

Пиннинг плоских вихрей в трехмерной джозефсоновской среде и структура решетки вихрей в «критическом» состоянии

© М.А. Зеликман

Санкт-Петербургский государственный технический университет,
195251 Санкт-Петербург, Россия

(Поступила в Редакцию 25 декабря 1996 г.
В окончательной редакции 2 июня 1997 г.)

Рассчитана система плоских вихрей, образующаяся у границы образца при монотонном росте внешнего магнитного поля при учете пиннинга, вызванного ячеистостью среды, для различных значений параметра пиннинга I , пропорционального критическому току контакта и размеру ячейки. Наименьшее расстояние от крайнего вихря до ближайшего соседа пропорционально $I^{-1.1}$. Показано, что существует критическое значение параметра пиннинга I_c , разделяющее два режима с различными типами критического состояния. При $I < I_c$ существует некоторое пороговое значение внешнего магнитного поля $H_t(I)$, при превышении которого поле сразу проникает внутрь контакта на бесконечное расстояние. При $I > I_c$ магнитное поле линейно спадает от границы внутрь контакта. Полученное значение $I_c = 3.369$ отличается от значения 0.9716, предлагаемого другими авторами. Получена зависимость крутизны профиля магнитного поля вблизи границы от I . Показано, что в диапазонах $2\pi k < I < 2\pi k + \pi$ крутизна не зависит от I .

Важную роль в процессах, происходящих в объемных высокотемпературных сверхпроводниках (ВТСП), находящихся в не очень сильных магнитных полях, играют вихри. При малых полях вихрей нет, поле выталкивается из образца. При некотором значении поля становится энергетически выгодным возникновение вихрей, при этом в отсутствие пиннинга в образце устанавливается однородная вихревая решетка, которая по мере роста поля становится более плотной. При наличии пиннинга вихри не могут сразу заполнить весь образец, они возникают сначала возле поверхности и с ростом поля постепенно продвигаются в глубь образца. Характер этого процесса определяется структурой вихрей, их пиннингом и его зависимостью от магнитного поля. Для расчета проникновения поля в образец обычно пользуются моделью Бина [1]: все вихри в области, в которую проникло поле, находятся в "критическом состоянии", т. е. сила, действующая на каждый вихрь со стороны всех остальных, равна максимальной силе его зацепления. Для вычисления профиля поля надо знать зависимость этой силы от магнитной индукции. Существуют различные механизмы зацепления вихрей на всевозможных дефектах кристаллической решетки, являющихся центрами пиннинга. Например, в работах [2,3] рассматривается взаимодействие непрерывного вихря с дискретно расположенными центрами пиннинга при различных соотношениях между размерами вихря и расстоянием между центрами пиннинга. Джозефсоновская среда в [2,3] представляет собой по сути сверхпроводник, прорезанный решеткой одномерных слабых связей. Центры пиннинга не связаны непосредственно с этой решеткой, а созданы какими-то другими факторами: примесями, неоднородностями и т. п.

В настоящей работе рассматривается трехмерная среда, представляющая собой кубическую решетку, у которой каждая связь длиной h содержит один джозефсоновский контакт с критическим током J_c [4–6]. В такой среде вихрь описывается не непрерывным распределением раз-

ности фаз, а дискретными ее значениями на отдельных контактах. При этом существует пиннинг, связанный с ячеистой структурой среды, определяемый конечной величиной энергии, необходимой для смещения центра вихря в соседнюю ячейку. В работе [7] приведены результаты численного анализа возможных токовых распределений и соответствующих профилей магнитного поля вблизи границы для джозефсоновского образца такого типа. Однако рассмотрение в [7] проводилось только для случая большого значения параметра пиннинга $I > 2\pi$, когда в токовой конфигурации нельзя выделить отдельные вихри. В настоящей работе мы рассчитаем систему вихрей, устанавливающуюся в образце при монотонном росте внешнего поля, и проверим справедливость модели критического состояния Бина при $I < 2\pi$.

Пусть образец, имеющий форму толстой пластины, помещен в магнитное поле, параллельное плоскости пластины. Тогда во всех плоскостях, перпендикулярных внешнему полю, токи распределены идентично. Хотя возникновение линейных вихрей энергетически выгоднее, далее рассматриваются плоские (ламинарные) вихри, так как эта модель поддается расчету, позволяет понять все нюансы и качественно распространить основные результаты на случай линейных вихрей.

