Зависимость резонансной проводимости симметричных двухбарьерных структур от амплитуды высокочастотного поля

© Е.И. Голант, А.Б. Пашковский

Научно-исследовательский институт "Исток",
141120 Фрязино, Россия

(Получена 5 марта 1996 г. Принята к печати 20 января 1997 г.)

Для симметричной двухбарьерной резонансно-туннельной структуры с высокими тонкими барьерами при бесстолкновительном транспорте электронов на основе решения нестационарного уравнения Шредингера, описывающего резонансное взаимодействие электронов с высокочастотным полем, найдена аналитическая зависимость проводимости от амплитуды. Показано, что под действием высокочастотного поля с частотой ω и амплитудой, приблизительно соответствующей утроенной ширине резонансного уровня, до половины электронов, проходящих через этот уровень, может переходить на соседний, испуская или поглощая квант энергии $\hbar\omega$.

Задачи о прохождении электронов через квантово-размерные структуры в высокочастотном (ВЧ) электрическом поле как бесконечно малой [1], так и конечной [2] амплитуды весьма актуальны как в теоретическом, так и в прикладном аспекте. Начиная с основополагающей работы [3] и обнаружения осцилляторов большой силы при межподзонных переходах в двухбарьерных резонансно-туннельных структурах (ДБРТС) [4], было выдвинуто много предложений по использованию таких переходов для лазерной генерации электромагнитных колебаний инфракрасного диапазона [5,6]. Однако реализовать эту идею удалось лишь сравнительно недавно в так называемом квантовом каскадном лазере [7], быстрое совершенствование которого [8] делает этот прибор весьма перспективным источником излучения.

Расчет приборов на межподзонных переходах основывается обычно на предположении о последовательном туннелировании носителей тока, протекающем с участием фононов [5]. В то же время, как было показано в [9], интересные приборные применения могут иметь межподзонные переходы в режиме когерентного туннелирования, когда время жизни электронов на каждом уровне квантовой ямы определяется не фононным рассеянием, а туннелированием сквозь барьеры, которые в этом случае должны быть достаточно тонкими. Особенности резонансного взаимодействия электронов с ВЧ полем в ДБРТС с высокими и тонкими барьерами в малосигнальном приближении были исследованы в работе [10], где были получены простые аналитические выражения ширины резонансного уровня и моноэнергетической резонансной проводимости симметричной ДБРТС в зависимости от размера квантовой ямы, мощности барьеров, частоты поля. Вместе с тем весьма важно найти зависимость интенсивности резонансного взаимодействия и от амплитуды ВЧ поля, что позволяет определить квантовую эффективность переходов. Известные методы расчета электронного транспорта в ДБРТС в ВЧ электрическом поле конечной амплитуды [2,11] основаны на численных алгоритмах и страдают отсутствием физической наглядности. Поэтому представляется интересным получить простые аналитические выражения для волновых функций электронов в ДБРТС, как это сделано в работе [10], в зависимости от амплитуды ВЧ поля. Следует отметить, что возможность получить замкнутое аналитическое решение квантово-механической задачи такого типа появляется довольно редко.

Рассмотрим симметричную двухбарьерную структуру шириной a с тонкими (δ-образными) барьерами толщиной b и высотой φ_b, к которой приложено однородное электрическое поле, изменяющееся со временем по закону $\mathcal{E}\cos\omega t = E(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})$, $\mathcal{E} = 2E$. Для определенности считаем, что электроны движутся слева направо. Тогда с учетом сделанных выше допущений нестационарное уравнение Шредингера имеет вид

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m^*}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \alpha\delta(x)\psi + \alpha\delta(x-a)\psi + H(x,t)\psi, \tag{1}$$

$$H(x,t) = -qE\Big\{x\big[\theta(x) - \theta(x-a)\big] + a\theta(x-a)\Big\} \times \left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right).$$

Здесь q, m^* — заряд и масса электрона, $\alpha = \varphi_b b$, $\theta(x)$ — единичная функция.

