Журнал технической физики, 1997, том 67, № 1

01;05

Размерный эффект в проблеме тепловой стабилизации сверхпроводящих композитов

© *А.М. Макаров, К.А. Макаров, В.Р. Романовский*

Российский научный центр "Курчатовский институт",
123182 Москва, Россия

(Поступило в Редакцию 21 июля 1995 г.)

В рамках модели сплошной среды исследованы условия тепловой стабильности комбинированных сверхпроводников с учетом их поперечной теплопроводности в предположении равномерного распределения тока по сечению провода. Проведен анализ условий полной (стационарной) и частичной (нестационарной) стабильности. Выполненные численные эксперименты для токонесущего элемента круглого и прямоугольного сечения в зависимости от интенсивности охлаждения и поперечных размеров, сопоставлены с известными результатами одномерной теории. Показано, что ток стационарной стабилизации в двумерном приближении всегда меньше соответствующего значения, вычисленного в рамках одномерной модели. Определены критические энергии возмущений, определяющие верхнюю границу допустимых тепловыделений, равномерно распределенных по сечению композитного сверхпроводника. Для охлаждаемых проводов обнаружена немонотонная зависимость критических энергий от радиуса композита. Она имеет минимум, который при улучшении теплоотдачи сдвигается в сторону бо́льших значений радиуса. Установлено, что одномерная модель в весьма узком диапазоне исходных параметров приводит к несколько заниженному уровню допустимых возмущений. В целом одномерные вычисления по отношению к двумерным оказываются завышенными. В наибольшей степени размерный эффект видоизменяет условия устойчивости при увеличении коэффициента теплоотдачи. В основе этой закономерности лежит увеличение температуры в центре провода при ее одновременном уменьшении на поверхности.

Введение

Проблема устойчивости сверхпроводящего состояния токонесущих элементов (ТНЭ) к возмущениям различной природы является одной из важнейших в физике композитных сверхпроводников [1–3]. Прежде всего это обусловлено тем, что уникальные свойства так называемых жестких сверхпроводников могут быть реализованы только при соблюдении определенных условий, которые являются следствием метастабильности сверхпроводящего состояния. Их нарушение приводит к появлению в токонесущем элементе зоны с нормальной проводимостью. При этом энергия, запасенная в магните, выделяется внутри него, что в свою очередь может привести к необратимому повреждению всей обмотки. Переход сверхпроводника в нормальное состояние может быть вызван многочисленными возмущениями различного типа: скачками магнитного потока, перемещением витков, механическими деформациями ТНЭ, тепловыделениями на спаях и т.п. Поэтому сохранение сверхпроводящих свойств ТНЭ требует всестороннего анализа причин и условий возникновения неустойчивостей, ответственных за нарушение номинальных режимов работы сверхпроводящих обмоток.

Сформулированные к настоящему времени основные положения теории тепловой стабилизации композитных сверхпроводников позволяют с удовлетворительной точностью оценивать поведение термически тонких ТНЭ, когда тепловой поток распространяется только в продольном направлении. Одномерные модели не только упрощают расчеты, но и в ряде случаев, дают возможность записать удобные для практических приложений аналитические критерии устойчивости. Однако предположение о постоянстве температуры по сечению композита может значительно исказить конечные результаты, поскольку при этом из внимания опускаются особенности развития тепловых процессов, происходящих в поперечном сечении ТНЭ. Так, известно, что учет неизотермичности сверхпроводящей жилы приводит к увеличению мощности тепловыделения, а значит, и к соответствующему ухудшению условий тепловой стабилизации [1,2]. Поэтому при разработке крупных сверхпроводящих обмоток с массивными ТНЭ соответствующий анализ условий тепловой стабилизации должен проводится с учетом многомерного характера распространения теплового потока как в продольном, так и в поперечном направлениях. В связи с этим в настоящей работе рассмотрены особенности возникновения тепловой неустойчивости в композитном сверхпроводнике при действии равномерно распределенного по сечению провода источника тепловыделения с учетом двумерного характера распределения температурного поля. Подобные состояния возникают, например, при необратимой деформации ТНЭ в результате действия в сверхпроводящей обмотке пондеромоторных сил.

