

Энергетические характеристики краевой дислокации в квазикристалле

© М.Ю. Гуткин, И.А. Овидько

Институт проблем машиноведения Российской академии наук,
199178 Санкт-Петербург, Россия

(Поступила в Редакцию 22 мая 1997 г.)

Развита модель, описывающая фазонные дефекты в квазикристалле в виде дилатационных шнуров. С помощью представлений данной модели произведен расчет энергии краевой дислокации в квазикристалле с учетом взаимодействия такой дислокации с ее "собственными" фазонными дефектами и равновесными фазонными дефектами, присутствующими в квазикристалле. Показано, что связанный с "собственными" фазонными дефектами вклад в полную энергию краевой дислокации в квазикристалле является существенным.

Квазикристаллы — твердые тела с квазипериодическим трансляционным порядком и дальним ориентационным порядком, несовместимым с периодичностью — являются предметом интенсивных теоретических и экспериментальных исследований (см., например, [1–5]). Особый интерес представляет изучение характеристик и поведения дислокаций, оказывающих существенное влияние на физические и механические свойства квазикристаллических твердых тел. Основной особенностью совершенных дислокаций в квазикристалле является то, что каждая такая дислокация создает как обычные упругие искажения, так и необычные (отсутствующие в кристаллах) фазонные дефекты — локальные нарушения квазипериодического трансляционного порядка квазикристалла (см. рисунок). При этом вектор Бюргера совершенной дислокации в квазикристалле имеет "обычную" трансляционную и "необычную" фазонную составляющую [3,5,6].

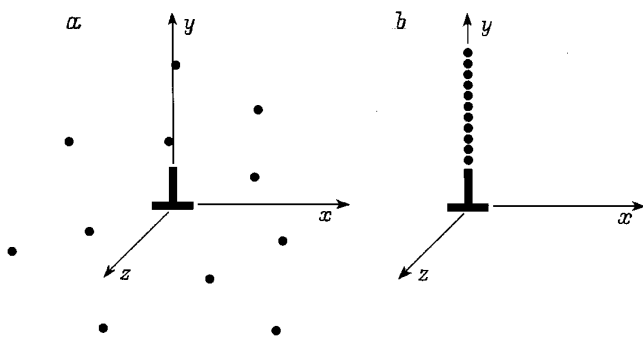
При изучении свойств дислокаций в квазикристаллах обычно используется континуальный подход, в рамках которого ансамбли "собственных" фазонных дефектов дислокаций (фазонных дефектов, индуцированных дислокациями) описываются пространственно-неоднородными непрерывными фазонными полями (отличными от обычных упругих полей) [3,5,6]. Такой подход имеет два следующих основных недостатка: 1) невозможно корректно количественно определить

упругие константы для фазонных полей; 2) свойства дефектов, присущие им как локальным образованиям, не учитываются. В настоящей работе развита (кратко обсуждавшаяся ранее [7]) модель фазонных дефектов как дилатационных шнуров, которая, с одной стороны, позволяет описывать характеристики фазонных дефектов с помощью математических средств стандартной теории упругости дефектов и, с другой стороны, учитывает локальный характер фазонных дефектов. С помощью представлений данной модели проведен расчет энергетических характеристик краевых дислокаций в квазикристалле и обсуждены обусловленные влиянием фазонных дефектов особенности поведения таких дислокаций.

1. Фазонные дефекты как дилатационные шнуры

Эффективной геометрической моделью реального трехмерного квазикристалла является квазипериодически упорядоченная упаковка структурных единиц (двух или более типов) — полиэдров, служащих геометрическими моделями для элементарных атомных конфигураций квазикристалла (см. например, [1–3,5,6]). При этом фазонные дефекты трактуются как локализованные области, в которых идеальная упаковка структурных единиц нарушена. Точнее, в упаковке структурных единиц, служащей моделью для трехмерного квазикристалла, каждый фазонный дефект представляет собой линию, проходящую через "неправильные" (отсутствующие в идеальной упаковке) стыки структурных единиц (см., например, [3,5,6]). При этом "неправильные" стыки структурных единиц соответствуют локальным нарушениям атомной структуры квазикристалла, которые характеризуются избыточной энергией и являются источниками упругих искажений.

