости волн,

$$\begin{aligned}
 V_1 &= (\omega_1^2 + c_2^2 k_1^2) / \omega_1 k_1, \\
 V_2 &= (\omega_2^2 + c_2^2 k_2^2) / \omega_2 k_2, \\
 V_3 &= c_1^2 k_3 / \omega_3,
 \end{aligned}$$

а  $\Gamma = \sqrt{|\Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3|}$  — параметр нелинейности,  $\Gamma_j = \alpha_2 k_1 k_2 k_3 / 2\omega_j$  — коэффициенты нелинейного взаимодействия волн (при их вычислении мы пренебрегли малыми слагаемыми, пропорциональными  $\alpha_3$  и  $\alpha_4$ ),  $A'_j = A_j / \sqrt{|\Gamma_j|}$  — нормированные комплексные амплитуды (штрихи у  $A_j$  опущены).

Можно показать [34], что для системы (14) существуют интегралы движения

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} (N_1 + N_3) + \frac{\partial}{\partial x} (V_1 N_1 + V_3 N_3) &= 0, \\
 \frac{\partial}{\partial t} (N_2 + N_3) + \frac{\partial}{\partial x} (V_2 N_2 + V_3 N_3) &= 0, \\
 \frac{\partial}{\partial t} (N_1 - N_2) + \frac{\partial}{\partial x} (V_1 N_1 - V_2 N_2) &= 0, \quad (15)
 \end{aligned}$$

из которых следует закон сохранения "энергии"

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} (\omega_1 N_1 + \omega_2 N_2 + \omega_3 N_3) \\
 + \frac{\partial}{\partial x} (V_1 \omega_1 N_1 + V_2 \omega_2 N_2 + V_3 \omega_3 N_3) &= 0, \quad (16)
 \end{aligned}$$

где  $N_j(x, t) = |A_j|^2$  характеризует интенсивность колебаний в  $j$ -й моде.

В нелинейной теории волн уравнения (14) известны как уравнения трехволновых взаимодействий [33,35,36]. Они возникают при изучении широкого круга физических явлений в слабо нелинейных системах с дисперсией и описывают простейшие многоволновые процессы. Такие взаимодействия играют весьма важную роль в нелинейной физике, так как допускают обмен энергией между различными модами системы, а также подкачку энергии по одной моде и затем передачу энергии в другую моду. Такое явление широко используется, например, в нелинейных оптических световодах, где для усиления оптической

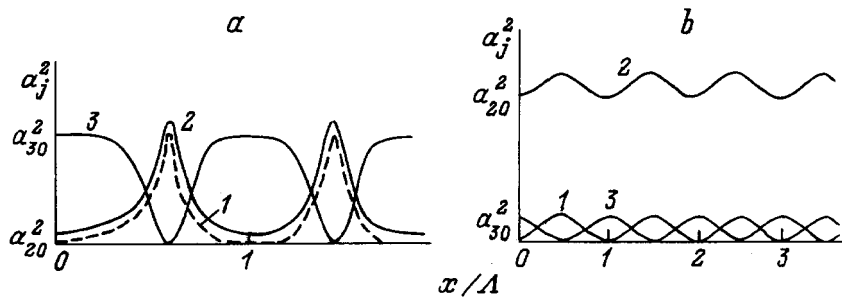


Рис. 3. Обмен энергией между взаимодействующими волнами.

волны используется вынужденное комбинационное рассеяние света на акустической (фононной) волне в материале. Кроме периодического обмена энергией между квазигармоническими волнами уравнения (14) описывают также распространение и взаимодействие локализованных волновых пакетов — трехчастотных солитонов огибающих [33,34]. В общем случае эти нелинейные уравнения могут быть точно проинтегрированы методом обратной задачи рассеяния [36].