Постановка задачи

Рассмотрим равномерно охлажденный до температуры хладагента T_0 композитный сверхпроводник цилиндрической формы конечной длины $-l < x < l$ с равномерно распределенным по сечению транспортным током I. Опишем двумерное изменение его температуры в рамках модели анизотропного континуума нестационарным уравнением теплопроводности вида [2]

$$c\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \lambda_r \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{I^2}{S^2}\rho(T),$$
$$t > 0, \quad 0 < x < l, \quad 0 < r < r_0 \tag{1}$$

с начально-краевыми условиями

$$T(x,r,0) = \begin{cases} T_1 = \mathrm{const}, & 0 \le x \le x_1, \quad 0 \le r \le r_0, \\ T_0, & x > x_1, \end{cases}$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad T|_{x=l} = T_0, \quad \left.\lambda_r \frac{\partial T}{\partial r} + h(T - T_0)\right|_{r=0} = 0, \tag{2}$$

которые соответствуют симметричному относительно начала координат распространению температурного возмущения в результате мгновенного нагрева локальной области композита до температуры T_1. Здесь c, λ_x, λ_r — усредненные значения объемной теплоемкости и коэффициенты теплопроводности, h — коэффициент теплоотдачи, S — площадь поперечного сечения композита, $\rho(T)$ — его эффективное электросопротивление

$$\rho(T) = \rho_0 \begin{cases} 1, & T > T_{CB}, \\ \frac{T - T_C}{T_{CB} - T_C}, & T_C \le T \le T_{CB}, \\ 0, & T < T_C = T_{CB} - (T_{CB} - T_0)\dfrac{I}{I_C}, \end{cases} \tag{3}$$

где ρ_0 — удельное электросопротивление матрицы, T_{CB} — критическая температура сверхпроводника, I_C — критический ток.

Для выявления основных физических закономерностей размерного эффекта, которые могут иметь место в условиях тепловой стабилизации, воспользуемся обобщенным анализом. Уменьшим число исходных параметров, предполагая, что при варьировании внешнего радиуса останутся без изменения коэффициент заполнения композита сверхпроводником и плотность тока. Тогда относительно безразмерных переменных

$$X = x/L_x, \quad R = r/L_r, \quad i = I/I_C, \quad \tau = \lambda_x t/(cL_x^2),$$
$$\theta = (T - T_0)/(T_{CB} - T_0)$$

задача (1)–(3) примет вид

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(R\frac{\partial \theta}{\partial R}\right) + i^2 \begin{cases} 1, & \theta > 1, \\ \frac{\theta - 1 + i}{i}, & 1 - i \le \theta \le 1, \\ 0, & \theta < 1 - i. \end{cases}$$

$$\theta(X,R,0) = \begin{cases} \theta_1, & 0 \le X \le X_1, \quad 0 \le R \le R_0, \\ 0, & X > X_1, \end{cases}$$

$$\left.\frac{\partial \theta}{\partial X}\right|_{X=0} = 0, \quad \theta|_{X=L} = 0, \quad \left.\frac{\partial \theta}{\partial R} + \beta\theta\right|_{R=R_0} = 0. \tag{4}$$

Здесь $L = l/L_x$, $R_0 = r_0/L_r$, $X_1 = x_1/L_x$, $L_{x,r} = (\lambda_{x,r} S^2 (T_{CB} - T_0)/I_C^2 \rho_0)^{1/2}$. Данное обезразмеривание отражает особенности многомерного характера протекания тепловых процессов в композитных сверхпроводниках. Так, в одномерной теории условия устойчивости сверхпроводящего состояния в первую очередь зависят от соотношения между мощностями джоулева тепловыделения в проводе и теплового потока в хладагент. Это находит отражение в известном параметре Стекли

$$\alpha = \frac{I_C^2 \rho_0}{hpS(T_{CB} - T_0)},$$

p — охлаждаемый периметр.