Структура фазонных дефектов и их соответствующий характер как источников упругих искажений, вообще говоря, неизвестны; в общем случае они зависят от структуры и химического состава квазикристалла. В настоящей работе (по аналогии с фазонными дефектами в квазипериодических границах зерен [8,9]) мы



"Собственные" фазонные дефекты (точки); создаваемые совершенной дислокацией в квазикристалле. *a* — неравновесная, *b* — равновесная ситуация.

рассмотрим простейшую ситуацию, в которой фазонные дефекты представляют собой аналоги линейных цепочек примесных атомов вакансионного и межузельного типов моделируются как дилатационные шнуры соответственно вакансионного и межузельного типа. Данная модель позволяет описать в первом приближении основные особенности фазонных дефектов как локальных образований в общем случае и может служить основой для дальнейших уточнений характеристик и свойств фазонных дефектов, связанных со структурой и химическим составом конкретного квазикристалла.

2. Краевая дислокация в квазикристалле (модель)

Рассмотрим прямолинейную краевую дислокацию, расположенную в бесконечном квазикристалле. В качестве модели возьмем обычную краевую дислокацию, линия которой совпадает с осью z декартовой системы координат, а вектор Бюргера направлен вдоль оси x . Фазонные дефекты, индуцированные дислокацией, моделируются бесконечными дилатационными шнурами [8,9], параллельными дислокационной линии. Полагаем, что на каждой из окружающих дислокацию соосных цилиндрических поверхностей радиуса $2ka$, где $2a$ — характеристический размер структурной единицы, а k — произвольное натуральное число, располагается по одному дилатационному шнуру. Для определенности будем считать, что такие шнуры принадлежат к вакансионному типу. Тогда, исходя из принципа минимума полной энергии системы и из требований указанной геометрии распределения "собственных" фазонов вблизи дислокации, легко показать, что при достижении системой термодинамического равновесия все дилатационные шнуры будут выстроены в ряд в области залегания "лишней" полуплоскости yz , $y > 0$, с периодом $2a$. Такой ряд шнуров в первом приближении моделируется как дилатационное включение в виде пластины толщиной $2a$, собственная деформация которой совпадает с собственной деформацией каждого из шнуров. Упругие свойства такого рода объектов неоднократно обсуждались в литературе [10–16]. В частности, включение в виде полубесконечной пластины использовалось [15,16] в качестве модели типичного дефекта ламелярной структуры направленно-закристаллизованных эвтектических композитов — ламелярной терминации. Далее мы также будем для краткости называть терминацией полученную систему дилатационных шнуров. Таким образом, наша модель краевой дислокации в квазикристалле включает обычную краевую дислокацию, характеризуемую направлением ее линии и вектором Бюргера, и связанную с ней в состоянии термодинамического равновесия терминацию, характеризуемую толщиной $2a$ и собственной дилатационной деформацией ω .

В квазикристалле, находящемся в состоянии теплового равновесия, всегда существуют термодинамически

равновесные фазонные дефекты, которые также можно с известной долей условности моделировать дилатационными шнурами. Появление в квазикристалле краевой дислокации приводит к возбуждению подсистемы фазонных дефектов и к их перераспределению в упругом поле дислокации. Опираясь на дилатационную модель фазонных дефектов, мы вправе ожидать от них поведения, схожего с поведением обычных точечных дефектов (вакансий и межузельных атомов). Тогда легко предположить, что фазонные дефекты разного знака (типа вакансий или типа межузельных атомов) будут образовывать вблизи дислокации характерные низкоэнергетические структуры по типу облаков Коттрелла. При нагружении квазикристалла внешней нагрузкой все эти образования, терминация и облака фазонных дефектов, будут сковывать движение дислокации, поскольку сами они могут перемещаться только диффузионным путем. Отрыв дислокации от них приведет к росту упругой энергии системы, что вызовет термодинамическую силу, тормозящую скольжение дислокации. Очевидно, что в зависимости от характера и величины внешнего воздействия можно ожидать и различных режимов движения дислокации. Для количественного описания этого процесса необходимо исследовать энергии упругого взаимодействия дислокации с описанными фазонными структурами.

