

# Природа крупномасштабного течения как отличительный признак сверхпластичности

© А.И. Пшеничнюк, О.А. Кайбышев, В.В. Астанин

Институт проблем сверхпластичности металлов Российской академии наук,  
450001 Уфа, Россия

(Поступила в Редакцию 22 мая 1997 г.)

Предложена модель сверхпластической деформации материалов, основанная на представлениях о кооперативной природе зернограничного проскальзывания. Условия реализации режима сверхпластической деформации получены как условия формирования когерентных сдвиговых полос. На основе анализа температурной зависимости границ интервала напряжений, в котором происходит сверхпластическое течение, вводится представление о двух типах пороговых напряжений, что позволяет понять причину неоднозначности интерпретации известных экспериментальных результатов.

Спектр материалов и условий, в которых реализуется режим сверхпластической деформации (СПД) весьма широк: это металлы, керамики, композиты, нанокристаллические материалы, низкотемпературная и высокоскоростная сверхпластичность и т.д. Возникает естественный вопрос: что объединяет столь различные объекты.

Отличительная особенность СПД в сравнении с другими видами деформации — это крайне большие удлинения до разрушения. Больших удлинений можно достичь лишь при отсутствии в испытуемом материале условий для локализации деформации (приводящей к вязкому разрушению) и концентрации напряжений (приводящей при соответствующих скоростях нагружения к развитию трещин и хрупкому разрушению); иными словами — при однородности течения в пределах всего образца и в течение достаточного промежутка времени. Значит, в качестве отличительного признака СПД на передний план выступает крупномасштабная организация течения, когерентная на макроскопическом уровне.

Эксперименты последних лет [1–7] убедительно продемонстрировали, что на стационарной стадии СПД осуществляется посредством сдвига вдоль поверхностей, проходящих через все поперечное сечение образца и предельно близких к плоскостям с максимальными сдвиговыми напряжениями. Эти поверхности были названы полосами кооперативного зернограничного проскальзывания (КЗГП) [1]. Установлено, что полосы распределены однородно вдоль рабочей части образца. В этом случае скорость деформации определяется следующим, чисто геометрическим по своей природе, соотношением:

$$\dot{\epsilon} = \frac{\dot{l}(t)}{l(t)} = \frac{\langle M \rangle}{M_0} \frac{V}{\sqrt{2}\langle d \rangle}, \quad (1)$$

где  $l(t)$  — длина образца в момент времени  $t$ ,  $\langle M \rangle$  — среднее значение числа полос КЗГП, активных при данных условиях нагружения,  $M_0$  — максимально возможное число полос КЗГП в испытуемом образце,  $V$  — скорость сдвига в полосе КЗГП,  $\langle d \rangle$  — средний размер зерна в материале.

Все существующие модели СПД сводятся к установлению механизмов аккомодации зернограничного про-

скальзывания (ЗГП) в условиях поликристаллического агрегата (либо диффузионное преодоление тройных стыков, либо комбинация скольжения и переползания решеточных дислокаций, либо сочетание этих механизмов) и последующему выделению наиболее медленного механизма, контролирующего скорость деформации. Однако механизмы, контролирующие скорость при разных температурах, могут быть разными даже для одного и того же материала [8]. Тем более трудно ожидать, что этот механизм будет общим для, например, металлов и керамик, т.е. механизм, контролирующий скорость, является скорее признаком, отличающим различные варианты реализации СПД. В рамках выражения (1) контролирующий механизм определяет значение фактора  $V/\langle d \rangle$ , и именно этот фактор является объектом исследования всех известных моделей СПД.

Однако, принимая картину течения, основанную на представлении о полосах КЗГП, а тем самым и выражение (1) в качестве определения скорости деформации, мы должны выяснить, при каких условиях и в каком количестве формируются в материале полосы КЗГП, и лишь затем анализировать механизмы, контролирующие скорость сдвига  $V$  вдоль полосы. Целью настоящей работы является определение условий формирования полос КЗГП и вычисление на этой основе фактора  $\langle M \rangle/M_0$ , который определяется крупномасштабной картиной течения, объединяющей различные варианты СПД.

