

Динамика акустоэлектромагнитных солитонов как проявление более высокой нелинейности

© Г.Н. Бурлак, В.В. Гримальский, К. Ишкабулов

Киевский государственный университет,
252127 Киев, Украина

(Поступила в Редакцию 13 августа 1996 г.
В окончательной редакции 15 января 1997 г.)

Рассмотрено акустоэлектромагнитное взаимодействие в режиме, когда необходим одновременно учет трех механизмов: фотоупругости, квадратичной фотоупругости и упругой нелинейности. Показано, что при надкритических условиях в кристалле формируются акустические уединенные волны на частотах гармоники и субгармоники. Учет затухания и неидеальности отражения от границ не приводят к установлению какого-либо стационарного состояния: в системе развивается солитонная пространственно-временная динамика.

Нелинейным акустоэлектромагнитным волновым взаимодействием в твердых телах посвящено значительное число работ [1–4]. Особый интерес вызывают системы, в которых при наличии не зависящих от времени внешних условий формируется динамический режим, не приводящий к установлению какого-либо стационарного состояния даже после завершения переходных процессов. В настоящее время достаточно подробно изучены взаимодействия, связанные с каким-либо одним конкретным механизмом нелинейности, что в большинстве случаев оправдано индивидуальностью соответствующих резонансных условий. Это позволило изучить физическую картину ряда фундаментальных нелинейных взаимодействий и, в частности, формирование и взаимодействие уединенных волн различной природы [4–14]. Однако в ряде случаев, как показано далее, одновременный учет нескольких нелинейных механизмов является принципиально важным. Это особенно актуально для анизотропных кристаллов, в которых эффективные нелинейные модули существенно зависят от направления и поляризации взаимодействующих волн.

Рассмотрим параллельное акустоэлектромагнитное взаимодействие в оптически анизотропном кристалле типа LiNbO_3 . Пусть вдоль оси x распространяются обыкновенная и необыкновенная электромагнитные волны, взаимодействующие с акустической волной разностной частоты $\Omega = \omega_1 - \omega_2$, $K = k_1 - k_2 - \Delta k$, где Δk — малая расстройка. В [4] показана возможность возникновения при таком взаимодействии, обусловленном линейной фотоупругостью, солитонного режима. В [10] экспериментально наблюдалась локализация связанной оптической компоненты акустоэлектромагнитных солитонов.

Однако для волн определенных поляризаций ввиду кристаллографической симметрии эффективные компоненты фотоупругого тензора точно обращаются в нуль. В этом случае первой не исчезающей акустоэлектромагнитной нелинейностью служит нелинейная (квадратичная) фотоупругость. При этом условия связи имеют несколько более сложный вид $2\Omega_1 = \omega_1 - \omega_2$, $2K_1 = k_1 - k_2 - \Delta k$. Для надкритических возмущений в безграничной среде

такое взаимодействие также приводит к формированию солитонного импульса акустической волны, скорость перемещения которого имеет порядок скорости звука [11]. Однако уже при небольших отклонениях волнового вектора от данного направления необходимо учитывать оба механизма на равных условиях, поскольку хотя линейная фотоупругость еще невелика, но все же является нелинейностью более низкого порядка малости. Кроме того, поскольку амплитуды звуковых волн достигают значительной величины, необходимо учитывать также нелинейность звукового поля, приводящую к генерации гармоник и субгармоник.

Примечательно, что при $\Omega = \Omega_1/2$ возникает своеобразный мультирезонанс, когда вышеуказанные условия синхронизма удовлетворяются одновременно, поскольку частотные условия приобретают вид $\Omega = \omega_1 - \omega_2$, $2(\Omega/2) = \omega_1 - \omega_2$, $\Omega = 2(\Omega/2)$ (условия для волновых чисел аналогичны). Это приводит к связыванию разных взаимодействий и к принципиальной необходимости учета соответствующих механизмов нелинейности одновременно.