3. Упругое взаимодействие дислокации с собственными фазонными дефектами (терминацией). Вклад собственных фазонных дефектов дислокации в ее энергию

Представим упругую модель ансамбля собственных фазонных дефектов (терминации) в виде полубесконечной пластины, ограниченной границами $x = \pm a$, $a \leq y < \infty$ и $-a \leq x \leq a$, $y = a$, испытывающей собственную дилатационную деформацию $\omega > 0$. Поле упругих напряжений такой терминации можно записать в виде [15,16]

$$\sigma_{xx}^t = C \left(\arctg \frac{x+a}{y-a} - \arctg \frac{x-a}{y-a} \right), \quad (1)$$

$$\sigma_{yy}^t = C \left(\arctg \frac{y-a}{x+a} - \arctg \frac{y-a}{x-a} + \frac{\pi}{2} \text{sign}(x+a) - \frac{\pi}{2} \text{sign}(x-a) \right), \quad (2)$$

$$\sigma_{xy}^t = \frac{C}{2} \ln \frac{(x-a)^2 + (y-a)^2}{(x+a)^2 + (y-a)^2}, \quad (3)$$

$$\sigma_{zz}^t = \sigma_{xx}^t + \sigma_{yy}^t, \quad (4)$$

$$\sigma_{xz}^t = \sigma_{yz}^t = 0, \quad (5)$$

где $C = C\omega(1+\nu)/[\pi(1-\nu)]$, G — модуль сдвига, ν — коэффициент Пуассона.

Теперь энергию взаимодействия терминации с дислокацией можно рассчитать как работу по зарождению дислокации в упругом поле терминации

$$W_{\text{int}}^{d-t} = b \int_0^R \sigma_{xy}^t(x, y=0) dx, \quad (6)$$

где R — величина порядка размера образца, b — величина трансляционной составляющей вектора Бюргера дислокации. Взяв интеграл, получаем для $2a = b$, $R \gg b$

$$W_{\text{int}}^{d-t} = -\frac{Gb^2}{\pi} \frac{1+\nu}{1-\nu} \omega \left(\ln \frac{2R}{\sqrt{5}b} - 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{2} \right). \quad (7)$$

Выражение (7) дает величину энергии взаимодействия на единицу длины дислокации. Оценим, какая энергия приходится на отрезок дислокации длиной b . Для характерных значений $G = 100$ GPa, $b = 3 \cdot 10^{-10}$ m, $\nu = 0.3$ и $R = 10^{-5}$ m получаем $W_{\text{int}}^{d-t} \approx -100\omega$ eV = -5 eV (для $\omega = -0.05$) и -1 eV (для $\omega = 0.01$).

Следует отметить, что проведенный расчет энергии W_{int}^{d-t} справедлив в случае термодинамического равновесия, когда все "собственные" фазонные дефекты выстраиваются в одной плоскости (см. рисунок, b). До достижения термодинамического равновесия распределение "собственных" фазонных дефектов менее упорядочено (см. рисунок, a). При этом полученная величина $W_{\text{int}}^{d-t} \approx -100\omega$ eV (на дислокационный отрезок длиной b) является верхней (по абсолютной величине) оценкой энергии упругого взаимодействия между дислокацией и ее "собственными" фазонными дефектами.

Оценим теперь величину собственной упругой энергии ансамбля "собственных" фазонных дефектов краевой дислокации W^{ph} . При этом используем следующее известное выражение для собственной упругой энергии включения, испытывающего однородную деформацию [17]:

$$W = 2G \frac{1+\nu}{1-\nu} \omega^2 V, \quad (8)$$

где V — объем включения. В случае терминации, служащей моделью ансамбля "собственных" фазонных дефектов в условиях термодинамического равновесия, объем терминации, приходящийся на ее отрезок длиной b , равен $V = Rb^2$. Отсюда

$$W^{\text{ph}} \approx 2G \frac{1+\nu}{1-\nu} \omega^2 Rb^2. \quad (9)$$

Энергия краевой дислокации W^d (приходящаяся на дислокационный отрезок длиной b) в квазикристалле в отсутствие фазонных дефектов определяется известной формулой для энергии дислокации в кристалле (см. например, [18])

$$W^d = \frac{Gb^3}{4\pi(1-\nu)} \left(\ln \frac{R}{r_0} + Z \right), \quad (10)$$

где r_0 — радиус ядра дислокации, Z — фактор, учитывающий вклад дислокационного ядра в ее энергию.