#### 4. Установившиеся процессы. Триплет типа а

В частных случаях пространственно-однородного ( $\partial/\partial x = 0$ ) или установившегося ( $\partial/\partial t = 0$ ) волнового процесса система (14) сводится к обыкновенным дифференциальным уравнениям, а интегралы движения (15) принимают вид алгебраических соотношений между интенсивностями волн. Так, например, в случае установившихся процессов взаимодействие волн в триплете типа а описывается уравнениями

$$\frac{da_j}{dx} = e_j \frac{\Gamma}{V_j} \frac{a_1 a_2 a_3}{a_j} \cos \Phi,$$

$$\frac{d\Phi}{dx} = \Gamma \left( \frac{a_2 a_3}{V_1 a_1} + \frac{a_1 a_3}{V_2 a_2} - \frac{a_1 a_2}{V_3 a_3} \right) \sin \Phi, \quad (17)$$

а интегралы движения (15) принимают вид известных соотношений Мэнли-Роу [33]

$$V_1 N_1 + V_3 N_3 = C_1, \quad V_2 N_2 + V_3 N_3 = C_2,$$

$$V_1 N_1 - V_2 N_2 = C_3. \quad (18)$$

Здесь осуществлен переход от комплексных амплитуд  $A_j(x)$  к действительным амплитудам и фазам:  $A_j(x) = a_j(x) \exp(i\varphi_j(x))$ ,  $e_1 = e_2 = 1$ ,  $e_3 = -1$ ,  $\Phi = \varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3$  — обобщенная фаза триплета, а  $C_j$  — константы интегрирования, определяемые из граничных условий. Система (17) с учетом соотношений (18) интегрируется в эллиптических функциях.

Так, например, для полубесконечного слоя  $x \geq 0$  при  $\Phi = -\pi$  и  $a_1(0) = 0$ ,  $a_2(0) = a_{20}$ ,  $a_3(0) = a_{30}$

решение имеет вид

$$a_1^2 = \frac{V_3}{V_1} a_{30}^2 \operatorname{cn}^2(qx - K(s), s),$$

$$a_2^2 = a_{20}^2 + \frac{V_3}{V_2} a_{30}^2 \operatorname{cn}^2(qx - K(s), s),$$

$$a_3^2 = a_{30}^2 \operatorname{cn}^2(qx - K(s), s), \quad (19)$$

где  $s^2 = V_3 a_{30}^2 / (V_2 a_{20}^2 + V_3 a_{30}^2)$  — квадрат модуля интеграла ( $0 \leq s \leq 1$ ), а  $q = \Gamma \sqrt{(V_2 a_{20}^2 + V_3 a_{30}^2) / V_1 V_2 V_3}$ .

Решение (19) описывает периодический обмен энергией между взаимодействующими волнами триады с пространственным периодом  $\Lambda = 2K(s)/q$ , где  $K(s)$  — полный эллиптический интеграл первого рода. В зависимости от соотношения между амплитудами начальных возмущений  $a_{30}$  и  $a_{20}$  возможны два качественно различных варианта взаимодействий: если в точке  $x = 0$  энергия колебаний была запасена в основном в высокочастотной моде триплета, то с ростом  $x$  в интервале  $(0, \Lambda)$  она будет уменьшаться, передавая свою энергию в низкочастотные вторичные волны  $a_1(x)$ ,  $a_2(x)$ . Максимальная передача энергии произойдет в точке  $\Lambda$ , и затем процесс пойдет в обратном направлении (рис. 3,а). Если при  $x = 0$  энергия была запасена в одной из низкочастотных компонент триплета (например,  $a_{20} \gg a_{30}$ ), то обмен энергией между волнами триплета будет незначительным. В этом случае в системе распространяется практически одночастотное возмущение  $a_2(x)$ , а амплитуды других волн триады остаются малыми по сравнению с ней (рис. 3,б).

#### 5. Нелинейная эволюция триплета типа б

Наряду с триплетом типа а, состоящим из попутных волн, существуют триплеты типа б, в которых лишь две волны имеют общее направление (рис. 2,а-с, триады б). Рассмотрим один из таких триплетов, в котором высокочастотной является продольная волна (рис. 2,а, триада б). В этом случае волновые числа удовлетворяют соотношению  $k_1 < 0 < k_3 < k_2$ . Система эволюционных уравнений (14) сохранит свой

вид, и лишь знак групповой скорости  $V_1$  станет отрицательным. Формально останутся без изменений и интегральные соотношения (18), но, поскольку знаки групповых скоростей различные, равенства (18) будут показывать, что в системе имеет место эффект распадной неустойчивости коротковолновой моды  $k_2$ , а моды с волновыми числами  $k_1$  и  $k_3$  будут устойчивы. В данном случае роль неустойчивой моды  $\omega_3^2$  в триплете типа а будет играть коротковолновая мода  $k_2$ .

