Спектр непрямых магнитоэкситонов в связанных квантовых ямах

© Ю.Е. Лозовик, А.М. Рувинский*

Институт спектроскопии Российской академии наук,
142092 Троицк, Московской обл., Россия
*Московский институт стали и сплавов,
117936 Москва, Россия

*(Поступила в Редакцию 12 мая 1997 г.
В окончательной редакции 7 июля 1997 г.)*

Рассмотрен непрямой экситон Мотта (с пространственно-разделенными электроном и дыркой) в связанных квантовых ямах в скрещенных магнитном и электрическом полях. Рассчитан спектр экситона, в случае когда расстояние между квантовыми ямами электрона и дырки превосходит боровский радиус экситона. Найдена вероятность рождения магнитоэкситона и определена ее зависимость от электрического поля. Рассмотрено поглощение электромагнитного излучения между уровнями непрямых магнитоэкситонов в связанных квантовых ямах.

1. Электронно-дырочные (e, h) системы в низкоразмерных структурах (квантовых ямах, квантовых точках и проволоках) в последнее время вызывают значительный интерес [1–7], в частности, в связи с возможностью экспериментального изучения коллективных свойств экситонов с временем жизни бóльшим, чем время термализации. Этому критерию удовлетворяют экситоны с пространственно разделенными e и h (непрямые экситоны) в двойных или в связанных квантовых ямах, так как процесс рекомбинации e и h подавлен в них вследствие слабого перекрытия волновых функций электрона и дырки, локализованных в различных квантовых ямах. Скорость рекомбинации также можно уменьшить включением электрического поля перпендикулярно слоям в непрямом режиме, уменьшающим перекрытие волновых функций e и h. Изменение магнитного поля приводит к сильному изменению фотолюминесценции и других свойств непрямых экситонов [6]. Система экситонов, состоящих из пространственно разделенных e и h, может переходить в сверхтекучее состояние, которое проявляется в виде незатухающих токов в каждой из ям [8,9], конденсироваться в жидкую фазу и образовывать другие фазы [10–14] (некоторые из этих фаз имеют аналоги в трехмерных системах [15–18]). Магнитные поля существенно влияют на коллективные свойства экситонов [19–25].

Перспективы экспериментального исследования магнитоэкситонов в двойных и связанных квантовых ямах требуют в качестве первого шага детального изучения свойств изолированных магнитоэкситонов в пространственно разделенными электроном и дыркой, их поведения в электрических полях, а также расчета спектров магнитоэкситонного поглощения.

В настоящей работе рассчитан спектр магнитоэкситона в связанных квантовых ямах (СКЯ) в скрещенных электрическом и магнитном полях (раздел 2). Рассчитаны вероятности рождения магнитоэкситона, в частности, в скрещенных электрическом и магнитном полях. В разделе 3 рассмотрены переходы между магнитоэкситонными уровнями с поглощением (или излучением) длинноволнового фотона.

2. Рассмотрим экситон с пространственно разделенными e и h в связанных квантовых ямах в магнитном и электрическом полях. Мы предполагаем, что расстояние между экситонными уровнями намного меньше характерной энергии размерного квантования e и h, поэтому гамильтониан электрона и дырки, расположенных в СКЯ, учитывает лишь продольные степени свободы

$$\hat{H} = \frac{1}{2m_e}\left(\frac{\hbar}{i}\nabla_e + \frac{e}{c}\mathbf{A}_e\right)^2 + \frac{1}{2m_h}\left(\frac{\hbar}{i}\nabla_h - \frac{e}{c}\mathbf{A}_h\right)^2 - \frac{e^2}{\varepsilon\sqrt{D^2 + (\mathbf{r}_e - \mathbf{r}_h)^2}} + e\mathbf{E}(\mathbf{r}_e - \mathbf{r}_h), \qquad (1)$$

где $\mathbf{r}_{e,h}$ — двумерные векторы e и h (роль межслоевого туннелирования будет рассмотрена в другой работе).

Уравнение Шредингера для экситона в магнитном поле инвариантно относительно трансляции электрона и дырки на один и тот же вектор и одновременного калибровочного преобразования $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ (более общий случай рассмотрен в [14]). Эта инвариантность приводит к закону сохранения "магнитного импульса" экситона $\mathbf{P}$, совпадающего с обычным импульсом центра масс при $H = 0$. Существование сохраняющейся величины в магнитном поле существенно упрощает расчеты для трехмерных [26–28] и двумерных магнитоэкситонов [29]. Далее используем закон сохранения магнитного импульса для расчета спектра непрямого двумерного магнитоэкситона.

