

## Аномалия лавинного перемешивания гранулированных материалов при половинном заполнении

© С.Н. Дороговцев

Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе Российской академии наук, 194021 Санкт-Петербург, Россия

(Поступила в Редакцию 11 февраля 1997 г.)

Две фракции гранулированного материала перемешиваются в цилиндре, медленно вращающемся вокруг своей продольной оси, расположенной горизонтально. Цилиндр заполнен не полностью, и в каждый момент времени перемешивание происходит лишь на свободной поверхности материала. Показано, что при половинном заполнении цилиндра перемешивания до однородного состояния не произойдет. Вблизи этой критической точки обратное характерное время перемешивания пропорционально  $\delta^2 \ln(|\delta|^{-1})$ , где  $\delta$  — отклонение заполнения от половинного.

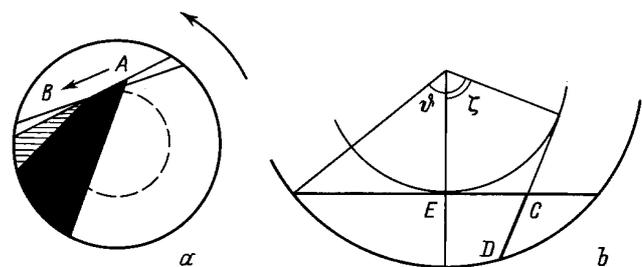
1. Пересыпание гранулированных материалов в медленно вращающемся барабане [1–9] — один из широко используемых способов изучения самоорганизованного критического поведения [10–12]. Поэтому и процессы перемешивания разных фракций в такой системе привлекают к себе особое внимание (см. эффектную иллюстрацию на обложке мартовского номера за 1995 г. журнала "Nature" [13]). При этом, как показано далее, возникают прямые аналогии с классическими системами, для которых можно ввести понятие центра проскальзывания фазы (например, с тонкими пленками сверхпроводников второго рода [14,15]). Кинетику такого перемешивания удастся описать, используя лишь простые, по сути дела геометрические, соображения [16,17]. В настоящей работе мы покажем, насколько необычным образом идет перемешивание в области особой точки — половинного заполнения барабана.

Эксперимент [13] наиболее ярко демонстрирует процесс так называемого лавинного перемешивания. В медленно вращающемся вокруг своей продольной оси цилиндр засыпаны две фракции гранулированного материала. Поле тяготения направлено перпендикулярно оси вращения. Цилиндр заполнен не полностью, так что сверху остается свободное пространство. Считается, что гранулы могут пересыпаться только тогда, когда они выходят на свободную поверхность. Во всех же остальных точках материала они не перемещаются друг относительно друга и вращаются вместе с цилиндром (рис. 1, *a*). В результате при вращении цилиндра по свободной поверхности непрерывно сходят лавины, в которых перемешиваются фракции. Такое перемешивание и называется лавинным (avalanche mixing) [13], хотя его естественнее было бы называть перемешиванием на поверхности. Ясно, что если цилиндр заполнен более чем наполовину, при таком типе перемешивания центральная область материала (выделена штриховой линией на рис. 1, *a*) не перемешивается никогда. При менее чем половинном заполнении должен перемешиваться весь материал.

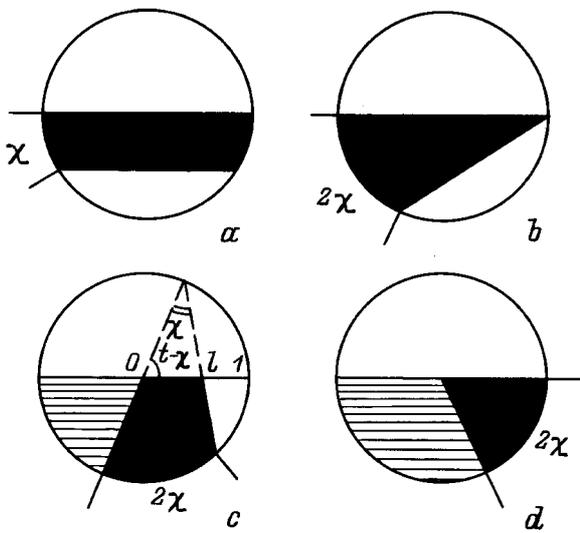
Если цилиндр вращается адиабатически медленно, то свободная поверхность плоская и все время расположена

под углом трения к горизонтали (на самом деле этот угол незначительно флуктуирует со временем, но, так как эти флуктуации малы [13], мы ими пренебрежем). Пусть, как в эксперименте [13], цилиндр плоский, так что это, скорее, диск (его еще называют двумерным цилиндром), поэтому нам не придется изучать продольные перемещения гранул.