## 1. Характеристики кооперативного течения

Структурные исследования показывают [3–5], что на стадии выхода кривых нагружения в режим стабильного течения в материале формируются отдельные и независимые участки течения, представляющие собой либо неоднородные сдвиги вдоль благоприятно ориентированных границ зерен, либо проявления дислокационной активности в достаточно крупных зернах. При достижении стадии стабильного течения, что само по себе является признаком выхода на режим СПД [9], происходит объединение отдельных участков течения в полосы КЗГП, одно-

родно распределенные вдоль рабочей части образца. Два основных фактора приводят к объединению независимых участков течения в когерентно действующую сдвиговую полосу. Во-первых, границы зерен, ориентированные в плоскости максимальных касательных напряжений, прерывают локальную миграцию и модифицируют конфигурацию тройного стыка таким образом, что скопление зернограницных дислокаций, сформированное на рассматриваемой границе, распространяется в сопряженную границу. Во-вторых, ряд зерен, препятствующих формированию полосы, обнаруживает следы внутризеренного скольжения. Эти результаты получены на основе анализа распределения двугранных углов в тройных стыках, принадлежащих полосе и расположенных вне ее, а также при изучении ЗГП в трикристаллах [4,5,10].

Анализ движущей силы локальной миграции приводит к следующему условию [11]:

$$\frac{L}{b_L} \leq \frac{L_{LM}(\tau)}{b_L}$$

$$\cong \begin{cases} \left[ \chi(T) \frac{b_B}{b_L} \left( 2 \frac{\mu_0}{\tau} \right)^4 \right]^{1/3}, & \frac{\tau}{\mu_0} < \frac{\chi(T)}{8} \left( \frac{b_L}{2b_B} \right)^2, \\ 8 \frac{b_B}{b_L} \frac{\mu_0}{\tau}, & \frac{\tau}{\mu_0} > \frac{\chi(T)}{8} \left( \frac{b_L}{2b_B} \right)^2, \end{cases} \quad (2)$$

где  $b_L, b_B$  — векторы Бюргера соответственно решеточной и зернограницной дислокаций,  $\mu_0 = \mu/2\pi(1-\nu)$ ,  $\mu$  — модуль сдвига,  $\alpha_{GB}$  — коэффициент поверхностного натяжения границы,  $\chi(T) = \alpha_{GB}(T)/\mu_0 b_L = \chi_0(1-T/T_m)^{2\nu}$ ,  $\nu \cong 0.65$  [12]. Все границы зерен, длины  $L$  которых в направлении проскальзывания больше, чем  $L_{LM}$ , испытывают локальную миграцию. Однако для больших зерен (и больших длин границ зерен) локальная миграция подавлена дислокационной ползучестью. В качестве нижнего предела для дислокационной ползучести мы использовали хорошо известное соотношение [13]

$$\frac{L}{b_L} \leq \frac{L_D(\tau)}{b_L} = \frac{K}{2} \frac{\mu_0}{\tau}, \quad (3)$$

где  $K$  — эмпирическая константа  $\sim 10-15$ .

В работе [11] получены также и условия вовлечения в полосу КЗГП участков зерен, перерезаемых внутризеренным скольжением. Однако полученное условие необходимо, но не достаточное. Следует потребовать наличия в данном зерне также плоскости скольжения, ориентированной согласно с ориентацией формирующейся полосы. Последнее определяется текстурой материала и сильно усложняет задачу. Для простоты (в качестве предварительного результата) мы пренебрегаем вкладом в формирование полосы участков, сформированных благодаря внутризеренному скольжению, как событий более редких.

Для заданного напряжения локальной миграции подвержены все границы, длины которых расположены в интервале  $[L_{LM}, L_D]$ . Число таких границ определяется

функцией распределения длин границ зерен, в качестве которой мы использовали известное логнормальное распределение

$$W(L) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} DL} \exp \left[ -\frac{1}{2D^2} \ln^2 \left( \frac{L}{\langle L \rangle} e^{D^2/2} \right) \right],$$