Известно, что в ДБРТС коэффициент прохождения имеет четко выраженный резонансный характер, а в симметричных структурах с тонкими барьерами величина волнового вектора, определяющего резонансные уровни, на которых коэффициент прохождения равен 1, находится из решения трансцендентного уравнения [12]

$$\operatorname{tg} ka = -\frac{k\hbar^2}{\alpha m^*} = -\frac{2k}{y}. \tag{2}$$

Здесь для удобства введено обозначение $y = 2m^*\alpha/\hbar^2$. Пусть электроны проходят через резонансный уровень с номером N (для определенности назовем его основным). При этом невозмущенная волновая функция электронов ψ_0, нормированная на один электрона, имеет вид

$$\psi_0(x) = \begin{cases} \exp ikx + D_0 \exp(-ikx), & x < 0; \\ A_0 \sin kx + B_0 \cos kx, & 0 < x < a; \\ C_0 \exp ik(x-a), & x > a. \end{cases} \quad (3)$$

Здесь $k = (2m^*\varepsilon/\hbar^2)^{1/2}$ — волновой вектор электронов, с энергией ε, падающих на структуру; остальные параметры равны

$$A_0 = y/k + i, \quad B_0 = 1, \quad C_0 \approx (-1)^{N+1}, \quad D_0 = 0. \quad (4)$$

Тогда — как было показано в [10] — если частота ВЧ поля соответствует переходам на уровень L, то наблюдается резонансное взаимодействие электронов с ВЧ полем. Предполагая амплитуду поля достаточно малой, решение будем искать в виде ряда теории возмущений.

В первом порядке теории возмущений поправка ψ_1 к волновой функции основного состояния [13] составляет

$$\psi_1 = \psi_{1+}(x)e^{-i(\omega_0+\omega)t} + \psi_{1-}(x)e^{-i(\omega_0-\omega)t},$$

где $\omega_0 = \varepsilon/\hbar$. Функции $\psi_\pm$ для данной задачи имеют вид

$$\psi_{1\pm}(x) = \begin{cases} D_{1\pm}\exp(-ik_\pm x), \\ x < 0; \\ A_{1\pm}\sin k_\pm x + B_{1\pm}\cos k_\pm x + \chi_{1\pm}(x), \\ 0 < x < a; \\ C_{1\pm}\exp ik_\pm(x-a) + P_{1\pm}\exp ik(x-a), \\ x > a, \end{cases} \quad (5)$$

где

$$k_\pm = \left[2m^*(\omega_0 \pm \omega)/\hbar^2\right]^{1/2}, \quad P_\pm = \pm\frac{qEa}{\hbar\omega}\varphi_0(a),$$

$$\chi_{1\pm}(x) = \mp qEx\psi_0(x)/\hbar\omega + qE\psi_0'(x)/m^*\omega^2$$

являются частными решениями соответствующего уравнения для $\psi_\pm$ [10,13], а система уравнений для определения коэффициентов $A_{1\pm}$, $B_{1\pm}$, $C_{1\pm}$, $D_{1\pm}$ имеет вид [10]

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ ik_\pm - y & k_\pm & 0 & 0 \\ 0 & \sin k_\pm a & \cos k_\pm a & -1 \\ 0 & -k_\pm\cos k_\pm a & k_\pm \sin k_\pm a & ik_\pm - y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} D_{1\pm} \\ A_{1\pm} \\ B_{1\pm} \\ C_{1\pm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где

$$f_1 = \chi_\pm(0), \qquad f_2 = -\chi_\pm'(0),$$

$$f_3 = P_\pm - \chi_\pm(a), \quad f_4 = (y - ik)P_\pm + \chi_\pm'(a).$$

При достаточно мощных барьерах ($y \gg k_\pm$) и величине волнового вектора, соответствующего резонансному уровню, определитель системы (6) становится мал и равен $\Delta \approx 2ik_\pm^2(-1)^{L+1}$, а при переходах на нерезонансный уровень составляет $\Delta \approx k_\pm y$. Следовательно, для узких резонансных уровней существенна вероятность переходов только между двумя уровнями. Поэтому далее рассматриваются переходы только между основным и верхним (знак "+") или основным и нижним (знак "−") резонансными уровнями.

При $y \ll k_\pm$ из системы (6), учитывая только члены с максимальными степенями y, для коэффициентов волновой функции (5) находим

$$B_{1\pm} \approx D_{1\pm} \approx (-1)^{L+1}C_{1\pm} \approx \frac{qEy^2}{im^*\omega^2 k_\pm},$$

$$A_{1\pm} \approx \frac{qEy^3}{im^*\omega^2 k_\pm^2}, \quad (7)$$

если $N - L$ — нечетное число, и эти коэффициенты малы, если $N - L$ — четное (см. подробнее [10]).