В настоящей работе рассмотрено акустоэлектромагнитное взаимодействие в режиме, когда необходим одновременный учет трех механизмов: фотоупругости, нелинейной фотоупругости и упругой нелинейности. Показано, что при определенных условиях в кристалле формируются акустические уединенные волны на разных частотах. Учет затухания и неидеальности отражения не приводит к установлению какого-либо стационарного состояния: в системе возникает солитонный динамический режим.

Рассмотрим ограниченный кристалл длины L с коэффициентами отражения (при $x = 0, L$) $R_m(0, L)$ для акустической волны на частоте Ω и соответственно $R_e(0, L)$ для акустической волны на частоте $\Omega/2$. Отражением и поглощением электромагнитных волн, которое в области прозрачности мало, пренебрегаем.

Уравнения движения состоят из уравнений Максвелла и уравнений теории упругости. Связанную с акустоэлектромагнитной нелинейностью поправку к свободной

энергии запишем в следующем виде:

$$\Delta F = -\frac{1}{8\pi} a_{ijkl} E_i E_j U_{kl} + \frac{1}{2} b_{ijkml} U_{ij} U_{kl} U_{mn} + \frac{1}{8\pi} g_{ijklmn} E_i E_j U_{kl} U_{mn},$$

где a_{ijkl} , b_{ijkml} , g_{ijklmn} — модули линейной фотоупругости, упругой нелинейности и квадратичной фотоупругости, перенормированные с учетом линейного пьезоэффекта.

Полученная при помощи обычной методики система уравнений для медленно меняющихся амплитуд волн дополняется уравнением для обратных (отраженных) акустических волн, которые ввиду условий синхронизма не взаимодействуют с полем. Из-за незначительного уменьшения амплитуды звука вследствие диссипации влиянием упругой нелинейности для отраженной волны пренебрежем. Динамика процесса рассматривается в звуковом временном масштабе, поэтому временными производными в уравнениях для электромагнитных амплитуд пренебрегаем по малому параметру $s/c \sim 10^{-5} \ll 1$, где s — скорость звука, c — скорость света в кристалле. Полученная безразмерная система динамических уравнений для комплексных амплитуд волн имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \zeta} A_1 &= i [\beta_1 A_2 A_3^2 - 2\rho_1 A_1 (|A_3|^2 + |A_4|^2)] - \beta A_2 A_4, \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} A_2 &= i [\beta_1 A_2 A_3^{*2} - 2\rho_2 A_2 (|A_3|^2 + |A_4|^2)] + \beta A_1 A_4^*, \\ \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{\partial}{\partial \tau} + \gamma \right) A_3 &= i [\beta_1 A_1 A_2^* A_3^* - A_3 (\rho_1 |A_1|^2 + \rho_2 |A_2|^2 - 0.5 \Delta k)] + N A_3^* A_4, \\ \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{\partial}{\partial \tau} + 4\gamma \right) A_4 &= 2i [A_4 (\rho_1 |A_1|^2 + \rho_2 |A_2|^2 - 0.5 \Delta k)] - N A_3^2 + \beta A_1 A_2^* \end{aligned} \quad (1)$$

с граничными и начальными условиями $A_3(0, \tau) = f_3(\tau) R_e^2 \exp(-\gamma) A_3(0, \tau - 1)$, $A_4(0, \tau) = f_4(\tau) + R_m^2 \exp(-4\gamma) A_4(1, \tau - 1)$, $A_3(\zeta, 0) = 0$, $R_e^2 = R_e(0) R_e(1) < 1$, $R_m^2 = R_m(0) R_m(1) < 1$. Здесь β_1 , β , N , $\rho_{1,2}$ — безразмерные коэффициенты связи [4,9,11], $\gamma = \Gamma L$, $R_e(0, 1)$ и $R_m(0, 1)$ — коэффициенты отражения акустических волн на частотах $\Omega/2$ и Ω при $\zeta = 0, 1$ соответственно, Γ — коэффициент поглощения звука, $\zeta = x/L$, $\tau = ts/L$ — безразмерные координата и время.