На рис. 1, *a* изображено распределение токов в плоскости, перпендикулярной внешнему полю. Пусть сила тока, текущего в граничном слое, равна $J_0 = J_c \sin \varphi_0$; по мере углубления в образец имеем токи $J_1 = J_c \sin \varphi_1$, $J_2 = J_c \sin \varphi_2$ и т. д. В работе [4] выведено условие квантования флюксоида в m -й ячейке (номера ячеек указаны на рис. 1, *a*)

$$\varphi_{m+1} - \varphi_m = I \sum_{i=0}^m \sin \varphi_i - x_e + 2\pi K_m, \quad (1)$$

где $I \equiv 2\pi\mu_0 h J_c / \Phi_0$ — параметр пиннинга, $x_e \equiv 2\pi\mu_0 H_e h^2 / \Phi_0$ — поток внешнего поля H_e через

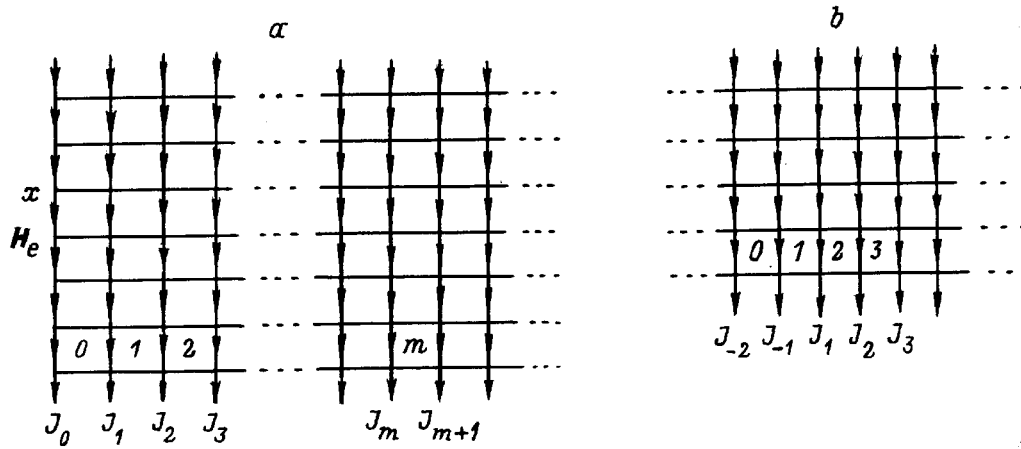


Рис. 1. Распределение токов в плоскости, перпендикулярной внешнему магнитному полю H_c (а), и в плоском вихре в плоскости, перпендикулярной оси вихря (б). Цифры соответствуют номерам ячеек, использованных при расчетах.

ячейку, нормированный на квант потока, φ_i — разность фаз на i -м контакте, Φ_0 — квант магнитного потока, K_m — число квантов Φ_0 в m -й ячейке. В ячейках центрального столбца каждого вихря $K_m = 1$, а в остальных $K_m = 0$. Вычитая из (1) аналогичное уравнение для $(m - 1)$ -й ячейки, получим

$$\varphi_{m+1} - 2\varphi_m + \varphi_{m-1} = I \sin \varphi_m (\pm 2\pi), \quad (2)$$

где в правой части могут появляться члены $\pm 2\pi$, если в ячейке находится центр какого-то вихря.

В работах [8,9] анализируются типы решений системы уравнений (2) для случая вихрей в длинном джозефсоновском периодически модулированном контакте, помещенном в магнитное поле. Показано, что существует критическое значение параметра пиннинга I_c , разделяющее два режима с различными типами критического состояния. При $I < I_c$ существует некоторое пороговое значение внешнего магнитного поля $H_c(I)$, при превышении которого поле сразу проникает внутрь контакта на бесконечное расстояние. При $I > I_c$ картина совершенно другая: магнитное поле линейно спадает от границы внутрь контакта. Физика рассматриваемой нами модели существенно отличается от [8,9]. Однако результаты, полученные в [8,9] для решетки вихрей и профиля магнитного поля, могут быть пренесены и на наш случай. В настоящей работе методом, отличным от использованного в работах [8,9], проводится анализ поведения вихрей и характера проникновения магнитного поля в контакт. Показано, что два режима, о которых говорится в [8,9], действительно существуют, однако критическое значение параметра пиннинга равно 3.369, что не согласуется со значением $I_c = 0.9716$, полученным в [8,9].