Внутри структуры ($0 < x < a$) поправка 1-го порядка к волновой функции имеет вид

$$\psi_{1\pm}(x) \approx \frac{qEy^2}{im^*\omega^2 k_\pm}\left(\frac{y}{k_\pm}\sin k_\pm a + \cos k_\pm a\right). \quad (8)$$

Здесь учтено, что так как $y \gg k_\pm$, а $\chi_{1\pm}(x)$ содержит члены с отношением $y/k_\pm$ не выше первой степени, то вклад $\chi_{1\pm}(x)$ в поправку к волновой функции 1-го порядка, как и вклад от $\chi_{1\pm}(x)$ в частное решение уравнения для поправки 2-го порядка (см. [14]) мал. Кроме того, так как $|C_{1\pm}| \gg |P_{1\pm}|$ и функция f_4, куда входит $P_{1\pm}$, не вносит существенного вклада в $\psi_{1\pm}$, то здесь и в дальнейших расчетах составляющими типа $P_\pm \exp[k(x-a)]$ можно пренебречь. С учетом того что $A_0 \approx y/k$, видно, что внутри структуры поправка 1-го порядка к волновой функции основного состояния имеет тот же вид, что и волновая функция основного состояния. Следовательно, повторив описанную выше процедуру для нахождения поправок к волновой функции, и с учетом того что вклад в поправку 2-го порядка вносит только функция $\psi_{1-}(x)$ (если основной уровень выше резонансного уровня, на который переходят электроны) или $\psi_{1+}(x)$ (если основной уровень ниже резонансного), а остальные составляющие малы, можно получить

$$\psi_2(x) \approx \begin{cases} D_2\exp(-ikx), & x < 0; \\ A_2\sin kx + B_2\cos kx, & 0 < x < a; \\ C_2\exp[ik(x-a)], & x > a, \end{cases} \quad (9)$$

где

$$B_2 \approx D_2 \approx (-1)^{L+1}C_2 \approx -\left(\frac{qE}{m^*\omega^2}\right)^2\frac{y^4}{kk_-},$$

$$A_2 \approx -\left(\frac{qE}{m^*\omega^2}\right)^2\frac{y^5}{k^2k_-}. \quad (10)$$

Здесь, как и в предыдущем случае, учтены только члены, содержащие максимальные степени параметра y/k.

Видно, что внутри структуры и поправка 2-го порядка к волновой функции основного состояния имеет тот же вид, что и волновая функция основного состояния. Отсюда сразу получаем

$$B_{3\pm} \approx D_{3\pm} \approx (-1)^{L+1} C_{3\pm} \approx -\frac{qEy^2}{im^*\omega^2 k_\pm}\left(\frac{qE}{m^*\omega^2}\right)^2 \frac{y^4}{kk_\pm},$$

$$A_{3\pm} \approx -\frac{qEy^3}{im^*\omega^2 k_\pm^2}\left(\frac{qE}{m^*\omega^2}\right)^2 \frac{y^4}{kk_\pm}. \qquad (11)$$

Сравнивая (4), (7), (10) и (11), легко сообразить, что если продолжить описанную выше процедуру получения поправок к волновой функции более высоких порядков, а затем их просуммировать, то коэффициенты волновой функции на каждом из резонансных уровней можно представить в виде постоянного множителя и знакопеременного ряда

$$1 - z + z^2 - z^3 + \ldots + (-1)^{n+1} z^n,$$

где

$$z = \left(\frac{qE}{m^*\omega^2}\right)^2 \frac{y^4}{kk_\pm}, \qquad (12)$$

который в области своей сходимости $|z| < 1$ представляет разложение функции $1/(1+z)$ по степеням z. Таким образом, для данной задачи волновая функция электронов имеет вид

$$\psi \approx \psi_N(x) e^{-i\omega_0 t} + \psi_L(x) e^{-i(\omega_0 \pm \omega)t}, \qquad (13)$$

где

$$\psi_N(x) = \frac{1}{1+z} \times \begin{cases} (1+z)\exp(ikx) - z\exp(-ikx) \\ x < 0; \\ A_0 \sin kx + B_0 \cos kx, \\ 0 < x < a; \\ C_0 \exp[ik(x-a)], \\ x > a; \end{cases} \qquad (14)$$

$$\psi_L(x) = \frac{1}{1+z} \times \begin{cases} D_{1\pm} \exp(-ik_\pm x), & x < 0; \\ A_{1\pm} \sin k_\pm + B_{1\pm} \cos k_\pm x, & 0 < x < a; \\ C_{1\pm} \exp[ik_\pm (x-a)], & x > a. \end{cases} \qquad (15)$$