При неоднородном распределении температуры по сечению композита возникновение и развитие тепловой неустойчивости определяются величиной безразмерного комплекса

$$\beta = \frac{hS}{I_C}\sqrt{\frac{T_{CB} - T_0}{\lambda_r \rho_0}}.$$

Его физический смысл очевиден — это отношение термического сопротивления теплопроводности к термическому сопротивлению теплоотдачи. Поскольку последние характеризуют связь между полем температуры внутри ТНЭ и условиями теплоотдачи на поверхности, то нетрудно получить простейшее условие неоднородности температурного поля в поперечном сечении ТНЭ. Очевидно, оно будет иметь место, если термическое сопротивление композита во много раз превышает термическое сопротивление теплоотдачи, т.е. при $r_0^2/\lambda_r \gg S/hp$. В безразмерных переменных условие нарушения одномерности поля температуры внутри провода цилиндрического сечения записывается в виде $2\beta R_0 \gg 1$.

Метод и цели исследования

Задача (4) позволяет провести обобщенный анализ условий тепловой стабильности композитных сверхпроводников и сопоставить их с известными результатами одномерной теории. Во-первых, исследовать изменение условий стационарной стабилизации. Для данных режимов сверхпроводимость провода по истечению некоторого промежутка времени всегда восстанавливается независимо от амплитуды начального возмущения θ_1 и его протяженности X_1. Поскольку в силу нелинейности эффективного электросопротивления композита распределение температуры находилось методом конечных разностей, то численный расчет условий стационарной стабилизации заключался в итерационной процедуре поиска такого значения тока, для которого при заданных значениях β и R_0 текущая температура во всей области для заведомо больших значений θ_1 и X_1 со временем становилась меньше $\theta_C = 1-i$, когда $\rho(T) = 0$. В рамках одномерной теории простейшее условие полной стабильности описывается неравенством, следующим из известной теоремы равных площадей [1–3],

$$\alpha i_S^2 + i_S - 2 \le 0, \qquad (5)$$

где для провода круглого сечения параметр Стекли равен

$$\alpha = \frac{R_0}{2\beta}.$$

Во-вторых, при нарушении условий стационарной стабилизации вычислить так называемые критические энергии возмущения

$$\varepsilon_q = \frac{E_q}{\frac{\lambda_r}{\lambda_x} c L_x^3 (T_{CB} - T_0)} = 2X_1\theta_q \pi R_0^2,$$

описывающие для рассматриваемого класса неустойчивости минимальные значения верхней границы допустимых тепловыделений. В этом случае численный расчет ε_q для заданной протяженности возмущения сводился к итерационной процедуре поиска максимально допустимой температуры импульса θ_q. В результате для всех $\theta_1 < \theta_q$ сверхпроводимость восстанавливается, даже несмотря на кратковременное образование нормальной зоны. При $\theta_1 > \theta_q$ локально возникшая нормальная зона необратимо распространяется на всю область. Ниже при определении ε_q рассматривались два типа тепловыделений. Анализ устойчивых состояний был выполнен для так называемых "точечных" и "протяженных" возмущений. Для первых граница неустойчивости описывается полной энергией, выделенной источником тепловыделения в начальный момент времени. Ее величина практически не зависит от протяженности начального участка нормальной зоны. Во втором случае характерной величиной является объемная плотность энергии, которая в терминах записанной выше модели равна θ_1. При этом соответствующие значения X_1 задавались согласно аналогичным предпосылкам, имеющим место в одномерной теории [4]. Для уменьшения влияния краевого условия при $X = L$ общая протяженность расчетной области полагалась равной $L = 50$. Как показали выполненные расчеты, данное значение с хорошей степенью точности исключает влияние краевого эффекта на конечные результаты, поскольку характерный пространственный масштаб, на котором происходит развитие неустойчивости, на порядок меньше заданной величины L.