Систему (2) можно рассматривать как рекуррентный закон для нахождения φ_{m+1} из известных φ_m и φ_{m-1} , позволяющий по двум значениям φ_1 и φ_2 в соседних точках рассчитать распределение φ_m во всем образце. Для расчета структуры вихрей, образующейся при монотонном росте магнитного поля, фиксируем φ_1 и находим

такое φ_2 , чтобы сосед справа от некоторого выбранного вихря был удален от него на максимально большое расстояние (в идеале на бесконечное). Затем найдем диапазон значений φ_1 , в котором ближайший слева вихрь содержит максимально возможное количество N квантов Φ_0 , после чего в случае $N = 1$ отыщем диапазон φ_1 , в котором расстояние до этого вихря минимально. Далее проведем те же операции для следующего вихря и т.д. Повторяя эту процедуру многократно, с каждым разом сужая диапазон φ_1 , можно найти искомое критическое состояние решетки вихрей. Вычисления с точностью до пятнадцатого знака после запятой позволяют найти положение 20–50 вихрей. Не вдаваясь в подробности вычислительного алгоритма, сделаем несколько важных замечаний.

1. Описанный алгоритм еще не гарантирует того, что найденное решение соответствует искомой структуре решетки вихрей при монотонном росте магнитного поля. Каждый новый этап расчета соответствует как бы продвижению всей уже рассчитанной структуры внутрь образца, т.е. самым "неустойчивым" местом мы считаем ближайший к границе вихрь: он первым срывается с места, отталкивает соседа, который в свою очередь сдвигает следующий вихрь, и так до крайнего. Однако этот процесс может происходить и иначе: при росте поля ближайший к границе вихрь остается на месте, а сдвигается следующий, а с ним и все остальные. Возникшая структура может оказаться более устойчивой и существовать при более близком расположении следующего рассматриваемого вихря. В этом случае ее и следует считать предпочтительной. Это замечание было учтено в реализованном алгоритме. На каждом этапе рассчитывались две конкурирующие структуры: а) соответствующая ближайшему возможному положению рассматриваемого вихря; б) соответствующая удалению вихря на одну ячейку от этого положения. Если во втором случае следующий вихрь оказывался ближе к рассматриваемому, то для следующего этапа выбирался

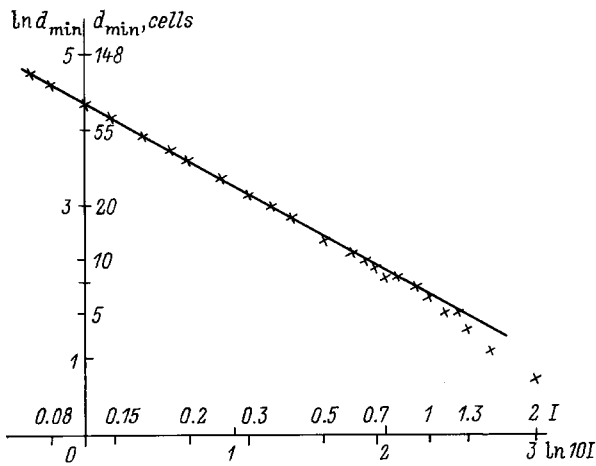


Рис. 2. Зависимость минимального расстояния d_{\min} между крайним вихрем и его соседом от I . Точки соответствуют рассчитанным значениям. Угловой коэффициент аппроксимирующей прямой $k = -1.1$.

этот случай. Например, при $I = 1.5$ при расчете второго вихря первая структура имела вид 100100001, а вторая — 10001001 (цифра соответствует числу квантов Φ_0 в ячейке, граница образца находится справа, левее первого указанного вихря вихрей нет). Вторая структура предпочтительнее, так как она позволяет третьему вихрю подойти ближе. Таким образом, мы находим структуру, в которой неустойчивым местом является ближайший к границе вихрь, т. е. при росте магнитного поля сдвигается вся решетка.

2. Аналогичная процедура производилась, когда вихрь содержал больше одного кванта Φ_0 . В этом случае конкурирующей была структура с уменьшенным на единицу числом квантов Φ_0 в рассчитываемом вихре. Ей отдавалось предпочтение, если "лестница" последующих вихрей оказывалась более крутой. Например, при $I = 4.9$ при расчете второго вихря основная структура имела вид 1222, а конкурирующая — 1123. Была выбрана вторая структура.