Формулы (7), (9) и (10) определяют составляющие полной энергии краевой дислокации (на дислокационный отрезок длиной b) в квазикристалле, которая в итоге задается следующим выражением:

$$\begin{aligned} \tilde{W} &= W^d + W^{\text{ph}} + W_{\text{int}}^{d-t} \\ &= -\frac{Gb^3}{4\pi(1-\nu)} \left\{ \ln \frac{R}{r_0} + Z + 4\omega(1+\nu) \right. \\ &\quad \left. \times \left(2\pi\omega \frac{R}{b} + 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{2} - \ln \frac{2R}{\sqrt{5}b} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (11)$$

Анализ выражения (11) свидетельствует о следующем. Вклад в полную энергию краевой дислокации, связанный с ее собственными фазонными дефектами, существенно зависит от размера квазикристаллического образца-зерна R , поскольку W^{ph} линейно зависит от R . Так, для $G = 100$ GPa, $r = b$, $Z = 1$, $\omega = 0.05$, $b = 3 \cdot 10^{-10}$ m, $R = 10^{-8}$, 10^{-7} , 10^{-6} , 10^{-5} m получаем соответственно $\tilde{W} \approx (0.75, 3.7, 32, 310)Gb^3 \approx 12.6, 63, 536, 5240$ eV. Таким образом, величина энергии дислокации в квазикристаллическом образце-зерне с характеристическими размерами $R > 1.5 \cdot 10^{-8}$ m существенно превосходит (примерно в $R/(50b)$ раз) величину энергии "соответствующей" дислокации в кристалле, а именно дислокации с вектором Бюргера, равным трансляционной составляющей b вектора Бюргера дислокации в квазикристалле.

4. Упругое взаимодействие дислокации с равновесными фазонными дефектами

1) Равновесная концентрация фазонных дефектов в бездислокационном квазикристалле. Воспользуемся упругой моделью фазонного дефекта в виде прямолинейного дилатационного шнура диаметром $2a = b$. Будем считать, что все шнуры параллельны. Рассмотрим некоторую плоскость, нормальную к осям шнуров, и выделим в ней площадку единичной площади. Можно показать, что число шнуров n , пересекающих эту площадку, в условиях термодинамического равновесия равно

$$n = N \exp \left(-\frac{\varepsilon^{\text{el}}}{kT} \right), \quad (12)$$

где N — число атомных позиций на выделенной площадке, ε^{el} — упругая энергия шнура, приходящаяся на отрезок шнура длиной b .

Упругую энергию найдем по формуле (8) для включения, испытывающего однородную собственную деформацию ω [17]. В данном случае $V = \pi b^3/4$ и

$$\varepsilon^{\text{el}} = \frac{\pi G}{2} \frac{1+\nu}{1-\nu} \omega^2 b^3. \quad (13)$$

Для тех же, что и в разделе 3, значений упругих модулей формула (13) дает оценку $\varepsilon^{\text{el}} \approx 50\omega^2$ eV на атомную плоскость.

Теперь легко оценить относительную равновесную концентрацию фазонов $c_0 = n/N$. При комнатной температуре $T = 300$ К имеем $kT \approx 0.03$ eV и $c_0 \approx \exp(-1667\omega^2)$.

2) Равновесная концентрация фазонных дефектов вблизи дислокации. Появление дислокации приводит к пространственной неравномерности равновесного распределения фазонов вблизи нее. Выражение для относительной концентрации фазонов в упругом поле дислокации можно легко получить по аналогии со случаем обычных точечных дефектов [18]. Например, для фазонных дефектов вакансионного типа получаем

$$c_v(x, y) = c_{v0} \exp\left(-\frac{\sigma^d(x, y)\Delta V_v}{kT}\right), \quad (14)$$

где c_{v0} — равновесная концентрация фазонов этого типа в отсутствие дислокации, σ^d — дилатационная составляющая поля упругих напряжений дислокации,

$$\sigma^d(x, y) = -\frac{Gb}{3\pi} \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{y}{x^2+y^2}, \quad (15)$$

а ΔV_v — изменение объема квазикристалла, обусловленное присутствием в нем одного фазонного дефекта и приходящееся на одну атомную плоскость. Это изменение объема можно грубо оценить по формуле

$$\Delta V_v \approx \frac{3}{4}\pi\omega b^3. \quad (16)$$

Из (14), (15) очевидно, что концентрация фазонов будет максимальной в области "лишней полуплоскости" $x = 0, y > 0$. Оценим ее величину. Подставляя (15) и (16) в (14), получаем для комнатной температуры при прежних значениях упругих модулей оценку $c_v \approx c_{v0} \exp(300\omega b/y)$.