Поскольку в окончательный результат не войдут угол трения, радиус цилиндра и скорость его вращения, мы можем далее изображать свободную поверхность горизонтальной, положить радиус цилиндра равным единице и считать, что время  $t$  — просто угол поворота цилиндра. Будем считать, что гранулы разных фракций различаются только цветом. В начальный момент времени черная фракция расположена сверху, белая — внизу. Гранулы



**Рис. 1.** Схема лавинного перемешивания. *a* — расположение фракций в один из моментов времени. При бесконечно малом повороте цилиндра гранулы разных фракций из сектора *A* пересыпаются в сектор *B*, перемешиваясь. Гранулы, не находящиеся на свободной поверхности материала, не перемещаются относительно друг друга и поворачиваются как единое целое вместе с цилиндром. Перемешанный материал показан серым цветом. Здесь и далее разные степени перемешивания не показаны. *b* — один из моментов времени  $t > 2\vartheta - \chi$  в случае, когда цилиндр заполнен менее чем наполовину. Углы раствора  $\vartheta$  и  $\chi$  характеризуют соответственно объем всего материала в цилиндре и объем чистой черной фракции в начальный момент времени (см. также рис. 2, *a*). Концентрация черного материала  $\rho(\zeta, t)$  во всех точках каждой отдельной касательной типа *CD* одинакова, в частности концентрация черного материала на левой половине свободной поверхности —  $\rho(0, t)$ . Распределение фракций на рисунке не показано.



**Рис. 2.** Картины расположения фракций при половинном заполнении цилиндра в различные моменты времени. *a* — расположение фракций в начальный момент  $t = 0$ , *b* —  $t = \chi$ , *c* —  $\chi < t < \pi - \chi$ , *d* —  $t = \pi - \chi$ .

малы, и состояние отдельной точки материала будем описывать величиной  $\rho$  — концентрацией черного материала в данном месте (там, где весь материал черный,  $\rho = 1$ , а там, где весь белый,  $\rho = 0$ ). Пусть цилиндр вращается против часовой стрелки.

Рассмотрение начнем со случая наполовину заполненного цилиндра (рис. 2). Долю черной фракции удобно характеризовать соответствующим углом раствора  $\chi$ . Ось вращения цилиндра лежит на свободной поверхности. Поэтому ясно, что если в какой-то момент во всех точках хотя бы одного радиус-вектора находится чистая фракция, то эта фракция уже никогда не перемещается. Действительно, после того как соответствующий радиус-вектор окажется на правой половине свободной поверхности, пересыпятся гранулы одного цвета, и на левой половине свободной поверхности появится та же фракция. Далее процесс будет повторяться с периодом  $\pi$ , равным половине периода вращения цилиндра.

Из рис. 2, на котором показаны картины расположения фракций в некоторые моменты времени, видно, что к моменту  $t = \pi - \chi$  черная фракция занимает сектор, ограниченный двумя радиус-векторами (рис. 2, *d*). Следовательно, область с чистой черной фракцией никогда не исчезнет, и черная фракция будет периодически появляться на левой половине свободной поверхности

$$\rho(\varphi = 0, t) = 1, \quad 0 \leq t \leq \chi, \quad \pi k - \chi \leq t \leq \pi k + \chi, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (1)$$

Угол  $\varphi$  задает отклонение радиус-вектора от левой половины свободной поверхности. Таким образом, при половинном заполнении полного перемешивания не произойдет никогда.