Для волновых функций вида (13) динамическая проводимость на частоте ω определяется разностью выходящих из ДБРТС потоков электронов, поглотивших и испустивших квант энергии $\hbar\omega$ [13]:

$$\sigma = \frac{\hbar^2\omega}{2aE^2 m^*}\Big[k_+\big(|C_+|^2 + |D_+|^2\big) - k_-\big(|C_-|^2 + |D_-|^2\big)\Big]. \qquad (16)$$

В работе [10] было показано, что для моноэнергетических электронов с концентрацией n при переходах между резонансными уровнями волновая функция вида (5) приводит к следующему выражению для малосигнальной активной проводимости ДБРТС:

$$\sigma_M \approx \pm\frac{8q^2 m^* \alpha^4 n}{\pi L \hbar^6 \omega^3}\Big[1 - (-1)^{N-L}\Big], \qquad (17)$$

поэтому из соотношений (15) для зависимости проводимости от амплитуды ВЧ поля $\mathcal{E} = 2E$, с учетом того что нет разницы между переходами как с верхнего уровня на нижний, так и наоборот, можно записать

$$\sigma \approx \pm\frac{8q^2 m^* \alpha^4 n}{\pi L \hbar^6 \omega^3}\left(\frac{1}{1+z}\right)^2\Big[1 - (-1)^{N-L}\Big], \qquad (18)$$

где z выражается через амплитуду поля и мощность барьеров как

$$z = \left(\frac{q\mathcal{E}}{m^*\omega^2}\right)^2 \frac{4(m^*)^4 \alpha^4 a^2}{\hbar^8 \pi^2 LN}. \qquad (19)$$

Выражение справедливо при $z < 1$ или при амплитуде поля, меньшей критической:

$$\mathcal{E} < \mathcal{E}_K = \frac{\hbar^4 \omega^2 \pi (LN)^{1/2}}{2qm^*\alpha^2 a}. \qquad (20)$$

Перепишем выражение для z в виде

$$z = \left(\frac{q\mathcal{E}a}{\hbar\omega}\right)^2 \left(\frac{y^2}{k_N k_L}\right)^2 \frac{LN}{\pi^2(N^2 - L^2)^2}$$
$$= \frac{(q\mathcal{E}a)^2}{\varGamma_N \varGamma_L} \frac{64 L^2 N^2}{\pi^4 (N^2 - L^2)^4}, \qquad (21)$$

где $\varGamma_N$ и $\varGamma_L$ — ширины резонансных уровней [3]. Критическая амплитуда приложенного к ДБРТС высокочастотного напряжения $u = q\mathcal{E}a$, соответствующая $z = 1$, находится из выражения (21) как

$$u = \big(\varGamma_N \varGamma_L\big)^{1/2} \pi^2 \frac{(N^2 - L^2)^2}{8LN}. \qquad (22)$$

Отсюда для соседних резонансных уровней с большими номерами, когда $\varGamma_N \approx \varGamma_L = \varGamma$, можно сделать оценку применимости формулы (18):

$$q\mathcal{E}a < \pi^2 \varGamma/2.$$

Параметр $(y/k)^2$ показывает, во сколько раз квадрат волновой функции на уровне больше квадрата волновой функции как падающих на ДБРТС электронов, так и — при единичном (симметричная структура!) статическом коэффициенте прохождения — прошедших ДБРТС электронов. Следовательно, прежде чем электрон покинет структуру, среднее число столкновений электрона с барьерами P_N на уровне N можно оценить как $P_N \approx (y/k)^2/2$, так что максимально допустимое значение $z = 1$ (в соответствии с (21)) достигается при

$$u(P_N P_L)^{1/2} = \pi\hbar\omega\big|N^2 - L^2\big|/2(NL)^{1/2}.$$

Для соседних резонансных уровней $N = L + 1$, так что

$$u(P_N P_L)^{1/2} \approx \pi\hbar\omega.$$

Это означает, что ряд (12) сходится, когда классическая энергия взаимодействия электронов с переменным полем на длине, равной среднему геометрическому длин пробега электронов по резонансным уровням, не превосходит трехкратного расстояния между уровнями.