3. Вихрь, содержащий более одного кванта Φ_0 , принципиально отличается от вихря с одним квантом тем, что он не перемещается целиком; происходит как бы скатывание по лестнице отдельных квантов Φ_0 из вихря. Очевидно, что образующаяся при монотонном росте магнитного поля лестница не может иметь спускающихся участков. Например, при $I = 4.9$ получается структура 112332. Она может существовать в образце как результат некоей предыстории, но не может образоваться при монотонном увеличении магнитного поля. Поэтому необходимо перейти к конкурирующей структуре, уменьшив число квантов в ближайшей предыдущей ячейке, в которой это можно сделать, не создавая спадающего участка. Получим 11223443, далее 112233454 и т. д.

С учетом вышесказанного проведен численный расчет системы вихрей, возникающей при монотонном увеличении внешнего магнитного поля. На рис. 2 изображена

зависимость d_{\min} от I в логарифмическом масштабе. Из линейности этой зависимости следует степенная зависимость $d_{\min} \approx 6.1 \cdot I^{-1.1}$, соблюдающаяся вплоть до значений $I \approx 1$.

На рис. 3, а приведены результаты расчета расстояний Δ (в ячейках) от $(n-1)$ -го вихря до n -го (крайний вихрь имеет номер 0, следующий — 1 и т. д.) при различных значениях $I < 1$. При $I > 1$ расстояния равны нескольким ячейкам (при $I = 1.2$ $\Delta = 2 - 3$), и флуктуации величиной в 1–2 ячейки не позволяют увидеть закономерность из рис. 3, а. На рис. 3, б приведены результаты усреднения величины Δ по пяти соседним вихрям.

Далее приведены результаты расчета вихревых решеток для различных значений параметра $I > 1.4$, когда вихри могут располагаться в соседних ячейках или содержать больше одного кванта Φ_0 .

$$I = 1.5, \quad 1000100101001000100010010101010110101,$$

$$I = 2, \quad 100101010101010111011,$$

$$I = 2.5, \quad 1011121 \rightarrow 10111121 \rightarrow 101111121,$$

$$I = 3, \quad 101121 \rightarrow 10111221 \rightarrow 101111221 \rightarrow 1011111221,$$

$$I = 3.368, \quad 10111111222221 \rightarrow 1011111112222221 \\ \rightarrow 10111111112222221,$$

$$I = 3.369, \quad 111111122222232 \rightarrow 11111112222223333343,$$

$$I = 3.37, \quad 1111112222233333444.$$

Из вышеизложенного можно сделать следующие выводы.

При $I \leq 1.3$ вихри не могут занимать соседние ячейки, так как силы пиннинга не могут при этом скомпенсировать взаимоотталкивание вихрей даже при учете подпора решеток вихрей с обеих сторон.

При $I \geq 1.4$ вихри уже могут оказаться в соседних ячейках, но при малом превышении (например, $I = 1.5$) эти два вихря (подчеркнуты) находятся на самом краю соответствующих ячеек, так что следующий (третий) вихрь, если бы он оказался в соседней ячейке, сдвинул бы второй вихрь к центру его ячейки, что вынудило бы первый перескочить в более удаленную ячейку. При увеличении I до 2 уже три вихря подряд могут находиться в соседних ячейках.

При $I = 2.5$ пиннинг увеличивается настолько, что может удерживать рядом вихри с одним и двумя квантами Φ_0 . Однако, согласно сказанному выше, при монотонном росте внешнего поля не могут возникнуть спускающиеся к границе конфигурации. Поэтому рассматриваются конкурирующие структуры, но и они не дают поднимающихся к границе "лестниц". Это означает, что реализуется вариант, при котором ближайшая к границе ячейка содержит два кванта, а все остальные — по одному. Аналогичный вывод можно сделать и для случаев $I = 3$, $I = 3.368$. При $I < 3.369$ рассчитанная вихревая структура не может обеспечить около границы