Отметим, что при значительной амплитуде накачки из-за условия $\rho_{1,2} \neq 0$ фазовая скорость звука приобретает добавку, пропорциональную квадрату поля. Однако, учитывая, что в случае $\rho_1 = \rho_2$ система (1) обладает интегралом движения $A_1^2 + A_2^2 = 1$, нетрудно видеть, что и при $\rho_1 \approx \rho_2$, выбирая $\Delta k = (\rho_1 + \rho_2)/2$, эту добавку удастся скомпенсировать, в результате чего резонансные условия становятся оптимальными.

Заметим, что $\beta_1/\beta \sim E_0$ (E_0 — входная амплитуда волны накачки), поэтому с ростом амплитуды накачки влияние нелинейности фотоупругости усиливается.

Рассмотрим случай, когда электромагнитная волна накачки имеет более высокую частоту ($\omega_1 > \omega_2$), причем $f_1(\tau) = 1$, $f_2(\tau) = 0$ (волна на частоте ω_2 рождается в ходе взаимодействия). На начальном этапе взаимодействия амплитуды акустических волн малы, при этом нелинейностью фотоупругости можно пренебречь.

Для малой начальной затравки (что эквивалентно пренебрежению слагаемыми, квадратичными по амплитудам звука (1)) относительная фаза волн быстро устанавливается, и амплитуды можно считать вещественными. В этом случае с учетом соотношений $A_1^2 + A_2^2 = 1$, $A_1 = \cos(\beta\varphi)$, $A_2 = \sin(\beta\varphi)$, $A_3 = \beta \partial\varphi/\partial\zeta$ порядок системы (1) можно понизить. После исключения обратной волны замкнутое уравнение для A_3 принимает вид

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{\partial}{\partial \tau} + \gamma \right) A_3 &= 0.5 \sin(2\beta\varphi), \\ \beta\varphi &= \int_0^\zeta A_3(\zeta, \tau) d\zeta. \end{aligned} \quad (2)$$

Отметим, что заменой $u, v = b(\zeta - \tau) \pm (1/b) \int g^2(\tau) d\tau$, $\psi = 2\beta\varphi$, $b = \text{const}$ систему (2) можно свести к уравнению типа синус-Гордона

$$\begin{aligned} \partial^2 \psi / \partial u^2 - \partial^2 \psi / \partial v^2 + [\gamma b / g^2(\tau)] \\ \times (\partial \psi / \partial u - \partial \psi / \partial v) = \sin(\psi), \end{aligned} \quad (3)$$

что позволяет при $\gamma = 0$ интерпретировать стационарные возбуждения в системе как солитоны. Однако в ограниченной среде это не приводит к упрощению, поскольку краевые условия при этом следует выполнять на бегущих границах. К тому же наличие поглощения и неидеальность отражения не позволяют воспользоваться свойствами, связанными с полной интегрируемостью этого уравнения [12,13]. На сложность динамики указывает также то обстоятельство, что в режиме неустойчивости при $\gamma = 0$ данная модель имеет помимо солитонов и нестационарные решения с автомодельностью $\sim (u^2 - v^2)$, отличной от автомодельности бегущей волны $\sim (u \pm v)$ [13].

Из (2) определим условия неустойчивости, полагая $|A_3|, |\beta\varphi| \ll 1$ и $\sim \exp(i(\omega\tau - k\zeta))$. После несложных вычислений пороговое условие можно записать в виде

$$E_0^2 > E_{th}^2 = (\alpha / K k_2 L^2) (2\Gamma L + \ln R_m^{-2}) (\Gamma L + \ln R_m^{-2}), \quad (4)$$

где величина α зависит от параметров кристалла.

Из (4), в частности, следует, что при уменьшении отражения порог имеет логарифмическую особенность, что связано с отсутствием собственных нелокализованных возбуждений при $R_m^2 = 0$ из-за выхода волн из области взаимодействия.