Оператор магнитного импульса экситона имеет вид

$$\hat{\mathbf{P}} = \frac{\hbar}{i}\nabla_e + \frac{e}{c}\mathbf{A}_e + \frac{\hbar}{i}\nabla_h - \frac{e}{c}\mathbf{A}_h - \frac{e}{c}\big[\mathbf{H}(\mathbf{r}_e - \mathbf{r}_h)\big]. \qquad (2)$$

Здесь мы использовали симметричную калибровку векторного потенциала $\mathbf{A} = (1/2)[\mathbf{Hr}]$.

Используя $[\hat{H}, \hat{\mathbf{P}}] = 0$, ищем волновые функции экситона как собственные функции оператора $\hat{\mathbf{P}}$

$$\Psi(\mathbf{r}_e, \mathbf{r}_h) = \exp\left\{i\frac{\mathbf{R}}{\hbar}\left(\mathbf{P} + \frac{e}{2c}[\mathbf{Hr}]\right)\right\}\Phi_p(\mathbf{r}), \qquad (3)$$

где $\mathbf{P}$ — собственное значение $\hat{\mathbf{P}}$, $\mathbf{R} = (m_e\mathbf{r}_e + m_h\mathbf{r}_h)/M$, $M = m_e + m_h$, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_e - \mathbf{r}_h$.

Волновые функции относительного движения $\Phi_p(\mathbf{r})$ являются решением уравнения

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta+\frac{e\hbar}{2i\mu c}\gamma[\mathbf{H},\mathbf{r}]\nabla+\frac{e^2}{8\mu c^2}H^2r^2+\frac{e}{cM}[\mathbf{H},\mathbf{r}]\mathbf{P}+e\mathbf{E}\mathbf{r}+\frac{P^2}{2M}-\frac{e^2}{\varepsilon\sqrt{D^2+r^2}}\right)\Phi_p(\mathbf{r})=E\Phi_p(\mathbf{r}), \quad (4)$$

где $\mu=m_em_h/M$ — приведенная масса экситона в плоскости квантовых ям (КЯ), $l=\sqrt{\hbar c/eH}$ — магнитная длина.

Ищем волновую функцию $\Phi_p(\mathbf{r})$ в виде

$$\mathbf{\Phi}_p(\mathbf{r})=\Phi(\mathbf{r}-\alpha\boldsymbol{\rho}_0)\exp\left(i\frac{\mathbf{r}\mathbf{P}'}{2\hbar}\gamma\alpha\right), \quad (5)$$

где $\mathbf{P}'=\mathbf{P}+Mc[\mathbf{H},\mathbf{E}]/H^2$, $\boldsymbol{\rho}_0=c[\mathbf{H},\mathbf{P}']/eH^2$, $\gamma=(m_h-m_e)/M$, α — функция H и D, которая определяется так, чтобы убрать зависимость от магнитного импульса и электрического поля в (4).

Далее мы предполагаем, что расстояние D между КЯ существенно превышает средний размер экситона $|\langle\mathbf{r}_e-\mathbf{r}_h\rangle|$ в плоскости КЯ. Тогда оператор кулоновского взаимодействия e и h можно приближенно представить в виде

$$-\frac{e^2}{\varepsilon D}+\frac{e^2(\mathbf{r}_e-\mathbf{r}_h)^2}{2D^3\varepsilon}. \quad (6)$$

Уравнение (4) при помощи преобразования (5) и при

$$\alpha(H,D)=\frac{4\mu}{M}\frac{1}{\beta^2-\gamma^2} \quad (7)$$

приводится к виду

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta+\frac{e\hbar}{2i\mu c}\gamma\mathbf{H}[\mathbf{r},\nabla]+\frac{e^2}{8\mu c^2}H^2r^2\beta^2\right)\Phi(\mathbf{r})=\mathcal{E}\Phi(\mathbf{r}), \quad (8)$$