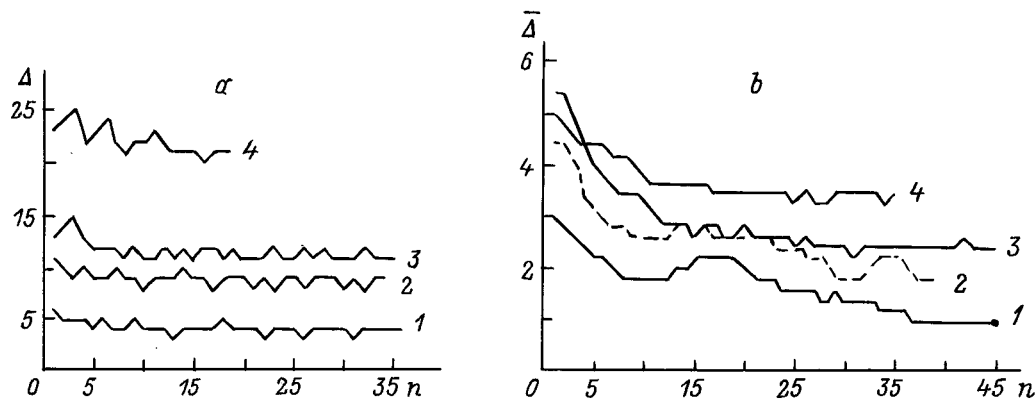


Рис. 3. Результаты расчета. *a)* Расстояния от $(n - 1)$ -го вихря до n -го в "критическом" состоянии для различных значений I . I : 1 — 1, 2 — 0.6, 3 — 0.49, 4 — 0.3. *b)* Средние значения величины Δ по пяти последовательным вихрям. I : 1 — 1.4, 2 — 1.3, 3 — 1.2, 4 — 1.1.

значение магнитного поля больше некоторого порогового, величина которого зависит от I . Если внешнее поле превышает это значение, то вихри сразу заполняют весь контакт, а поле проникает в него на бесконечное расстояние.

При $I \geq 3.369$ ситуация другая: возникает "лестница", поднимающаяся к границе образца. Ее наклон зависит от значения I . На рис. 4 изображены "лестницы" для разных значений I . Поскольку индукция магнитного поля равна магнитному потоку на единицу площади, сглаженные графики рис. 4 дают профиль магнитного поля в образце. Видно, что магнитное поле спадает линейно от границы в глубину образца. Сила пиннинга, согласно модели Бина,

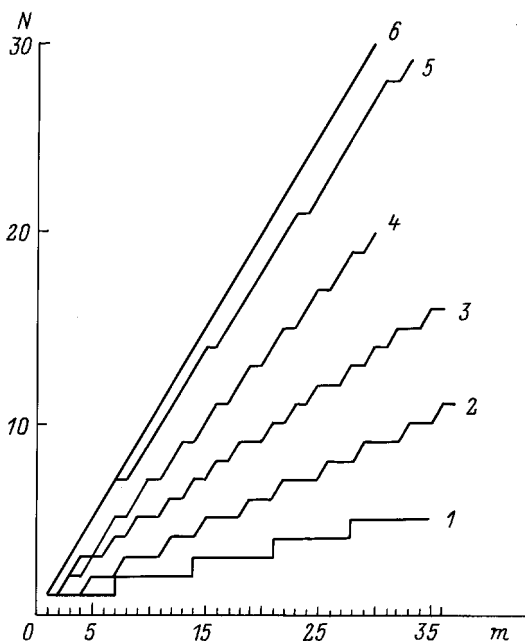


Рис. 4. "Лестница" вихрей вблизи границы образца, т.е. зависимость числа квантов Φ_0 в ячейке от номера ячейки, при различных $I > I_c$. I : 1 — 3.369, 2 — 3.5, 3 — 4, 4 — 5.2–5.6, 5 — 6.2, 6 — 6.283.

при линейном спаде магнитного поля должна была бы быть прямо пропорциональной B . Это не является само по себе нереальным, как это имеет место при $I \leq 3.368$, когда сила пиннинга должна быть равной нулю. Однако само допущение Бина, заключающееся в том, что все вихри одновременно находятся на грани скольжения, в рассматриваемом случае неверно, так как вихри срываются с мест по очереди. Это говорит о неприменимости модели Бина по крайней мере в случае пиннинга такого рода. Можно, конечно, говорить об "эффективной силе пиннинга", рассчитывая ее и ее зависимость от B в соответствии с моделью Бина, но физического смысла эта величина не имеет.