$$D^2 = \ln \frac{\langle L^2 \rangle}{\langle L \rangle^2}. \quad (4)$$

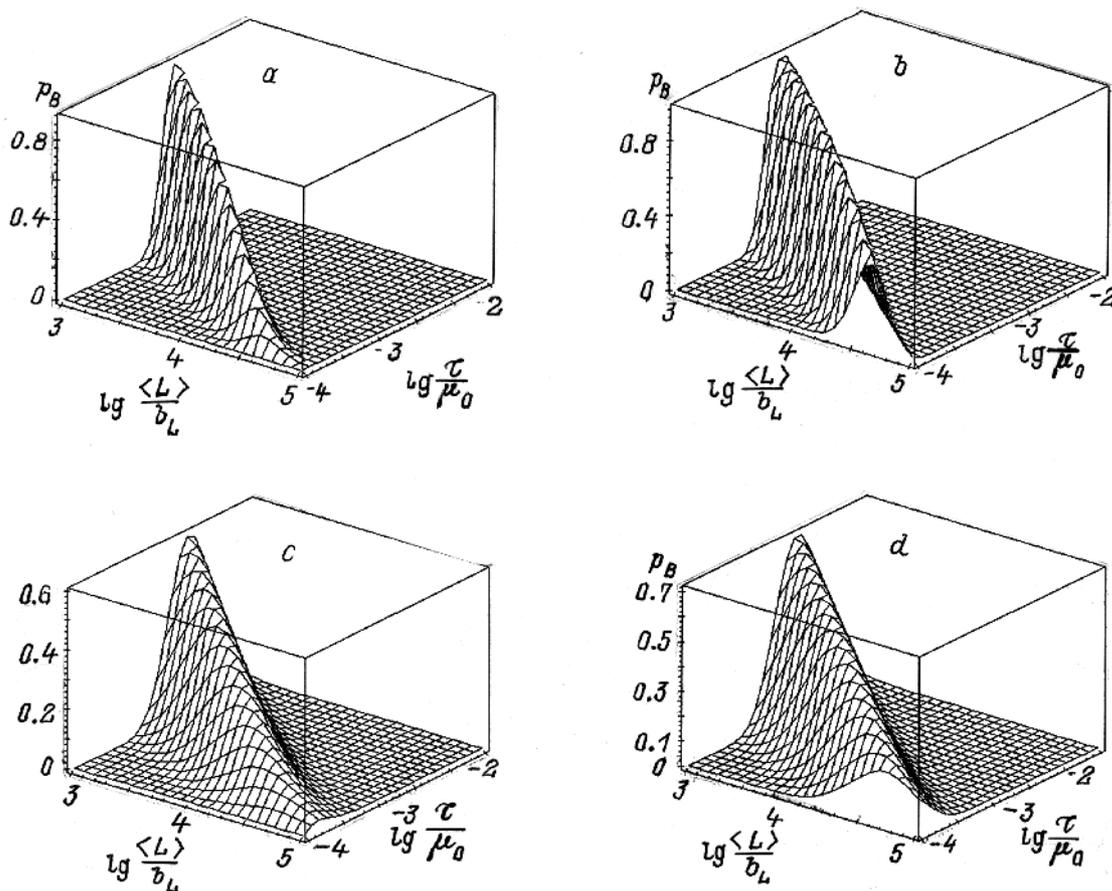
В этом случае вероятность  $p_B$  того, что одна случайно выбранная граница может принимать участие в формировании полосы КЗГП определяется выражением

$$p_B(\tau, \langle L \rangle) = \int_{L_{LM}(\tau)}^{L_D(\tau)} W(L) dL = \frac{1}{2} \left[ \Phi \left( \frac{1}{\sqrt{2D}} \ln \frac{L_D(\tau) e^{D^2/2}}{\langle L \rangle} \right) - \Phi \left( \frac{1}{\sqrt{2D}} \ln \frac{L_{LM}(\tau) e^{D^2/2}}{\langle L \rangle} \right) \right], \quad (5)$$

где  $\Phi(x)$  — интеграл вероятности.

Примеры зависимости  $p_B$  от среднего размера зерна и напряжения для двух значений гомологической температуры и дисперсии размеров зерен приведены на рис. 1. Легко видеть, что в материале с большим средним размером зерен условия для локальной миграции отсутствуют при всех напряжениях. Уменьшение среднего размера зерна приводит к формированию условий миграции в определенном интервале напряжений. При увеличении температуры локальная миграция происходит в более широких интервалах как размеров зерен, так и напряжений. Увеличение дисперсии приводит к уменьшению числа границ зерен, принимающих участие в формировании полос КЗГП, но расширяет соответствующий интервал напряжений.

Определив полное число границ зерен, принимающих участие в формировании полос КЗГП, мы можем вычислить количество полос, которое может быть построено из данных границ. Для решения данной задачи необходимо дать определение активной полосы. Будем рассматривать полосу как некоторую негладкую поверхность, составленную из  $n$  границ зерен. Если половина из этих границ зерен испытала локальную миграцию, то каждая из них вовлекла в деформацию по одной соседней границе, и вся поверхность начинает работать как когерентная сдвиговая полоса. Однако это справедливо только в том случае, если подстроившиеся границы распределены предельно однородно вдоль полосы, т.е. если две границы зерен, испытавшие миграцию, разделены одной границей, вовлекаемой в кооперацию. В противном случае половины подстроившихся границ может оказаться недостаточно для формирования активной полосы. С другой стороны, есть экспериментальные свидетельства [4,5] того, что дислокационное скопление, сформированное на некоторой границе, может включить в кооперацию более чем одну соседнюю границу. В этом случае для формирования активной полосы может



**Рис. 1.** Зависимость вероятности локальной миграции от среднего размера зерна и напряжения.  $D^2 = 0.1$  (a,b) и  $0.5$  (c,d),  $T/T_m = 0.5$  (a,c) и  $0.8$  (b,d).