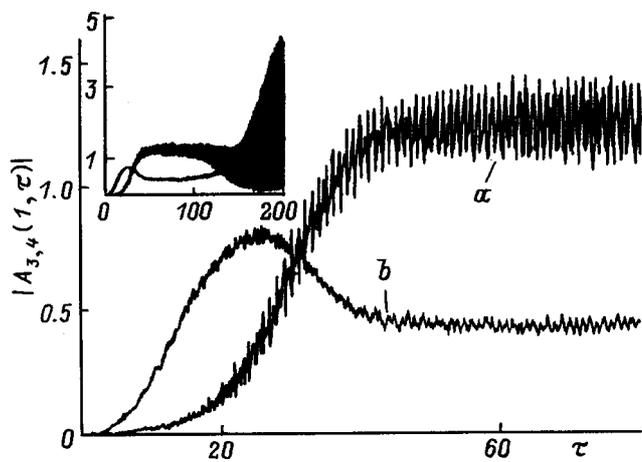


Рис. 1. Зависимость амплитуд акустических волн $|A_{3,4}(1, \tau)|$ на выходе от времени τ в надкритическом режиме. *a)* $|A_3(1, \tau)|$ — звук на частоте $\Omega/2$, *b)* $A_4(1, \tau)$ — звук на частоте Ω . На вставке показаны соответствующие зависимости при больших временах (черный фон отвечает мощным осцилляциям амплитуд).

На начальном этапе, когда амплитуды звуковых волн определяются малой шумовой затравкой, главную роль играет связь с электромагнитным полем посредством линейной фотоупругости. Однако с нарастанием амплитуд волн начинают проявляться нелинейность фотоупругости и упругая нелинейность. На этом этапе необходимо учитывать все механизмы нелинейности на равных условиях.

Поскольку в общем случае получить аналитическое решение нелинейной системы (1) с граничными условиями весьма сложно, в работе был выполнен компьютерный эксперимент путем непосредственного решения амплитудных уравнений с учетом взаимовлияния различных механизмов нелинейности, а также поглощения и неидеальности отражения от границ. Это позволило в единых рамках исследовать все стадии взаимодействия от начальной неустойчивости до развитого нелинейного режима. В типичной ситуации с границы в кристалл вводилась волна накачки постоянной амплитуды, взаимодействующая с шумовой звуковой затравкой.

Для расчетов шумовая затравка моделировалась равномерно распределенной на интервале $[0, f_{30}]$ случайной величиной ($f_{30} = 0.05$) (результаты оказались нечувствительными к типу шума). Расчет проводился при различных коэффициентах отражения волн по схеме высокого порядка, точность контролировалась путем уменьшения шага сетки. Результаты представлены на рис. 1, 2 для параметров $\beta = 1$, $\beta_1 = 1.5$, $\rho_1 = 1.05$, $\rho_2 = 0.95$, $R_e^2 = 0.8$, $R_m^2 = 0.5$, $\gamma = 0.015$.

Как показал расчет, рассматриваемая система обнаруживает весьма разнообразное поведение в зависимости от параметров задачи. Поскольку граничная или начальная шумовая затравка выбиралась достаточно малыми,

то в докритических условиях входной и выходной сигналы практически идентичны.

Как видно из рис. 1, 2, при взаимодействии четко проявляются три этапа. На первом этапе в надкритических условиях в результате параметрической неустойчивости амплитуда звука на частоте Ω нарастает и происходит возбуждение звукового солитона, который замедляется вблизи выхода, формируя стационарное пространственно неоднородное состояние. Ввиду значительной величины амплитуды звука это приводит к необходимости учета упругой нелинейности, приводящей к генерации акустических гармоник и субгармоник. Гармоники частоты Ω не находятся в синхронизме с полем и, как показал расчет, не оказывают существенного влияния на процесс. Генерация же субгармоники на частоте $\Omega/2$ существенна, поскольку эта волна будет находиться в резонансе с полем из-за нелинейности фотоупругого взаимодействия. Однако ее подкачка приводит к неустойчивости только при выполнении двух условий, первое из которых связано с поглощением, а второе — с превышением критической энергии звука [11,14].