Критическое значение параметра пиннинга можно оценить аналитически, не прибегая к численному расчету. Из приведенных выше результатов для $I = 3.368 < I_c$ и $I = 3.369 > I_c$ можно видеть, что при критическом значении параметра пиннинга впервые возникает конфигурация из бесконечного числа последовательных ячеек с двумя квантами потока Φ_0 . При этом количество последовательных единиц слева от первой двойки также бесконечно. Пусть все ячейки с $m > 0$ содержат по $2\Phi_0$, а с $m \leq 0$ — по Φ_0 (рис. 1, b). Такая конфигурация описывается системой [4]

$$\varphi_{m+1} - \varphi_m + I \sum_{i=m+1}^{\infty} \sin \varphi_i = 2 \cdot 2\pi \quad (m > 0), \quad (3a)$$

$$\varphi_{m-1} - \varphi_m + I \sum_{i=m-1}^{-\infty} \sin \varphi_i = 2\pi \quad (m < 0), \quad (3b)$$

$$\varphi_1 - \varphi_{-1} + I \sum_{i=1}^{\infty} \sin \varphi_i = 2\pi \quad (m = 0). \quad (3c)$$

Вычитая из каждого уравнения (3) соответствующее уравнение для $m - 1$, получим

$$\varphi_{m+1} - 2\varphi_m + \varphi_{m-1} = I \sin \varphi_m \quad (m \neq 1), \quad (4)$$

$$\varphi_2 - 2\varphi_1 + \varphi_{-1} = I \sin \varphi_1 + 2\pi. \quad (5)$$

На грани скольжения находится вихрь $2\Phi_0$ в ячейке с $m = 1$; значит, он и сдвинут наиболее от своего центрального положения в ячейке. Поэтому будем считать при $I > 1$ все φ_m , кроме φ_1 , малыми [4], тогда линеаризованная система (4) имеет решение вида

$$\varphi_m = \varphi_1 \gamma^{-m} \quad (m \leq -1), \quad (6a)$$

$$\varphi_m = \varphi_1 \gamma^{m-1} \quad (m \geq 1), \quad (6b)$$

где $\gamma = 1 + I/2 - \sqrt{I + I^2/4}$ — решение характеристического уравнения $\gamma^2 - (2 + I)\gamma + 1 = 0$.

Подставляя $\varphi_2 = \varphi_{-1} = \varphi_1 \gamma$ в (5), получим следующее уравнение для нахождения φ_1 :

$$2(\gamma - 1)\varphi_1 = I \sin \varphi_1 + 2\pi. \quad (7)$$

Легко показать, что для существования решения (7) параметр I должен превышать пороговое значение $I_c^* \approx 3.35$. Важно, что возможность дальнейшего подъема "лестницы" к границе образца, т.е. появление бесконечного ряда последовательных ячеек с $3\Phi_0$, далее с $4\Phi_0$ и т.д., также определяется уравнением (7). Таким образом, значение I_c^* является пороговым для возникновения линейного профиля магнитного поля. Отметим хорошее согласие приближенного теоретического значения $I_c^* \approx 3.35$ с найденным численно $I_c = 3.369$.

Как указывалось выше, в работах [8,9] приводится другое значение критического параметра пиннинга $I_c = 0.9716$. Оно получено на базе подхода, развитого в нелинейной физике [10], исходя из того факта, что при переходе значения I через 0.9716 "орбиты", соответствующие системе (2), впервые приобретают возможность неограниченно подниматься вдоль оси $p_{n+1} = \varphi_{n+1} - \varphi_n$, что соответствует возможности неограниченного роста поля при движении из глубины образца к границе. При этом, однако, подъем может не быть монотонным, что означает наличие спадающих участков (с последующим ростом), которые не могут сами появиться в образце при монотонном увеличении внешнего поля. Они могут существовать как результат некоторой предыстории, например уменьшения внешнего поля от некоторого значения. В настоящей работе, как следует из вышеизложенного, такие профили исключаются из рассмотрения, что и приводит к другому значению I_c .

На рис. 5 приведена зависимость крутизны "лестницы" от I . Обращает на себя внимание тот факт, что один и тот же наклон, т.е. один и тот же профиль поля в образце, имеет место при различных значениях I .