где

$$E=\mathcal{E}+\frac{P^2}{2M}(1-\alpha)-\frac{c\alpha}{H^2}[\mathbf{H},\mathbf{E}]\mathbf{P}-\frac{Mc^2E^2}{2H^2}\alpha-\frac{e^2}{\varepsilon D}, \quad (9)$$

$\beta=\sqrt{1+4l^4/aD^3}$, $a=\varepsilon\hbar^2/e^2\mu$ — эффективный боровский радиус экситона. Таким образом, для $\Phi(\mathbf{r})$ получаем

$$\Phi_{nm}(\mathbf{r})=\sqrt{\frac{n!\beta}{2\pi(n+|m|!)}}\frac{\exp(im\phi)}{l}\left(\sqrt{\frac{\beta}{2}}\frac{r}{l}\right)^{|m|}\times L_n^{|m|}\left(\frac{\beta r^2}{2l^2}\right)\exp\left(-\frac{\beta r^2}{4l^2}\right), \quad (10)$$

где L_n^m — полиномы Лагерра. Спектр (8) полностью дискретен

$$\mathcal{E}_{nm}=\hbar\omega_c\beta\left(n+\frac{1}{2}(|m|+1)\right)+\frac{m}{2}\gamma\hbar\omega_c, \quad (11)$$

где $\omega_c=eH/\mu c$ — циклотронная частота.

Если $\gamma=0$, уровни вырождены по квантовому числу $N=2n+|m|$. Каждое состояние, исключая $(0,0), N+1$ кратно вырождено. Вырожденными также являются состояния $(n\neq 0,\ 0)$ и $(0,\ m\neq 0)$, для которых $\gamma/\beta=(2n-|m|)/m$.

Приближение (6) справедливо при условии $D^2\gg\langle(\mathbf{r}+\alpha\boldsymbol{\rho}_0)^2\rangle$, т. е. при

$$\left(\frac{D}{l}\right)^4+4\frac{D}{a}\gg 1, \quad (12)$$

$$\frac{D}{l}+\frac{l^3}{aD^2}\frac{M}{\mu}\gg\frac{P'l}{\hbar}. \quad (13)$$

Неравенство (12) справедливо для слабых и промежуточных магнитных полей при $D\gg a$, а для сильных магнитных полей $(l\ll a)$ — при более слабом условии $D\gg l$. Неравенство (13) справедливо при небольших значениях величины P' (т. е. при не очень больших магнитных импульсах и в слабых электрических полях).

При $H=0$ получаем из (9), (11)

$$E_{nm}=-\frac{e^2}{\varepsilon D}\left(1-\sqrt{\frac{a}{D}}(2n+|m|+1)\right)+\frac{P^2}{2M}-\frac{Mc^2E^2}{2H_0^2}, \quad (14)$$

где $H_0=\sqrt{Mc^2/\varepsilon D^3}$. В частном случае $E=0$ (14) согласуется с результатом [30]. В сильных магнитных полях при $l^4\ll aD^3$ получаем результат для непрямого магнитоэкситона

$$E_{nm}=\hbar\omega_c\left(n+\frac{1}{2}(|m|+\gamma m+1)\right)-\frac{e^2}{\varepsilon D}\left(1-\frac{l^2}{D^2}(2n+|m|+1)\right)+\left(1-\frac{l^4}{aD^3}\frac{M}{\mu}\right)\times\left(\frac{P^2}{2}\frac{c^2}{\varepsilon D^3H^2}-\frac{c}{H^2}[\mathbf{H},\mathbf{E}]\mathbf{P}-\frac{Mc^2}{2H^2}E^2\right), \quad (15)$$

полученный в [31].

Используя (9), можно определить скорость дрейфа магнитоэкситона

$$\mathbf{V}=\frac{\partial E_{nm}(\mathbf{P},\mathbf{E})}{\partial\mathbf{P}}\Big|_{P=0}=\frac{[\mathbf{E},\mathbf{H}]c}{H^2+H_0^2} \quad (16)$$

и дипольный момент экситона

$$\mathbf{d}=-\frac{\partial E_{nm}(\mathbf{P},\mathbf{E})}{\partial\mathbf{E}}=\frac{Mc^2\mathbf{E}+c[\mathbf{P},\mathbf{H}]}{H^2+H_0^2}. \quad (17)$$