Чтобы было проще описать эволюцию распределения фракций, будем считать, что при пересыпании гранул по свободной поверхности с ее правой на левую половину (рис. 1, *a*) материал перемешивается полностью, т.е. до однородного состояния. Поясним: на правой половине свободной поверхности может быть неоднородное распределение фракций, а во всех точках ее левой половины концентрация  $\rho$  будет одинаковой. Очевидно, что тогда после момента времени  $t = \pi - \chi$  (рис. 2, *d*) на разных радиус-векторах значения  $\rho$  могут различаться, но во всех точках каждого отдельного радиус-вектора концентрация  $\rho$  должна быть одинаковой.

Понятно, что при таком предположении процесс лавинного перемешивания развивается самым быстрым из всех возможных способов. В принципе, при половинном заполнении нетрудно получить решение, даже если не предполагать, что гранулы, пересыпаясь по поверхности, перемешиваются до однородного состояния. Мы, однако, используем введенное предположение, поскольку оно очень хорошо описывает реальный эксперимент [13,16] и позволяет не вникать в тонкости, связанные с конкретной структурой гранул.

После того как радиус-вектор, во всех точках которого  $\rho$  одинакова, выйдет на правую половину свободной поверхности, на всех точках левой половины свободной поверхности снова будет то же самое значение  $\rho$ . Таким образом, картина повторяется с периодом  $\pi$ :

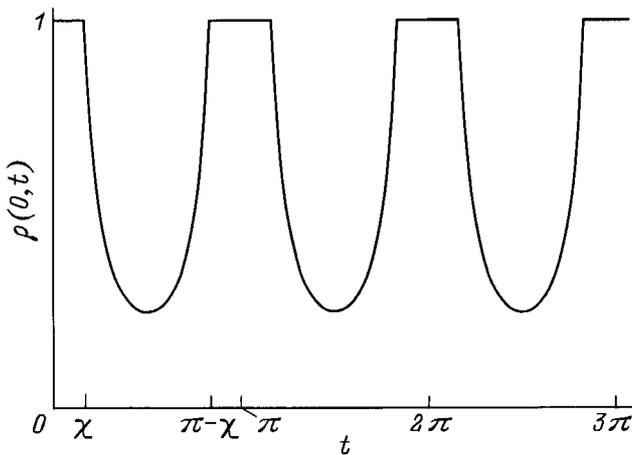
$$\rho(0, t + \pi) = \rho(0, t), \quad (2)$$

и поэтому нам достаточно рассмотреть промежуток времени  $\chi < t < \pi - \chi$  (рис. 2, *c*). Заметим, что, поскольку в объеме материала перемешивания не происходит, эволюция значения концентрации  $\rho(0, t)$  на левой половине свободной поверхности полностью описывает динамику нашей системы.

Найдем  $\rho(0, \chi \leq t \leq \pi - \chi)$ . Для этого в момент времени  $t$  повернем цилиндр на малый угол  $dt$ . Тогда, как показано, например, на рис. 1, *a*, весь материал из сектора *A* пересыпется в сектор *B*, и полное количество черной фракции в левом секторе после пересыпания будет таким же, как и в правом до пересыпания. Сравнивая эти величины в ситуации, показанной на рис. 2, *c*, получим

$$\begin{aligned} dt \frac{1}{2} \rho(0, t) &= dt \int_0^1 dr r \rho_{\text{right}}(r, t) \\ &= dt \frac{1}{2} l^2 \cdot 1 = dt \frac{\sin^2 \chi}{2 \sin^2 t}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь интегрируется концентрация черной фракции на правой половине свободной поверхности в момент времени  $t$ . Линейная переменная  $r$  пробегает значения от середины свободной поверхности ( $r = 0$ ) до стенки цилиндра ( $r = 1$ ). В данном случае на правой половине присутствуют как чистая черная  $\rho_{\text{right}}(0 < r < l, t) = 1$ , так



**Рис. 3.** Зависимость плотности черной фракции на левой половине свободной поверхности (см. рис. 2) от времени при половинном заполнении цилиндра.

и чистая белая  $\rho_{\text{right}}(l < r < 1, t) = 0$  фракции (рис. 2, c). Мы также воспользовались обычной связью между длиной сторон и углами треугольника, показанного штриховыми линиями на рис. 2, c:  $l / \sin \chi = 1 / \sin[\chi + (t - \chi)]$ . В результате

$$\rho(0, \chi \leq t \leq \pi - \chi) = \sin^2 \chi / \sin^2 t. \quad (4)$$

Воспользовавшись соотношениями (1), (2) и (4), получим периодическую зависимость, представленную на рис. 3.