оказаться достаточным, если миграции будет подвержено менее половины из  $n$  границ, составляющих полосу. Исходя из приведенных соображений, будем считать, что если полоса состоит из  $n$  границ зерен и часть из них, равная  $p_c n$ , испытала локальную миграцию, то сформирована активная полоса КЗГП. Перколяционный порог  $p_c$  ( $0 < p_c < 1$ ) в данной работе будем считать свободным параметром, вычисление которого представляет самостоятельную задачу и будет проведено в следующих публикациях. Предполагая однородное распределение промигрировавших границ зерен по объему образца, после ряда упрощающих предположений получаем (см. Приложение) следующее соотношение для числа активных полос:

$$\frac{\langle M \rangle}{M_0} \cong \frac{1}{2} \left[ 1 - \Phi \left( \frac{\sqrt{n}(p_c - p_B)}{\sqrt{2p_B(1 - p_B)}} \right) \right]. \quad (6)$$

Примеры зависимости  $\langle M \rangle / M_0$  от среднего размера зерна и напряжения приведены на рис. 2 для двух значений гомологической температуры. Этот результат определяет интервал напряжений (при заданном среднем размере зерна), в котором происходит формирование активных полос КЗГП, т.е., по сути, интервал СПД. Выражение (6) решает поставленную задачу.

## 2. Условия реализации режима СПД

Главное формальное отличие предложенной модели от существующих связано с дополнительным фактором  $\langle M \rangle / M_0$  в выражении для скорости деформации (1). Как следует из предыдущего раздела, этот фактор определяет интервал СПД в пространстве параметров материала и условий нагружения. Анализ этого интервала приводит к следующим результатам.

Поскольку в выражении (6)  $n \gg 1$ , необходимое условие отличия  $\langle M \rangle$  от нуля сводится к неравенству

$$\max_{\tau, \langle L \rangle} \{ p_B(\tau, \langle L \rangle) \} > p_c, \quad (7)$$

которое с использованием приближенного представления  $\Phi(x) \approx \sqrt{1 - \exp(-4x^2/\pi)}$ ,  $x > 0$ , принимает вид

$$D^2 < \frac{\ln^2 \left( \frac{K}{16} \frac{b_L}{b_B} \right)}{2\pi |\ln(1 - p_c^2)|}. \quad (8)$$

Известно, что после СПД в материале формируется однородная равноосная структура. Как следует из неравенства (8), условие однородности является необходимым

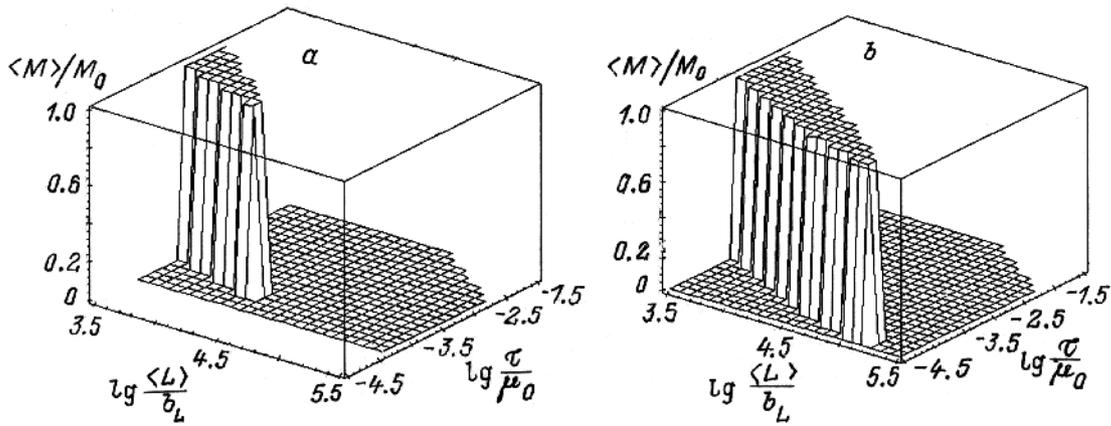


Рис. 2. Зависимость среднего числа полос КЗГП от среднего размера зерна и напряжения для двух значений гомологической температуры.  $T/T_m = 0.5$  (a) и  $0.9$  (b).  $D^2 = 0.5$ ,  $p_c = 0.2$ .