Поляризация экситона является монотонно убывающей функцией H

$$\alpha_{\text{ex}}=\frac{Mc^2}{H^2+H_0^2}. \quad (18)$$

Спектр (9) позволяет обычным образом определить эффективную массу экситона в виде

$$M_{\text{ex}} = \left(\frac{\partial^2 E_{nm}}{\partial P^2}\right)^{-1} = M + H^2\frac{\varepsilon D^3}{c^2}. \qquad (19)$$

Вероятность рождения экситона, как известно [26], определяется множителем $|\Psi(0)|^2$. Согласно (3), (5), (10), для уровня $n = m = 0$ вероятность рождения экситона определяется

$$|\Psi(0)|^2 = \frac{\beta}{2\pi l^2}\exp\left(-\frac{\beta\alpha^2\rho_0^2}{2l^2}\right). \qquad (20)$$

В отсутствие электрического поля (20) имеет вид

$$|\Psi(0)|^2 = \frac{e}{2\pi\hbar c}\sqrt{H^2 + 4H_0^2\mu/M}$$
$$\times \exp\left(-\frac{2\pi^2\hbar c}{e\lambda^2}\frac{H^2\sqrt{H^2+4H_0^2\mu/M}}{(H^2+H_0^2)^2}\right), \qquad (21)$$

где λ — длина волны фотона.

Зависимость вероятности рождения экситона от электрического поля определяется выражением

$$|\Psi(0)|^2 = \frac{e}{2\pi\hbar c}\sqrt{H^2 + 4H_0^2\mu/M}$$
$$\times \exp\left(-\frac{\sqrt{H^2+4H_0^2\mu/M}}{2(H^2+H_0^2)^2}\frac{E^2M^2c^3}{\hbar e}\right). \qquad (22)$$

С ростом H вероятность рождения магнитоэкситона возрастает, а с ростом электрического поля уменьшается.

3. Рассмотрим теперь задачу о поглощении длинноволнового фотона существующим непрямым магнитоэкситоном в связанных КЯ. Вероятность межэкситонных переходов, сопровождающихся поглощением (или излучением) фотона, есть

$$W = 2\pi\left|\langle 2|\hat F|1\rangle\right|^2\delta(E_2 - E_1 \mp \hbar\omega), \qquad (23)$$

где $E_{1,2}$ — экситонные уровни (9), (11),

$$\hat F = \frac{e}{c}\left(\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{r}_e)\hat{\mathbf{v}}_e - \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{r}_h)\hat{\mathbf{v}}_h\right), \qquad (24)$$

$$\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{r},t) = \sum_{k\alpha}\sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{Vk}}\mathbf{e}_\alpha c_{k\alpha}e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)} + \text{h.c.},$$

$\mathbf{e}_\alpha$ — векторы круговой поляризации фотона в плоскости КЯ,

$$\hat V_{e,h} = \frac{1}{m_{e,h}}\left(\frac{\hbar}{i}\nabla_{e,h} \pm \frac{e}{2c}[\mathbf{H},\mathbf{r}_{e,h}]\right) \text{ —}$$

операторы скорости электрона и дырки в магнитном поле. Матричный элемент оператора перехода $\hat F$ в переменных векторов центра тяжести $\mathbf{R}$ и относительных координат $\mathbf{r}$ электрона и дырки имеет вид

$$\frac{e}{c}\langle n_2m_2\mathbf{P}_2;1|\frac{\tilde{\mathbf{A}}_e - \tilde{\mathbf{A}}_h}{M}\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\mathbf{R}}$$
$$+\left(\frac{\tilde{\mathbf{A}}_e}{m_e}+\frac{\tilde{\mathbf{A}}_h}{m_h}\right)\left(\frac{\hbar}{i}\nabla_r + \frac{e}{2c}[\mathbf{H},\mathbf{R}]\right)$$
$$+\frac{e}{2cM}[\mathbf{H},\mathbf{r}]\left(\frac{m_h}{m_e}\tilde{\mathbf{A}}_e - \frac{m_e}{m_h}\tilde{\mathbf{A}}_h\right)|0;n_1m_1\mathbf{P}_1\rangle, \qquad (25)$$