2. Предыдущие выводы относятся к случаю строго половинного заполнения. В остальных случаях весь материал (кроме находящегося в центральной части цилиндра, если тот заполнен более чем наполовину) в конце концов окажется равномерно перемешанным. Покажем, как будет происходить перемешивание вблизи половинного заполнения.

Пусть, например, цилиндр заполнен менее чем наполовину. Относительный объем пространства, который занимает гранулированный материал, удобно характеризовать углом раствора  $\vartheta$  (рис. 1, b). Как и в предыдущем разделе, потребуем, чтобы гранулы разных фракций скатываясь по свободной поверхности, перемешивались до однородного состояния. Тогда нетрудно получить уравнение для  $\rho(0, t)$ . Нас прежде всего будет интересовать, через какое время материал перемешается, так что достаточно исследовать асимптотическое поведение  $\rho(0, t)$  на больших временах. Поэтому мы ограничимся рассмотрением достаточно больших времен ( $t > 2\vartheta - \chi$ ), на которых во всех точках каждой отдельной касательной к окружности, показанной на рис. 1, b, концентрация черной фракции одинакова (см., например, касательную CD на этом рисунке). Такие касательные фиксируются углом  $\zeta$ , и концентрация черной фракции в точках соответствующей касательной в момент времени  $t$  обозначается  $\rho(\zeta, t)$ .

Для рассматриваемой системы можно ввести понятие центра проскальзывания фазы [14,15]. Для описания расположения гранул мы фактически использовали только одну величину — угол между радиус-вектором соответствующей касательной и нормалью к свободной поверхности (рис. 1, b). Этот угол — ”фаза” гранул — испытывает скачок всякий раз, когда они скатываются по свободной поверхности. Поэтому в нашей задаче роль своеобразного ”центра проскальзывания фазы” играет свободная поверхность гранулированного материала. В работе [16] показано, к каким выводам приводит непосредственное использование такой аналогии с классическими системами с центрами проскальзывания фазы [14,15]: джозефсоновскими структурами, тонкими пленками сверхпроводников второго рода и т. п.

Снова в момент времени  $t$  повернем цилиндр на малый угол  $dt$ . Тогда справа налево пересыпется следующее количество черного материала:

$$\begin{aligned} dt \frac{\sin^2 \vartheta}{2} \rho(0, t) &= dt \int_0^{\sin \vartheta} dr r \rho_{\text{right}}(r, t) \\ &= dt \int_0^{2\vartheta} d\zeta \frac{dr(\zeta)}{d\zeta} r(\zeta) \rho_{\text{right}}(r(\zeta), t) \\ &= dt \frac{\cos^2 \vartheta}{2} \int_0^{2\vartheta} d\zeta \frac{d \text{tg}^2(\zeta/2)}{d\zeta} \rho(\zeta, t). \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь первое интегрирование  $\int_0^{\sin \vartheta} dr$  проводится от середины свободной поверхности до стенки цилиндра,  $r(\zeta)$  — координата точки пересечения касательной, фиксируемой углом  $\zeta$ , со свободной поверхностью (отрезок EC на рис. 1, b), причем  $r(\zeta) = \cos \vartheta \text{tg}(\zeta/2)$ , так что  $r(2\vartheta) = \sin \vartheta$ . Таким образом, ясно, что концентрация черной фракции на правой половине свободной поверхности  $\rho_{\text{right}}(r(\zeta), t) = \rho(\zeta, t)$ . Теперь учтем, что, как следует из отсутствия перемешивания гранул в точках, не принадлежащих свободной поверхности,  $\rho(\zeta, t) = \rho(0, t - \zeta)$ , и получим из (5) искомое уравнение для  $\rho(0, t)$

$$\rho(0, t) = \text{ctg}^2 \vartheta \int_0^{2\vartheta} d\zeta \rho(0, t - \zeta) \frac{\sin(\zeta/2)}{\cos^3(\zeta/2)}. \quad (6)$$

Таким образом, сложная динамическая задача свелась к исследованию динамики нульмерной системы.