Ясно, что для узких уровней, а только для таких уровней этот расчет и применим, амплитуда u весьма мала. Однако, как видно из (14), при этой амплитуде коэффициент отражения ДБРТС равен $z^2/(1+z)^2 = 0.25$, а коэффициент прохождения — $1/(1+z)^2 = 0.25$, так что ровно половина электронов падающего потока переходит под действием поля на другой энергетический уровень, причем доля перешедших электронов составляет $1 - (1+z^2)/(1+z)^2$. Она максимальна как раз при $z = 1$, а при амплитудах поля, бо́льших критической (20), начинает уменьшаться. Последнее утверждение справедливо в силу аналитической продолжаемости решения (13)–(15) за радиус сходимости ряда (12).

Таким образом, при $z = 1$ реализуется наиболее интересный с практической точки зрения режим, при котором максимальное число электронов эффективно взаимодействует с ВЧ полем, и хотя при этом величина активной проводимости уменьшается в 4 раза по сравнению с максимальной, она остается достаточно высокой, например, для эффективной работы лазера с бесстолкновительным переносом электронов через ДБРТС, предложенного в [9].

Интересно отметить, что с увеличением амплитуды поля все большее число электронов отражается от структуры без изменения энергии. Качественно этот факт можно объяснить модуляцией положения уровня относительно моноэнергетического потока электронов, падающих на ДБРТС. В малосигнальном режиме эта модуляция мала и все электроны попадают в середину уровня, где статический коэффициент отражения минимален, а в нашем симметричном случае равен 0, так что все электроны проходят сквозь ДБРТС. С ростом энергии модулирующего поля до величин, сравнимых и превосходящих ширину уровня, все меньшее время электронный поток облучает структуру в области с ненулевым коэффициентом прохождения и поэтому все меньшее число электронов проходит сквозь ДБРТС.

Данная работа поддерживается Российским фондом фундаментальных исследований (проект № 94-02-04449) и Научным советом по программе "Физика твердотельных наноструктур" (проект № 1-050).

Список литературы

[1] M. Buttiker, R. Landauer. Phys. Rev. Lett., **49**, 1739 (1982).
[2] M.J. Hagman. J. Appl. Phys., **78**, 25 (1995).
[3] Р.Ф. Казаринов, Р.А. Сурис. ФТП, **5**, 797 (1971).
[4] L.C. West, S.J. Eglash. Appl. Phys. Lett., **46**, 1156 (1985).
[5] A. Kastalsky, V.J. Goldman, J.H. Abeles. Appl. Phys. Lett., **59**, 2636 (1991).
[6] M. Helm. *Intersubband Transitions in Quantum Wells*, ed. by E. Rosencher et al. (N.Y., Plenum Press, 1992).
[7] J.Faist, F. Capasso, D.L. Sivco, C. Sirtori, A.L. Hutchinson, A.Y. Cho. Science, **264**, 553 (1994).
[8] J.Faist, F. Capasso, C. Sirtori, D.L. Sivco, J.N. Baillargeon, A.L. Hutchinson, S.-N.G. Chy, A.Y. Cho. Appl. Phys. Lett., **68**, 3680 (1996).
[9] Е.И. Голант, А.Б. Пашковский, А.С. Тагер. Письма ЖТФ, **20**, № 21, 74 (1994).
[10] И.В. Беляева, Е.И. Голант, А.Б. Пашковский. ФТП, **31**, 137 (1997).
[11] W.R. Frensley. Rev. Mod. Phys., **62**, 745 (1990).
[12] В.М. Галицкий, Б.М. Карнаков, В.И. Коган. *Задачи по квантовой механике* (М., Наука, 1981).
[13] А.Б. Пашковский. ФТП, **29**, 1712 (1995).
[14] А.Б. Пашковский. Письма ЖТФ, **21**, 28 (1995).

Редактор Т.А. Полянская

Resonant conductance of symmetric double-barrier quantum-well structures as a function of a hign-frequency electric field amplitude

E.I. Golant, A.B. Pashkovskii

State Research Institute "Istok",
141120 Fryazino, Russia

Abstract Using a solution of the time–dependant Schrödinger equation obtained for the resonance interaction between electrons and a THz frequency band electric field in a double high and thin barrier quantum-well structure under collision-free electron transport, the high frequency conductance has been found as an analytic function of the field amplitude. It has been shown that under the influence of both a HF field of the frequency ω and an amplitude that approximately corresponds to the three-fold energy level width, as many as half of all the alectrons travelling through the level can pass into the neighboring one, emitting or absorbing the energy quantum $\hbar\omega$.

E-mail:eig@lure.gpi.ac.ru (Golant)