Однако в этом случае нельзя рассматривать задачу о распространении волн в полубесконечном слое  $x \geq 0$  — необходимо анализировать нелинейное взаимодействие волн в слое конечной ширины  $0 \leq x \leq L$ , когда граничные условия для волн  $k_2$  и  $k_3$ , бегущих в положительном направлении оси  $x$ , задаются в точке  $x = 0$ :  $a_2(0) = a_{20}$ ,  $a_3(0) = 0$ , а граничное условие для волны  $k_1$ , распространяющейся в противоположном направлении, задается в точке  $x = L$ :  $a_1(L) = a_{1L}$ . При этом решение системы (17) принимает вид

$$\begin{aligned} a_1^2 &= \frac{V_2}{V_1} a_{20}^2 \operatorname{sn}^2(qx - \mathbf{K}(s), s) - \frac{b^2}{V_1}, \\ a_2^2 &= a_{20}^2 \operatorname{sn}^2(qx - \mathbf{K}(s), s), \\ a_3^2 &= \frac{V_2}{V_3} a_{20}^2 \operatorname{cn}^2(qx - \mathbf{K}(s), s), \end{aligned} \quad (20)$$

где  $b^2 = V_2 a_{20}^2 \operatorname{sn}^2(qL - \mathbf{K}(s), s) - V_1 a_{1L}^2$ ,  $s^2 = V_2 a_{20}^2 / b^2$  — квадрат модуля эллиптического интеграла, а  $q = b\Gamma / \sqrt{-V_1 V_2 V_3}$  — параметр характеризующий пространственный метод волны.

Вообще говоря, для того чтобы система уравнений (17) описывала процессы возбуждения гиперзвуковых волн в кристаллах, в нее необходимо ввести источники накачки и диссипации, всегда присутствующие в реальных акустических резонаторах и определяющие пороги параметрического возбуждения системы. Принципиально это не представляет трудностей и, как показано в [32], может быть учтено в рамках развитого подхода.

В данной работе из простых модельных представлений об ангармоническом взаимодействии в одномерной цепочке анизотропных частиц выведены уравнения упругих и ориентационных волн в квазиодномерных кристаллах. Рассмотрены простейшие случаи нелинейного резонансного взаимодействия трех волн, принадлежащих различным дисперсионным ветвям. Помимо рассмотренных выше случаев трехволнового взаимодействия возможны варианты резонансных триад, когда высокочастотной является, например, ротационная волна (рис. 2, б). Тогда в зависимости от направлений волн задача исследования трехволновых взаимодействий может быть сведена к одной из двух рассмотренных выше. Для этого всего лишь

<sup>2</sup> В триплете а высокочастотная мода является одновременно и коротковолновой.

нужно в выражениях (13) у комплексных амплитуд и фаз поменять местами индексы 2 и 3. В настоящее время отсутствуют сколько-нибудь подробные и систематизированные сведения о микроконстантах ориентационных сред. Отдельные экспериментальные данные разбросаны по различным публикациям (см., например, [2,5,6,13,37]). Отчасти это связано с отсутствием теоретической базы для разработки регулярных методов определения параметров микроструктуры среды. Изложенная выше теория может послужить такой базой для разработки акустических методов определения материальных констант ориентационных сред.

Работа выполнена при поддержке Международного научного фонда (грант N R9B300) и Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 95-02-05360).