где $|nm\mathbf{P}\rangle$ характеризует состояние экситона, $|1\rangle$, $|0\rangle$ — состояния электромагнитного поля с числами $1, 0$. Далее нас будут интересовать прямые переходы между магнитоэкситонными состояниями с импульсом $P = 0$. После интегрирования по $\mathbf{R}$ получаем

$$\langle n_2m_2\mathbf{P};1|\hat F|0;n_1m_1\mathbf{P}\rangle = \langle n_2m_2;1|\frac{e}{\mu c}\tilde{\mathbf{A}}(0)$$
$$\times\left(\frac{e}{2c}\gamma[\mathbf{H},\mathbf{r}] + \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\right)|0;n_1m_1\rangle. \qquad (26)$$

Учитывая (26), найдем силу осциллятора перехода между уровнями (11), определенную как (см., например, [32])

$$f_{1\to 2} = \frac{2\mu}{\hbar^2}(E_2 - E_1)|\langle 2|r_\pm|1\rangle|^2, \qquad (27)$$

где $r_\pm = (x \pm iy)/2$.

Интегрирование в (27) по угловой переменной приводит к стандартному правилу отбора по магнитному моменту $m : m \to m \pm 1$. Переход $m \to m+1$ соответствует поглощению фотона правой поляризации $(\mathbf{e}^+ = (-i/\sqrt{2})(\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y))$, а при переходе $m \to m-1$ поглощается фотон левой поляризации $(\mathbf{e}^- = (e^+)^*)$. Сила осциллятора (27) перехода $(n_1, m) \to (n_2, m\pm 1)$ имеет вид

$$f_{n_1m}^{n_2m\pm1} = \left(n_2 - n_1 + \frac{|m\pm1| - |m|}{2} \pm \frac{\gamma}{2\beta}\right)$$
$$\times\left(D_{n_1m}^{n_2m\pm1}\right)^2, \qquad (28)$$

где

$$D_{n_1m}^{n_2m\pm1} = \sqrt{\frac{n_1!\,n_2!}{(n_1+|m|)!\,(n_2+|m\pm1|)!}}$$
$$\times\int e^{-x}x^{\frac{|m|+|m\pm1|+1}{2}}L_{n_1}^{|m|}(x)L_{n_2}^{|m\pm1|}(x)dx. \qquad (29)$$

При $m \geqslant 0$, $n_1 = n_2 = 0$ сила осциллятора есть

$$f_{0m}^{0m+1} = \frac{(m+1)}{2}\left(1 + \frac{\gamma}{\beta}\right), \qquad (30)$$

а при $m \leqslant -1$ переход $(0,m) \to (0,m-1)$ характеризуется силой осциллятора

$$f_{0m}^{0m-1} = \frac{-m+1}{2}\left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right). \qquad (31)$$

Рассмотрим переходы из нижнего состояния (0, 0). Переходы вида $(0,0) \to (n \neq 0, \pm 1)$ оказываются запрещенными, так как $D_{00}^{n,\pm 1} = 0$. Приведем значения для сил осцилляторов, соответствующих переходам между низколежащими уровнями,

$$f_{00}^{01} = \frac{1}{2} f_{10}^{11} = \frac{1}{2} + \frac{\gamma}{2\beta}, \qquad (32)$$

$$f_{00}^{0-1} = f_{01}^{10} = \frac{1}{2} f_{10}^{1-1} = \frac{1}{2} - \frac{\gamma}{2\beta}. \qquad (33)$$

Сила осциллятора (28) является монотонной функцией H

$$f_{n_1 m}^{n_2 m \pm 1} = (D_{n_1 m}^{n_2 m \pm 1})^2 \left(n_2 - n_1 + \frac{|m \pm 1| - |m|}{2} \pm \frac{\gamma H}{2\sqrt{H^2 + 4H_0^2 \mu / M}} \right). \qquad (34)$$

Для экситона с тяжелой (легкой) дыркой $f_{n_1 m}^{n_2 m+1}$ возрастает (убывает) с ростом H, а $f_{n_1 m}^{n_2 m-1}$ убывает (возрастает).

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, программами "Физика твердотельных наноструктур" и "Поверхностные атомные структуры".

Ю.Е.Л. признателен М. Байеру (M. Bayer), А. Форхелю (A. Forchel) и В.Б. Тимофееву за полезное обсуждение результатов во время пребывания в Вюрцбурге.