3) Энергия упругого взаимодействия равновесных фазонных дефектов с дислокацией. Для простоты расчетов рассмотрим континуальное распределение равновесных фазонных дефектов в упругом поле краевой дислокации. Энергию упругого взаимодействия дислокации с одним фазонным дефектом, упругой моделью которого является расположенный в точке (x, y) прямолинейный дилатационный шнур, легко найти по аналогии со случаем точечного дефекта [18]

$$W = \sigma^d(x, y)\Delta V_v, \quad (17)$$

где ΔV_v — изменение объема тела, вызванное появлением в нем одной вакансии. В случае дефекта межузельного типа знак в (17) меняется на противоположный (используется абсолютная величина приращения объема). Предположим для простоты, что изменения объема тела, вызываемые фазонными дефектами вакансионного и межузельного типа, приблизительно равны $\Delta V_v \approx \Delta V_i$. Поскольку при этом распределения равновесных фазонных дефектов вакансионного и межузельного типа

симметричны относительно плоскости xz (это следует из (14), (15)), их вклады в энергию взаимодействия также приблизительно равны. Поэтому мы можем просто удвоить вклад фазонных дефектов вакансионного типа. Тогда энергию взаимодействия (приходящуюся на одну атомную плоскость) можно записать в виде

$$W_{\text{int}}^{d-\text{ph}} = \Delta V_v \int_S \sigma^d(x, y)c_v(x, y)dS, \quad (18)$$

где S — площадь верхней полуплоскости xy . Переходя к цилиндрической системе координат и используя (14)–(16), преобразуем (18) к виду

$$W_{\text{int}}^{d-\text{ph}} = -\frac{Gb^3}{2} \frac{1+\nu}{1-\nu} \omega \exp\left(-\frac{\varepsilon^{\text{el}}}{kT}\right) I(\omega, T), \quad (19)$$

где

$$I(\omega, T) = \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi \int_{r_0}^R \exp\left(\frac{L}{r} \sin \varphi\right) dr. \quad (20)$$

В выражении (20) использована эффективная длина $L = Gb^3\omega b(1+\nu)/[4kT(1-\nu)]$, r_0 — радиус обрезания упругого поля дислокации на ее ядре, R — характерный размер образца, r и φ — переменные цилиндрической системы координат. Первый интеграл в (20) берется аналитически (см. интеграл № 20 на с. 138 в [19]), что дает

$$I(\omega, T) = \int_0^\pi \sin \varphi \left\{ R \exp\left(\frac{L}{R} \sin \varphi\right) - r_0 \exp\left(\frac{L}{r_0} \sin \varphi\right) + L \sin \varphi \left[\text{Ei}\left(\frac{L}{r_0} \sin \varphi\right) - \text{Ei}\left(\frac{L}{R} \sin \varphi\right) \right] \right\} d\varphi. \quad (21)$$

Этот интеграл может быть легко получен численно. Например, при $G = 100$ GPa, $\nu = 0.3$, $b = 3 \cdot 10^{-10}$ м и $T = 300$ К получаем оценку $L \approx 150\omega b$. Тогда для $\omega = 0.05$, $R = 10^{-5}$ м и $r_0 = 2b$ выражение (21) дает $I \approx 1.97 \cdot 10^{-5}$ м. При этом оказывается, что первое слагаемое в подынтегральном выражении по крайней мере на два порядка больше каждого из остальных. Учитывая, что $R \gg L \approx 7.5b$, это слагаемое можно разложить в ряд и, пренебрегая остальными слагаемыми, взять интеграл аналитически, что дает $I \approx 2R$.

Теперь мы можем сравнить энергию взаимодействия дислокации с терминацией с энергией взаимодействия дислокации с равновесными фазонными дефектами. Например, при $\omega = 0.05$ и тех же значениях параметров имеем $W_{\text{int}}^{d-t} \approx -3$ и $W_{\text{int}}^{d-\text{ph}} \approx -1.5 \cdot 10^{-7}$ в единицах $Gb^3(1+\nu)/(1-\nu)$. Очевидно, что $W_{\text{int}}^{d-t} \gg W_{\text{int}}^{d-\text{ph}}$ и мы можем вообще не учитывать взаимодействие дислокации с равновесными фазонными дефектами при оценке закрепления дислокации в квазикристалле.

5. Закрепление дислокации собственными фазонными дефектами

Закрепление дислокации терминацией легко оценить, используя сдвиговую компоненту поля напряжений терминации (3). Из формулы (3) следует, что для отрыва дислокации от терминации надо приложить сдвиговое напряжение порядка $\tau_{\max} \approx G\omega(1+\nu)/[2\pi(1-\nu)] \approx G\omega/\pi$.