В работе [7] предлагается считать решением системы (2) при $I \geq 2\pi$

$$\varphi_m = \pi m(m+1) \text{Int}(I/2\pi) + \arcsin(\text{Int}(I/2\pi)2\pi/I). \quad (8)$$

Действительно, подстановка в (2) показывает, что (8) является решением. Однако оно является не более чем одним из бесчисленного множества возможных решений

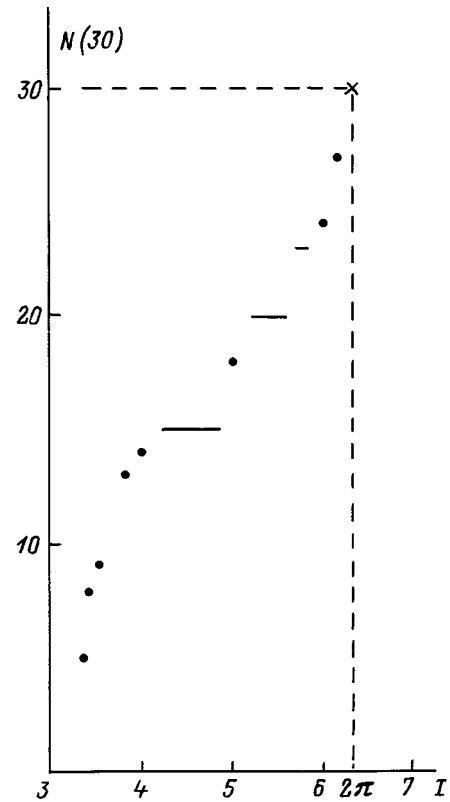


Рис. 5. Зависимость числа квантов Φ_0 в 30-й ячейке от параметра I при $I_c < I < 2\pi$.

системы (2) и описывает структуру вихря при монотонном росте внешнего магнитного поля только в случаях $I = 2\pi k$, где k — целое число, когда (8) принимает вид

$$\varphi_m = \pi km(m+1) + \pi/2. \quad (9)$$

Отметим, что при $I = 6.283$ полученная прямая (рис. 4) полностью совпадает с (9) при $k = 1$, т.е. каждая следующая ячейка содержит на один квант Φ_0 больше, чем предыдущая; при $I = 4\pi$ справедлива формула (9) при $k = 2$, когда следующая "ступенька" выше на $2\Phi_0$, но при $2\pi < I < 4\pi$ результаты не согласуются с (8). Из рассуждений, аналогичных проведенным выше, приходим к выводу о том, что для того, чтобы какой-то из вихрей содержал на $2\Phi_0$ квантов больше, чем предыдущий, и при этом далее лестница вихрей не имела бы спускающихся участков, параметр пиннинга I должен превысить некоторое пороговое значение, при котором впервые возможна конфигурация, состоящая из бесконечного ряда вихрей с Φ_0 по одну сторону от ее центра и с $3\Phi_0$ по другую. Тогда правая часть уравнения (3a) примет вид $3 \cdot 2\pi$, а (3b) и (3c) не изменятся, в результате чего в уравнении (7) 2π заменится на 4π , пороговое значение I для существования решения (7) примерно равно 9.5. Это означает, что в диапазоне $2\pi < I < 9.5$ профиль магнитного поля не меняется и описывается выражением (9) с $k = 1$. При $9.5 < I < 4\pi$ крутизна лестницы растет. Аналогичный расчет показывает, что при

изменении I в диапазонах $4\pi-15.8$, $6\pi-22.0$, $8\pi-28.3$, $10\pi-34.6$ наклон лестницы не меняется. Видно, что эти диапазоны с большой точностью задаются выражениями $2\pi k-2\pi k + \pi$.

В заключение отметим, что в диапазоне значений I , когда существует плотная лестница вихрей, рассмотренная модель плоских вихрей близка к случаю линейных вихрей, что делает полученные результаты актуальными для практических ситуаций.

Список литературы

- [1] C.P. Bean. Rev. Mod. Phys. **36**, 31 (1969).
- [2] Y.S. Kivshar, B.A. Malomed. Rev. Mod. Phys. **61**, 763 (1989).
- [3] В.В. Брыксин, С.Н. Дороговцев. ЖЭТФ **102**, 1025 (1992).
- [4] М.А. Зеликман. СФХТ **5**, 1, 60 (1992).
- [5] М.А. Зеликман. СФХТ **5**, 10, 1819 (1992).
- [6] М.А. Зеликман. СФХТ **7**, 6, 946 (1994).
- [7] F. Parodi, R. Vaccarone. Physica **C173**, 56 (1991).
- [8] S.N. Dorogovtzev, A.N. Samukhin. Europhys. Lett. **25**, 693 (1994).
- [9] С.Н. Дороговцев, Ю.И. Кузьмин. СФХТ **6**, 1, 44 (1992).
- [10] Г.М. Заславский, Р.З. Сагдеев. Введение в нелинейную физику. Наука, М. (1988).