## Список литературы

- [1] А.И. Китайгородский. Молекулярные кристаллы. Наука, М. (1971). 424 с.
- [2] Е Гросс, А. Коршунов. ЖЭТФ **16**, 1, 53 (1946).
- [3] А.И. Ансельм, Н.Н. Порфирьева. ЖЭТФ **19**, 5, 438 (1949).
- [4] К.Р. Хуснутдинова. Вестн. МГУ. Сер. I. Математика, механика, 2, 71 (1992).
- [5] А. Askar. Int. J. Eng. Sci. **10**, 293 (1972).
- [6] А. Askar. Phys. Chem. Sol. **34**, 1901 (1973).
- [7] К.Н. Michel, E. Courtens. Phys. Rev. **B23**, 513 (1981).
- [8] W. Kinase, W. Makino, K. Takahashi. Ferroelectrics **64**, 173 (1985).
- [9] Е.С. Сыркин, С.Б. Феодосьев, О.Я. Шамфарова. ФНТ **17**, 6, 746 (1991).
- [10] E. Magyari. Z. Phys. B.: Cond. Matter **56**, 1 (1984).
- [11] В.Г. Каменский. ЖЭТФ **92**, 1, 97 (1987).
- [12] J. Pouget, A. Askar, G.A. Maugin. Phys. Rev. **B33**, 6320 (1986).
- [13] R.D. Gauthier, W.E. Jashman. Arch. Mech. **33**, 5, 717 (1981).
- [14] И.М. Жуковский, В.В. Рыбин. В кн.: Дисклинация и ротационная деформация твердых тел. ФТИ им. А.Ф.Иоффе АН СССР, Л. (1990). С. 44–88.
- [15] Е. Гросс. ДАН СССР **28**, 9, 788 (1940).
- [16] Я.И. Френкель. Кинетическая теория жидкостей. Изд-во АН СССР (1945). С. 89.
- [17] Э.Л. Аэро, Е.В. Кувшинский. ФТТ **2**, 7, 1399 (1960).
- [18] J. Pouget, G.A. Maugin. J. Elasticity **22**, Pt I, 135, Pt II, 157 (1989).
- [19] И.А. Кунин. Теория упругих сред с микроструктурой. Наука, М. (1975). 416 с.
- [20] J.L. Ericksen. Arch. Rat. Mech. Anal. **9**, 1 (1962).
- [21] F.M. Leslie. Arch. Rat. Mech. Anal. **28**, 265 (1968).
- [22] И.М. Лифшиц. ЖЭТФ **22**, 4, 475 (1952).
- [23] А.М. Косевич. Теория кристаллической решетки. Физическая механика кристаллов. Вища школа, Харьков (1988). 303 с.
- [24] Р. Труэлл, Ч. Эльбаум, Б. Чик. Ультразвуковые методы в физике твердого тела. Мир, М. (1972).

- [25] Дж. Такер, В. Рэмpton. Гиперзвук в физике твердого тела. Мир, М. (1975). 454 с.
- [26] А.И. Potarov, V.I. Erofejev. In: Nonlinear world. Singarure (1990). V. 2. P. 1197.
- [27] В.Б. Лисин, А.И. Потапов. Изв. вузов. Радиофизика **38**, 1–2, 146 (1995).
- [28] G.A. Maugin, S. Cadet. Int. Sci. **29**, 2, 243 (1991).
- [29] Г.К. Афанасьева. Кристаллография **13**, 6, 1024 (1968).
- [30] В.Е. Лямов. Поляризационные эффекты и анизотропия взаимодействия акустических волн в кристаллах. Изд-во МГУ, М. (1983). 224 с.
- [31] F.D. Tappert, G.M. Varma. Phys. Rev. Lett. **25**, 1108 (1970).
- [32] А.В. Пуговкин, С.М. Шандаров. ФТТ **16**, 6, 1761 (1974).
- [33] М.И. Рабинович, Д.И. Трубецков. Введение в теорию колебаний и волн. Наука, М. (1984). 432 с.
- [34] Д.А. Ковригин, А.И. Потапов. Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика **4**, 2, (1996).
- [35] Е. Додд, Дж. Эйлбек, Дж. Гиббон, Х. Моррис. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. Мир, М. (1988).
- [36] Теория солитонов / Под ред. С.П. Новикова. Наука, М. (1980).
- [37] Р.А. Сулейманов, М.Ю. Сеидов, Ф.М. Салаев. ФТТ **33**, 6, 1797 (1991).