Список литературы

[1] T. Fukuzawa, E.E. Mendez, J.M. Hong. Phys. Rev. Lett. **64**, *25*, 3066 (1990).
[2] L.V. Butov, V.D. Kulakovskii, G.E.W. Bauer, A. Forchel, D. Grützmacher. Phys. Rev. **B46**, *19*, 12 765 (1992).
[3] J.-P. Cheng, J. Kono, B.D. McCombe, I. Lo, W.C. Mitchel, C.E. Stutz. Phys. Rev. Lett. **74**, *3*, 450 (1995).
[4] M. Bayer, V.B. Timofeev, F. Faller, T. Gutbrod, A. Forchel. Phys. Rev. **B54**, *12*, 8799 (1996).
[5] U. Sivan, P.M. Solomon, H. Strikman. Phys. Rev. Lett. **68**, *4*, 1196 (1992).
[6] L.V. Butov, A. Zrenner, G. Abstreiter, G. Böhm, G. Weigmann. Phys. Rev. Lett. **73**, *2*, 304 (1994).
[7] L.V. Butov, A. Zrenner, G. Abstreiter, A.V. Petinova, K. Eberl. Phys. Rev. **B52**, *16*, 12 153 (1995).
[8] Ю.Е. Лозовик, В.И. Юдсон. Письма в ЖЭТФ **22**, *11*, 274 (1975); ЖЭТФ **71**, *2(8)*, 738 (1976).
[9] Ю.Е. Лозовик, О.Л. Берман. Письма в ЖЭТФ **64**, *8*, 526 (1996).
[10] D. Yoshioka, H. Fukuyama. J. Phys. Soc. Jpn. **45**, *1*, 137 (1978).
[11] Yu.A. Bychkov, E.I. Rashba. Solid State Commun. **48**, *4*, 399 (1983).
[12] X.M. Chen, J.J. Quinn. Phys. Rev. Lett. **67**, *7*, 895 (1991).
[13] X. Zhy, P.B. Littlewood, M.S. Hybertsen, T.M. Rice. Phys. Rev. Lett. **74**, *9*, 1633 (1995).
[14] Yu.E. Lozovik. Physica E, in press.
[15] Л.В. Келдыш, Ю.В. Копаев. ФТТ **6**, *9*, 2791 (1964).
[16] А.Н. Козлов, Л.А. Максимов. ЖЭТФ **48**, *4*, 1184 (1965).
[17] Л.В. Келдыш, А.Н. Козлов. ЖЭТФ **54**, *3*, 978 (1968).
[18] B.I. Halperin, T.M. Rice. Sol. Stat. Phys. **21**, *1*, 115 (1968).
[19] И.В. Лернер, Ю.Е. Лозовик. ЖЭТФ **80**, *4*, 1488 (1981).
[20] А.Б. Дзюбенко, Ю.Е. Лозовик. ФТТ **25**, *5*, 1519 (1983); ФТТ **26**, *5*, 1540 (1984).
[21] D. Paquet, T.M. Rice, K. Ueda. Phys. Rev. **B32**, *8*, 5208 (1985).
[22] A.B. Dzuybenko, Yu.E. Lozovik. J. Phys. **A24**, *2*, 415 (1991).
[23] A.H. MacDonald, E.H. Rezayi. Phys. Rev. **B42**, *5*, 3224 (1990).
[24] С.М. Дикман, С.В. Иорданский. Письма в ЖЭТФ **63**, *1*, 43 (1996).
[25] D.S. Chemla, J.B. Stark, W.H. Knox. In: Ultrafast Phenomena VIII Ed. J.-L. Martin et al. Springer (1993). P. 21.
[26] Л.П. Горьков, И.Е. Дзялошинский. ЖЭТФ **53**, *2(8)*, 717 (1967).
[27] Б.П. Захарченя, Р.П. Сейсян. УФН **97**, *2*, 193 (1969).
[28] Р.П. Сейсян. Спектроскопия диамагнитных экситонов. Наука, М. (1994).
[29] И.В. Лернер, Ю.Е. Лозовик. ЖЭТФ **78**, *3*, 1167 (1980).
[30] Ю.Е. Лозовик, В.Н. Нишанов. ФТТ **18**, *11*, 3267 (1976).
[31] Yu.E. Lozovik, A.M. Ruvinsky. Phys. Lett. **A227**, *314*, 271 (1997).
[32] H. Hasegawa, R.E. Howard. J. Phys. Chem. Sol. **21**, *3/4*, 179 (1961).