Поскольку затухание звука на высоких частотах пропорционально Ω^2 , первое условие в режиме неустойчивости заведомо выполняется. Второе же условие выполняется не сразу, а после накопления энергии субгармоники. В надкритическом режиме в системе начинается сложная динамика, приводящая к формированию быстро сжимающихся импульсов, покидающих

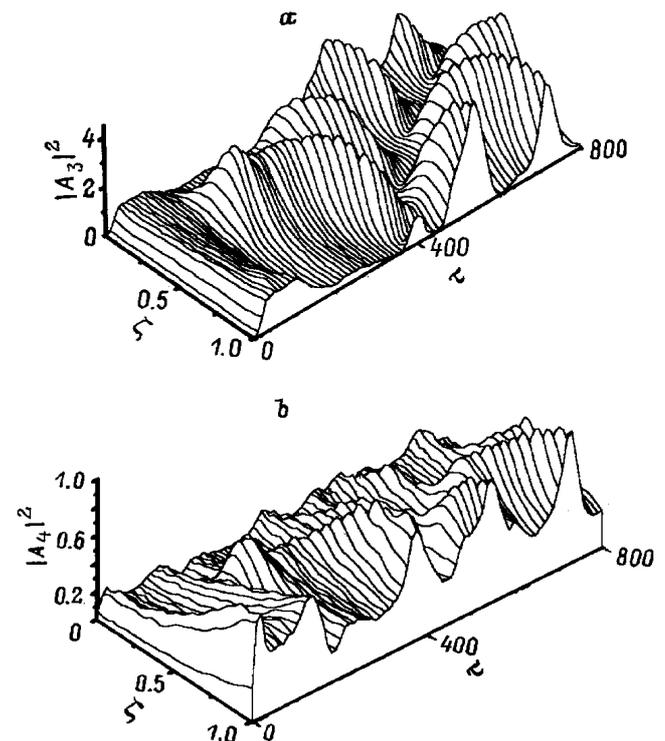


Рис. 2. Пространственно-временная динамика амплитуд $|A_{3,4}(\zeta, \tau)|^2$ в надкритическом режиме. *a)* $|A_3(\zeta, \tau)|$ — звук на частоте $\Omega/2$; *b)* $A_4(\zeta, \tau)$ — звук на частоте Ω .

область взаимодействия. Отметим, что при $\tau \rightarrow \infty$ динамика формирующегося на частоте $\Omega/2$ солитона определяется спектром стационарных значений энергии

$$W(\tau) = \int_0^{\zeta} |A_3(\zeta, \tau)|^2 d\zeta = W_i(\gamma), \quad i = 0, 1 \dots, \text{ поэтому}$$

такое состояние чувствительно к значению коэффициентов отражения R_e . Здесь W_i удовлетворяют уравнению $2\gamma W = \sin^2 W$, имеющему в зависимости от параметра γ одно или несколько (четное число) корней. Если обозначить состояние с $W = 0$ через W_0 , то четные и нечетные корни отвечают устойчивым и неустойчивым стационарным значениям соответственно (W_1 — первое неустойчивое значение). При этом неустойчивость наступает при $W > W_1$.

Таким образом, на втором этапе происходит распад состояния, сформированного линейно-фотоупругим взаимодействием, а именно перекачка акустического импульса с частотой Ω в акустическую субгармонику с частотой $\Omega/2$. Начиная с этого момента, амплитуда субгармоники быстро нарастает и в кристалле формируется гигантский самосжимающийся импульс. Это отвечает потере устойчивости стационарного состояния и возникновению динамического режима (рис. 2).

Эффективное взаимодействие электромагнитных волн с акустической субгармоникой происходит на третьем этапе. Поскольку источником энергии для обеих акустических волн служит электромагнитная волна накачки, в системе развивается сложная динамика, обусловленная конкуренцией различных нелинейных процессов. Однако из-за сильной пространственной локализации солитонов и малости перекрытия их амплитуд это не приводит к подавлению какого-либо одного процесса. Более существенным оказывается взаимодействие, связанное с изменением фаз волн, что приводит к локальному выходу из режима фазового синхронизма. При этом из-за расстройки относительных фаз и выхода соответствующей акустической волны из режима усиления происходит изменение скорости и формы импульсов.