Таким образом, основная особенность совершенных дислокаций в квазикристалле, а именно наличие связанных с такими дислокациями ансамблей фазонных дефектов, существенным образом влияет на энергетические характеристики и поведение дислокаций. Так, обусловленный "собственными" фазонными дефектами вклад в полную энергию краевой дислокации сильно зависит от размера R квазикристаллического образца: собственная энергия фазонных дефектов $W^{\text{ph}} \propto R$, а энергия упругого взаимодействия дислокации с ее "собственными" фазонными дефектами $W_{\text{int}}^{d-t} \propto \ln R$. Для $R > 1.5 \cdot 10^{-8}$ м данный вклад является определяющим. При этом энергия дислокации с трансляционной составляющей b вектора Бюргерса в квазикристалле превосходит энергию дислокации с вектором Бюргерса b в кристалле примерно в $R/(50b)$ раз. Взаимодействие краевых дислокаций с "собственными" фазонными дефектами определяет тормозящую силу для движения дислокаций (что отмечалось также ранее [3,20,21]). В то же время влияние термодинамически равновесных фазонных дефектов на движение дислокации в квазикристалле пренебрежимо мало по сравнению с влиянием "собственных" фазонных дефектов дислокации.

Развитый в настоящей работе теоретический подход, основанный на модели фазонных дефектов как дилатационных шнуров, использован здесь для анализа свойств индивидуальных дислокаций в квазикристалле. Вообще говоря, данный подход является эффективным и при моделировании поведения ансамблей дислокаций в квазикристаллах, что составляет предмет дальнейших исследований авторов.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 96-02-16807-А) и Научного совета по МНТП России "Физика твердотельных наноструктур" (грант 97-30060).

Список литературы

- [1] T. Janssen. Phys. Rep. **168**, 2, 55 (1988).
- [2] Ch. Janot, D.M. Dubois. J. Phys. **F18**, 11, 2303 (1988).
- [3] И.А. Овидько. Дефекты в конденсированных средах: стеклах, кристаллах, квазикристаллах, жидких кристаллах, магнетиках, сверхтекучих жидкостях. Знание, СПб (1991). 248 с.
- [4] A. Inoue. Nanostruct. Mater. **6**, 1-4, 53 (1995).
- [5] T.C. Lubensky. In: Introduction to Quasicrystals / Ed. M.V. Jaric. Boston, etc. (1988). P. 199.

- [6] J.E.S. Socolar, T.C. Lubensky, P.J. Steinhardt. Phys. Rev. **B34**, 5, 3345 (1986).
- [7] I.A. Ovid'ko. Mater. Sci. Eng. **A163**, 1, 67 (1993).
- [8] M.Yu. Gutkin, I.A. Ovid'ko. Institute of Machine Science Problems RAS, Preprint № 124. St. Petersburg (1995). 14 p.
- [9] M.Yu. Gutkin, I.A. Ovid'ko. Mater. Sci. Forum **207-209**, Pt 1, 321 (1996).
- [10] S.L. Sass, T. Mura, J.B. Cohen. Phil. Mag. **16**, 10, 679 (1967).
- [11] G. Faivre. Phys. Stat. Sol. **35**, 1, 249 (1969).
- [12] R. Sankaran, C. Laird. J. Mech. Phys. Sol. **24**, 4, 251 (1976).
- [13] Y.P. Chiu. J. Appl. Mech. **44**, 4, 587 (1977).
- [14] J.K. Lee, W.C. Johnson. Phys. Stat. Sol. (a) **46**, 1, 267 (1978).
- [15] М.Ю. Гуткин, В.И. Владимиров, С.П. Никаноров, А.Е. Романов. МКМ, **4**, 730 (1986).
- [16] М.Ю. Гуткин, В.И. Владимиров, А.Е. Романов. МКМ, **3**, 450 (1987).
- [17] Дж. Эшелби. Континуальная теория дислокаций. ИИЛ, М. (1963). 247 с.
- [18] Дж. Хирт, И. Лоте. Теория дислокаций. Атомиздат, М. (1972). 600 с.
- [19] А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. Интегралы и ряды. Наука, М. (1981). 800 с.
- [20] T.C. Lubensky, S. Ramaswamy, J. Toner. Phys. Rev. **B33**, 11, 7715 (1986).
- [21] I.A. Ovid'ko. Mater. Sci. Eng. **A154**, 1, 29 (1992).