Искать решение уравнения (6) будем в виде суммы экспонент типа  $e^{z\xi}$ , где  $z$  — константы. Из-за линейности уравнения достаточно подставить в (6)  $\rho(0, t) = e^{z\xi}$ . В результате получим

$$1 = 2 \text{ctg}^2 \vartheta \int_0^{\vartheta} d\xi e^{-2z\xi} \frac{\sin \xi}{\cos^3 \xi}. \quad (7)$$

Чтобы определить характерное время перемешивания, достаточно найти самый близкий к нулю ненулевой корень трансцендентного уравнения (7). При половинном заполнении ( $\vartheta = \pi/2$ ) из уравнения (6) следует, что, как было показано в предыдущем разделе,  $\rho(0, t) = \rho(0, t - \pi)$ . Поэтому вблизи половинного заполнения этот корень удобно представить в виде  $z = 2i + s$ , где  $s$  — малая добавка. После подстановки этого соотношения в уравнение (7) имеем

$$1 = 2 \operatorname{ctg}^2 \vartheta \int_0^{\vartheta} d\xi e^{-2s\xi} \{4 \sin 2\xi + \operatorname{tg}^3 \xi - 7 \operatorname{tg} \xi + 4i(\cos 2\xi + \operatorname{tg}^2 \xi - 1)\}. \quad (8)$$

Теперь введем малое отклонение  $\delta$  от половинного заполнения  $\vartheta = \pi/2 - \delta$ , после чего можно разложить  $e^{-2s\xi}$ , учитывая малость  $s$ . Далее с помощью интегрирования по частям легко выделить сингулярные при  $\delta \rightarrow 0$  члены, после чего остается оценить оставшиеся простые интегралы и сравнить коэффициенты при членах с равными степенями  $\delta$ .

Здесь мы опустим рутинные вычисления и сразу же приведем ответ для ближайшего к нулю корня

$$z = 2i + \frac{8\delta}{\pi}i - \frac{16\delta^2}{\pi} [\ln(1/|\delta|) - 5/2] + \dots \quad (9)$$

(мы не выписали член  $O(\delta^2)$  мнимой части  $z$ ). Таким образом, на больших временах процесс перемешивания происходит следующим образом:

$$\rho(0, t) = \rho_{\infty} + C_0 \exp\{-t/\tau\} \cos\left\{\frac{2\pi}{T}t + \varphi_0\right\}, \quad (10)$$

где  $\rho_{\infty}$  — концентрация черной фракции в перемешанном до однородного состояния материале,  $C_0$  и  $\varphi_0$  — постоянные, зависящие от начальных условий, т.е. от количества и расположения чистой черной фракции в начальный момент,  $\tau$  — искомое характерное время перемешивания,

$$\tau^{-1} = \frac{16\delta^2}{\pi} [\ln(1/|\delta|) - 5/2]. \quad (11)$$

$T = \pi - 4\delta$  — период колебаний концентрации черной фракции (10).

Аналогичные вычисления легко можно проделать и в случае более чем половинного заполнения ( $\vartheta > \pi/2$ ). При этом удобно ввести угол  $\theta \equiv \pi - \vartheta$ . В таком случае уравнение для  $\rho(0, t)$  принимает следующий вид:

$$\rho(0, t) = \operatorname{ctg}^2 \theta \int_0^{2\theta} d\zeta \rho(0, t - 2\pi + \zeta) \frac{\sin(\zeta/2)}{\cos^3(\zeta/2)}. \quad (12)$$

Отметим, что уравнения (6) и (12) не переходят одно в другое после формальной замены  $\vartheta$  на  $\pi - \theta$ . Происходит это из-за того, что точка половинного заполнения

$\vartheta = \theta = \pi/2$  является точкой потери аналитичности. После подстановки  $\rho(0, t) = e^{zt}$  в (12) получим трансцендентное уравнение для  $z$  в случае более чем половинного заполнения

$$1 = 2 \operatorname{ctg}^2 \vartheta \int_0^{\vartheta} d\zeta e^{2z\zeta} \frac{\sin \zeta}{\cos^3 \zeta}. \quad (13)$$

Далее можно проделать такие же выкладки, как и выше, найти самый близкий к нулю ненулевой корень уравнения (13) и убедиться в том, что решения в случае более чем половинного заполнения имеют в точности тот же вид, что и (9), и (11) (но при этом  $\delta < 0$ ). Разумеется, это совпадение для  $\tau$  и  $T$  имеет место только в низших порядках. Заметим, что в теории обычных критических явлений коэффициенты перед сингулярностями по обе стороны от критической точки существенно различаются (см., например, [18]).