В результате в кристалле на частоте субгармоники формируются быстро нарастающие и сжимающиеся уединенные волны, оббегающие область взаимодействия. В системе сосуществуют акустические солитоны на частоте Ω и самосжимающиеся импульсы на частоте $\Omega/2$, связанные через общую волну накачки (рис. 2).

Дальнейший расчет показывает отсутствие тенденций не только к установлению стационарного состояния, но и к "выживанию" только какого-либо одного солитона за счет другого. Это обусловлено тем, что, хотя и нелинейная фотоупругость имеет более высокий порядок малости, однако она создает такую локальную расстройку электромагнитных фаз, что инкремент усиления импульсов, связанных с линейной фотоупругостью, периодически резко снижается, и тем самым их амплитуда стабилизируется.

Таким образом, даже при наличии линейной фотоупругости учет нелинейности следующего порядка может

быть принципиально важен, поскольку при больших временах он коренным образом меняет пространственно-временную динамику волн.

Выполним численные оценки. Учтем, что соответствующие нелинейные модули пропорциональны диэлектрической проницаемости кристалла [15,16], поэтому будем ориентироваться на параэлектрики, где в СВЧ-диапазоне данные нелинейные модули еще сохраняют свои аномально большие статические значения. Так, для BaTiO_3 , который при температурах меньше -90°C обладает симметрией $3m$ [17], находим, что при $\epsilon = 3 \cdot 10^3$, $l_s = 5 \text{ cm}$, $\omega_1 = 10^{12} \text{ s}^{-1}$, $\Omega = 10^8 \text{ s}^{-1}$ для возбуждения акустических импульсов необходимая мощность накачки составляет 0.6 MW/cm^2 , т.е. данный эффект доступен экспериментальному наблюдению.

Список литературы

- [1] А.П. Сухоруков. Нелинейные волновые взаимодействия в оптике и радиофизике. Наука, М. (1988).
- [2] Ю.В. Гуляев, Г.Н. Шкердин. ЖЭТФ **7**, 4(10), 1396 (1979).
- [3] V.I. Pustovoi. World Congress on Ultrasonics. Berlin (1995). P. 208.
- [4] Г.Н. Бурлак, В.В. Гримальский, Н.Я. Коцаренко. ЖЭТФ **90**, 1487 (1986).
- [5] M.C. Cross, P.C. Hogenberg. Rev. Mod. Phys. **65**, Pt. 2, 851 (1993).
- [6] D.I. Abarbanel, R. Brown, J.J. Sidorovich, L.S. Tsimring. Rev. Mod. Phys. **65**, 1331 (1993).
- [7] G. Giacomeli, R. Meucci, A. Politi, F.T. Arecchi. Phys. Rev. Lett. **73**, 1099 (1994).
- [8] F.T. Arecchi, G. Giacomelli, A. Lapucci, R. Meucci. Phys. Rev. **A45**, 4225 (1992).
- [9] Г.Н. Бурлак, В.В. Гримальский, Н.Я. Коцаренко. ФТТ **27**, 3, 631 (1985).
- [10] А.С. Щербаков, И.Б. Позднов. Письма в ЖТФ **20**, 12 (1994).
- [11] Г.Н. Бурлак. ЖЭТФ **96**, 1607 (1990).
- [12] В.Е. Захаров, С.В. Манаков, С.П. Новиков и др. Теория солитонов: метод обратной задачи. Наука, М. (1980).
- [13] Дж.Л. Лэм. Введение в теорию солитонов. Мир, М. (1983).
- [14] Г.Н. Бурлак. Письма в ЖЭТФ **59**, 9, 625 (1994).
- [15] С.И. Пекар. ЖЭТФ **49**, 3, 621 (1965).
- [16] С.И. Пекар, А.А. Демиденко, А.П. Здебский и др. ДАН СССР **230**, 5, 1081 (1976).
- [17] Акустические кристаллы / Под ред. Шаскольской. Наука, М. (1982). 356 с.