условием формирования полос КЗГП. Верхний предел дисперсии определяется перколяционным порогом  $p_c$ , параметром  $K$ , контролирующим переход в режим дислокационной ползучести, и соотношением векторов Бюргера решеточных и зернограничных дислокаций, т.е., по сути, наличием в материале достаточного количества произвольных границ зерен. Следует иметь в виду, что начальное распределение зерен по размерам может иметь дисперсию, превышающую верхний предел, диктуемый условием (8). Однако при этом стадия выхода в режим стабильного течения должна протекать в условиях активной динамической рекристаллизации, обеспечивающей структурную проработку материала. Если же стадия стабильного течения достигнута, то конечное распределение зерен по размерам должно иметь малую дисперсию, так как это необходимое условие формирования полос.

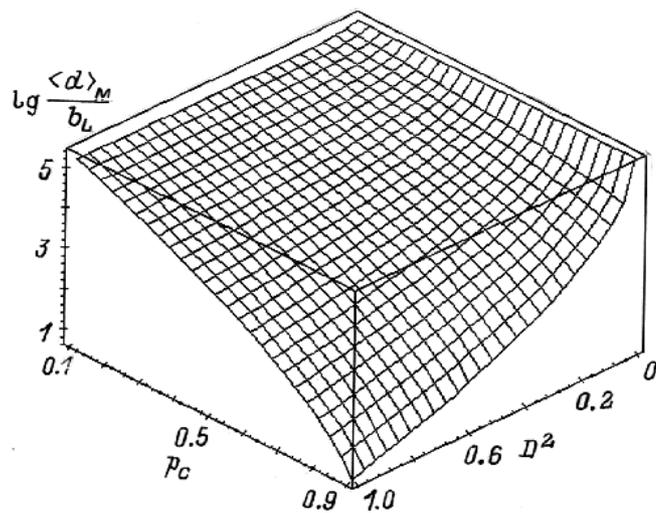


Рис. 3. Зависимость максимально допустимого среднего размера зерна от значений перколяционного порога и дисперсии распределения зерен по размерам.

Как следует из соотношения (6) и проиллюстрировано рис. 2, в любом материале при заданной температуре испытаний существует максимально допустимое значение среднего размера зерна. В материалах с размером зерна, превышающим это значение, не происходит формирования полос КЗГП, а следовательно, и невозможна реализация режима СПД. Из выражений (5) и (6) нетрудно получить явное условие для среднего размера зерна

$$\frac{\langle d \rangle}{b_L} < \frac{\langle d \rangle_M}{b_L} = \frac{2}{\chi(T)} \left( \frac{K}{4} \right)^4 \frac{b_L}{b_B} \times \exp \left[ \frac{D^2}{2} - 7D \sqrt{\frac{\pi}{2} |\ln(1 - p_c^2)|} \right]. \quad (9)$$

Известно, что повышение температуры позволяет реализовать режим СПД в материале с более крупным зерном. Выражение (9), воспроизводя эту тенденцию, позволяет сформулировать и более сильное утверждение: температурная зависимость максимально допустимого значения среднего размера зерна определяется температурной зависимостью коэффициента поверхностного натяжения границ зерен. Величина  $\langle d \rangle_M$  при прочих равных условиях контролируется значениями дисперсии и перколяционного порога, т.е. физическими параметрами, не учитываемыми известными моделями СПД. Значимость зависимости  $\langle d \rangle_M$  от  $D$  и  $p_c$  иллюстрируется рис. 3, полученным при следующих значениях параметров:  $\chi_0 = 0.02$ ;  $K = b_L/b_B = 10$ ,  $T/T_m = 0.75$ .