В целом зависимость времени перемешивания от степени заполнения цилиндра выглядит следующим образом. При малом заполнении ( $\vartheta \ll 1$ )  $\tau^{-1} \cong 1.392/2\vartheta$ , когда же цилиндр почти полон ( $\theta \ll 1$ ),  $\tau^{-1} \cong \frac{1}{9} \frac{1}{2\pi} \theta^2$  (см. [16]). Наконец, при половинном заполнении, как мы показали,  $\tau^{-1} = 0$ . Такая зависимость описывает экспериментальные наблюдения [13]. Зависимость периода осцилляций (10) от степени заполнения описывается следующим образом:  $T(\vartheta \ll 1) \cong 4\pi\vartheta/7.553$ ,  $T(\theta \ll 1) \cong 2\pi - \frac{4}{3}\theta$  (см. [16]) и, как было показано,  $T(\theta = \vartheta = \pi/2) = \pi$ .

Итак, мы описали окрестность аномалии лавинного перемешивания, которая имеет место при половинном заполнении медленно вращающегося двумерного барабана. Оказалось, что исключительно простая система обладает весьма нетривиальным критическим поведением.

Автор благодарен Е.Н. Антонову, С.А. Ктигорову, Е.К. Кудинову, А.М. Монахову, А.Н. Самухину, Б.Н. Шалаеву и Ю.А. Фирсову за многочисленные и полезные обсуждения.

Часть представленных результатов была получена автором во время пребывания в школе "Границы в физике конденсированных сред" (Турин, Италия), проводимой в рамках программы INTAS.

Работа частично поддержана грантом Российского фонда фундаментальных исследований.

## Список литературы

- [1] J. Rajchenbach. Phys. Rev. Lett. **65**, 2221 (1990).
- [2] V. Buchholtz, Th. Pöschel, H.-J. Tillemans. Physica A **216**, 199 (1995).
- [3] G.H. Ristow. Europhys. Lett. **28**, 97 (1994).
- [4] G.A. Kohring. J. de Phys. I (France) **5**, 1551 (1995).
- [5] G. Baumann, I.M. Jánosi, D.E. Wolf. Phys. Rev. **E51**, 1879 (1995).
- [6] F. Cantelaube, Y. Limon-Duparcmeur, D. Bideau, G.H. Ristow. J. de Phys. I (France) **5**, 581 (1995).

- [7] O. Zik, D. Levine, S.G. Lipson, S. Shrikman, J. Stavans. Phys. Rev. Lett. **73**, 644 (1994).
- [8] K.M. Hill, J. Kakalios. Phys. Rev. **E49**, R3610 (1994).
- [9] Th. Pöschel, V. Buchholtz. Phys. Rev. Lett. **71**, 3963 (1993).
- [10] P. Bak, C. Tang, K. Wiesenfeld. Phys. Rev. Lett. **59**, 381 (1987).
- [11] P. Bak, C. Tang, K. Wiesenfeld. Phys. Rev. **A38**, 364 (1988).
- [12] C. Tang, P. Bak. Phys. Rev. Lett. **60**, 2347 (1988).
- [13] G. Metcalfe, T. Shinbrot, J.J. McCarthy, J.M. Ottino. Nature **374**, 39 (1995).
- [14] P.W. Anderson. Rev. Mod. Phys. **38**, 298 (1966).
- [15] W.A. Little. Phys. Rev. **156**, 398 (1967).
- [16] С.Н. Дороговцев. Письма в ЖЭТФ **62**, 246 (1995).
- [17] С.Н. Дороговцев. ЖЭТФ **111**, 6, в печати (1997).
- [18] D.J. Amit. Field theory, renormalization group, and critical phenomena. World Scientific, Singapore (1984). 684 p.