При выполнении условий (8) и (9) нетрудно оценить интервал напряжений, в котором происходит формирование полос КЗГП

$$\tau_{th}^{(1)} < \tau < \tau_h, \quad (10)$$

где

$$\frac{\tau_{th}^{(1)}}{\mu_0} = 2\chi(t) \frac{b_B}{b_L} \left( \frac{4}{K} \right)^3 \exp \left[ \frac{3}{4} R + A \right], \quad (11)$$

$$\frac{\tau_h}{\mu_0} = 2\chi(t) \frac{b_B}{b_L} \left( \frac{4}{K} \right)^3 \exp \left[ R - \frac{3}{4} A \right]. \quad (12)$$

Здесь для краткости обозначено

$$R^2 = \ln^2 \left[ \frac{b_L}{b_B} \frac{2b_L}{\langle d \rangle} \left( \frac{K}{4} \right)^4 \frac{e^{D^2/2}}{\chi(T)} \right] + 14D^2 \ln \frac{4}{3},$$

$$A = \frac{D}{\sqrt{2}} \left( \sqrt{\pi |\ln(1 - p_c^2)|} - \frac{2 \ln 2}{\sqrt{\pi |\ln(1 - p_c^2)|}} \right).$$

Величина  $\tau_{th}^{(1)}$  имеет смысл пороговых напряжений, превышение которых приводит к формированию активных полос КЗГП. Правая граница интервала (10)  $\tau_h$  определяет переход от режима СПД к режиму дислокационной ползучести. Нетрудно заметить, что выражения (11), (12) выдерживают контрольный предельный переход  $D \rightarrow 0$ , вырождаясь при этом до соотношений соответственно (2) и (3). В этом случае величина  $\tau_h$  перестает зависеть от температуры, пропорциональна постоянной  $K$  и обратно пропорциональна среднему размеру зерна. Пороговые напряжения при  $D \rightarrow 0$  зависят от температуры как  $(1 - T/T_m)^{\nu/2}$  и от размера зерна как  $\langle d \rangle^{-3/4}$ . В общем случае  $D \neq 0$  зависимость  $\tau_{th}^{(1)}$  от температуры может усиливаться до  $\propto (1 - T/T_m)^{2\nu}$ , при этом зависимость от среднего размера зерна ослабляется вплоть до полной независимости при достаточно высоких значениях  $D$ . Анализ температурной зависимости экспериментальных значений пороговых напряжений обычно выполняется в предположении, что  $\sigma_{th} \propto \exp(E/kT)$ . В ряде случаев это оказывается оправданным и приводит к хорошо определенному значению энергии активации  $E$  [14]. Однако нетрудно заметить, что экспериментальные результаты для высокоскоростной СПД [15] лучше аппроксимируются линейной ( $\sigma_{th} \propto a - bT$ ), чем экспоненциальной, зависимостью. Возникающая при этом проблема неоднозначности интерпретации может определяться следующим обстоятельством. Величина скорости деформации в интервале (10) определяется в соответствии с соотношением (1) значением скорости сдвига  $V$  вдоль полосы. Причем механизм, контролирующий скорость сдвига  $V$ , может иметь собственное пороговое напряжение  $\tau_{th}^{(2)}$ , отличающееся от  $\tau_{th}^{(1)}$ . Если  $\tau_{th}^{(2)} < \tau_{th}^{(1)}$ , то интервал СПД определяется условием (10), если же выполняется обратное соотношение  $\tau_{th}^{(2)} > \tau_{th}^{(1)}$ , то интервал СПД сужается и роль пороговых напряжений переходит к величине  $\tau_{th}^{(2)}$ , т.е. реальный вид температурной зависимости пороговых напряжений определяется температурной зависимостью максимальной из величин  $\tau_{th}^{(1)}$ ,  $\tau_{th}^{(2)}$ ; при этом пороговые напряжения  $\tau_{th}^{(1)}$ , ответственные за формирование полос КЗГП, зависят от температуры в соответствии с выражением (11) степенным образом, а напряжения  $\tau_{th}^{(2)}$ , связанные с аккомодационными процессами, обеспечивающими сдвиг вдоль полосы КЗГП, — активационным. Тем самым в представлении о СПД вводятся понятия пороговых напряжений первого и второго рода: порог  $\tau_{th}^{(1)}$  определяет переход к формированию полос КЗГП, а порог  $\tau_{th}^{(2)}$  за-

дает условия активизации механизма, контролирующего скорость сдвига вдоль полосы.

Даже не конкретизируя механизм, контролирующей скоростью сдвига вдоль полосы КЗГП, мы можем получить на основе соотношений (10)–(12) ряд следствий, определяющих особенности СПД в различных ее проявлениях. Так, для СМК материалов интервал оптимальных напряжений (10) перемещается в сторону более высоких значений. Величина этого сдвига легко оценивается. В пределе нанокристаллических размеров зерен пороговые напряжения  $\tau_{th}^{(1)}$  перестают зависеть от температуры (что непосредственно следует из соотношения (2)), и может быть реализован режим низкотемпературной СП.

Обычный путь к высокоскоростной СП — это малый размер зерна и высокая температура, что однако, приводит к проблеме структурной стабильности, решаемой через создание условий, подавляющих рост зерен. Другой путь — это высокие напряжения. Однако их нельзя повысить за пределы правой границы интервала (10), так как при этом деформация переходит в режим дислокационной ползучести. Отодвинуть правую границу интервала в сторону более высоких напряжений можно, увеличив значение параметра  $K$ , т.е. приняв меры по подавлению дислокационной ползучести (либо включения, либо высокие барьеры Пайерлса). Именно поэтому композиты и керамики — типичные объекты для высокоскоростной СП. Однако следует заметить, что принятые меры не должны подавлять возможность локальной подстройки ГЗ в окрестности тройных стыков, т.е. условия формирования полос должны сохраняться.

Проведенное рассмотрение позволяет сформулировать следующие выводы.

- 1) СПД осуществляется благодаря действию специфического деформационного механизма, обеспечивающего когерентное поведение материала в макроскопических масштабах. Многообразие различных вариантов СПД объединяется природой крупномасштабного течения, реализующегося в форме полос КЗГП.
- 2) Анализ условия формирования полос позволяет определить интервал СПД без ссылки на неподдающийся расчету параметр скоростной чувствительности  $m$  и достаточно произвольное условие  $m > 0.3$ .
- 3) Величина скорости деформации и форма  $S$ -образной кривой в интервале СПД определяются механизмом, контролирующим скорость сдвига вдоль полосы КЗГП.
- 4) Если механизм, контролирующей скоростью сдвига вдоль полосы КЗГП, имеет порог по напряжениям, превышающий порого формирования полос, то интервал СПД становится уже интервала формирования активных полос. Возникают новые представления о пороговых напряжениях первого и второго рода, отличающихся характером температурной зависимости, что согласуется с известными экспериментальными результатами.
- 5) Развитый подход включает в формулировку теории спектр разориентировок границ зерен, так как все границы характеризуются различными значениями коэффициента поверхностного натяжения, который в свою очередь

определяется разориентировкой на заданной границе. Это приводит к проблеме распределенных параметров, которая из общих соображений должна возникать при анализе проявления микромеханизмов на макроуровне.

б) Переход от независимых процессов, происходящих в различных частях деформируемого образца, к когерентным процессам в масштабе всего образца аналогичен стремлению к бесконечности радиуса корреляции в фазовых переходах второго рода, адекватным аппаратом описания которых являются перколяционные модели. Аналогия позволяет переносить представления и методы, развитые в теории фазовых переходов второго рода, на теорию СПД.

Модель содержит вопросы, требующие дальнейших исследований: влияние кавитации на условие формирования полос, механизм динамического переключения полос и др. Для получения количественных результатов необходима более тщательная оценка качества приближения, приводящего к исходному условию миграции (2). Однако основа модели достаточно привлекательна, так как позволяет единообразно объяснить многие экспериментально установленные факты: однородная структура после СПД, существование верхнего предела для среднего размера зерна, наличие и природа интервала напряжений, в котором может быть реализован режим СПД. Развитые представления позволяют анализировать различные предельные варианты СПД. Для описания материала предлагается более широкий набор характеристик, чем использовавшийся в предыдущих моделях: модуль сдвига, средний размер зерна, нормированный на постоянную решетки, и температурная зависимость (пусть даже некоторого эффективного) коэффициента диффузии. Неполнота этого традиционного набора проявляется в том, что принципиально различные материалы оказываются представителями одного класса с общими свойствами.

## Приложение

Максимально возможное число полос в образце равно  $M_0 = l/\langle d \rangle$ , где  $l$  — длина образца. Каждая полоса в направлении проскальзывания составлена из  $n = 2^{1/2}h/\langle L \rangle$  границ зерен. Здесь  $h$  — толщина образца в направлении проскальзывания. Полное число границ зерен, расположенных во всех полосах, равно  $nM_0$ . Вероятность локальной миграции для каждой из границ равна известной величине  $p_B$ . Поскольку  $nM_0 \gg 1$ , полное число границ зерен, испытавших локальную миграцию, можно считать мало отличающимся от среднего значения  $p_B n M_0$ . Задача сводится к распределению этого числа границ по  $M_0$ -полосам и расчету числа полос, в которых число промигрировавших границ превышает значение  $n_c = p_c n$ . При однородном распределении промигрировавших границ по объему образца вероятность того, что в  $i$ -й полосе ( $i = 1, 2, \dots, M_0$ ) будет  $n_i$  подстроившихся границ, определяется многомерным

гипергеометрическим распределением

$$w(n_1, n_2, \dots, n_{M_0}) = \binom{n}{n_1} \binom{n}{n_2} \dots \binom{n}{n_{M_0}} \times \frac{\delta(n_1 + \dots + n_{M_0} - p_B n M_0)}{\binom{n M_0}{p_B n M_0}}.$$

Тогда вероятность того, что точно в  $M$ -полосах число промигрировавших границ превышает  $n_c$ , равна

$$W(M) = \binom{M_0}{M} \sum_{n_1=n_c}^n \dots \sum_{n_M=n_c}^n \sum_{n_{M+1}=0}^{n_c-1} \dots \sum_{n_{M_0}=0}^{n_c-1} \times w(n_1, n_2, \dots, n_{M_0}).$$

Для расчета среднего числа активных полос

$$\langle M \rangle = \sum_{M=0}^{M_0} M W(M)$$

упростим плотность  $w(n_1, n_2, \dots, n_{M_0})$ , предполагая некоррелированность случайных величин  $n_i$ . Одномерные плотности, задающие распределения  $n_i$ , аппроксимируем распределением Гаусса

$$w(n_1, n_2, \dots, n_{M_0}) \cong \prod_{i=1}^{M_0} f(n_i),$$

$$f(n_i) \cong \sqrt{\frac{n M_0 - 1}{2\pi p_B (1 - p_B) n^2 (M_0 - 1)}} \times \exp \left[ -\frac{(n M_0 - 1)(n_i - p_B n)^2}{2 p_B (1 - p_B) (M_0 - 1) n^2} \right].$$

И наконец, заменяя суммирование по  $n_i$  интегрированием в соответствующих пределах, получаем окончательное выражение (6).

## Список литературы

- [1] V.V. Astanin, O.A. Kaibyshev, S.N. Faizova. Scripta Met. Mater. **25**, 12, 2663 (1991).
- [2] V.V. Astanin, O.A. Kaibyshev, S.N. Faizova. Acta. Met. Mater. **42**, 8, 2617 (1994).
- [3] O.A. Kaibyshev, V.V. Astanin, S.N. Faizova. Advanced Materials '93, III/B: Composites, Grain Boundaries and Nanophase Materials / Ed. M. Sakai et al. Trans. Mat. Res. Soc. Jpn. **16B**, 1473 (1994).
- [4] V.V. Astanin, S.N. Faizova, K.A. Padmanabhan. Mat. Sci. Technol. **12**, 489 (1996).
- [5] V.V. Astanin, O.A. Kaibyshev. Materials Science Forum / Ed. T. Lanadon. Trans. Tech Publication, Switzerland (1994). V. 170–172. P. 23.
- [6] M.G. Zelin, N.A. Krasilnikov, R.Z. Valiev, M.W. Grabski, H.S. Yang, A.K. Mukherjee. Acta Met. **42**, 1, 119 (1994).

- [7] M.G. Zelin, A.K. Mukherjee. *Acta Met. Mater.* **43**, 6, 2359 (1995).
- [8] H.W. Hayden, S. Floreen, P.D. Goodwell. *Metallurg. Trans.* **3**, 833 (1972).
- [9] J.W. Edington, K.N. Melton, C.P. Cutler. *Prog. Mater. Sci.* **21**, 61 (1976).
- [10] V.V. Astanin, A.V. Sisanbaev, A.I. Pshenichnyuk, O.A. Kaibyshev. *Scripta Met. Mater.* **36**, 1, 117 (1997).
- [11] V.V. Astanin, O.A. Kaibyshev, A.I. Pshenichnyuk. *Materials Science Forum* / Ed. A. Chokshi. Trans Tech Publication, Switzerland (1997). V. 243–245. P. 41.
- [12] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. *Статистическая физика*. Наука, М. (1976). Ч. 1. 584 с.
- [13] J.H. Gittus. *Phil. Trans. R. Soc. Lond.* **A288**, 121 (1978).
- [14] F.A. Mohamed. *J. Mater. Sci.* **18**, 582 (1983).
- [15] D.-W. Kum. *Mater. Sci. Forum* / Ed. A. Chokshi. Trans Tech Publication, Switzerland (1997). V. 243–245. P. 287.