Обсуждение результатов

Результаты численного анализа влияния размерного эффекта на условия тепловой стабилизации при различных значениях исходных параметров приведены на рис. 1–5. На рис. 1 показано изменение во времени температуры композита в центре и на его поверхности при действии "точечного" докритического и закритического возмущений для двух значений параметра β при $X_1 = 1$, $R_0 = 3$, $i = 0.9$. На вставках к рисункам представлены кривые, описывающие соответствующее увеличение протяженности нормальной фазы в наиболее нагретой центральной части композита ($\theta(\varepsilon, 0, \tau) = 1 - i$), которые для заданных параметров наглядно демонстрируют "точечный" характер возмущения. Здесь также штриховыми линиями показаны результаты соответствующих одномерных расчетов.

Сопоставляя между собой одномерные и двумерные вычисления температурного поля композита, нетрудно заметить, что в рассматриваемом случае, когда тепло от какого-либо источника выделяется по всему объему ТНЭ, развитие неустойчивости определяется процессами, происходящими в его централь-

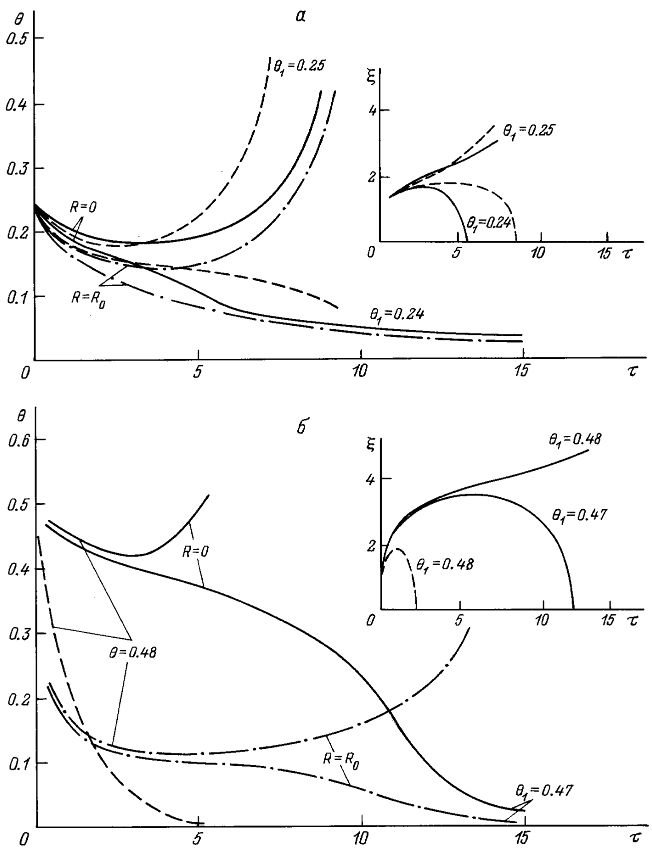

Рис. 1. Изменение во времени протяженности нормальной зоны и температуры композита в центре и на поверхности при различных значениях параметра β (a — 0.1, $б$ — 1). Сплошные кривые и штрихпунктир — двумерная модель, штриховые кривые — одномерная модель.

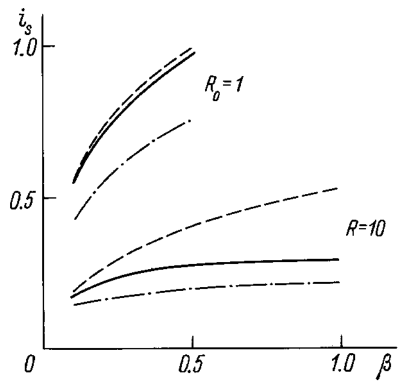

Рис. 2. Зависимость тока стационарной стабилизации от параметра стабилизации. Сплошные кривые — цилиндр, штрихпунктир — пластина, штриховые кривые — одномерная модель.

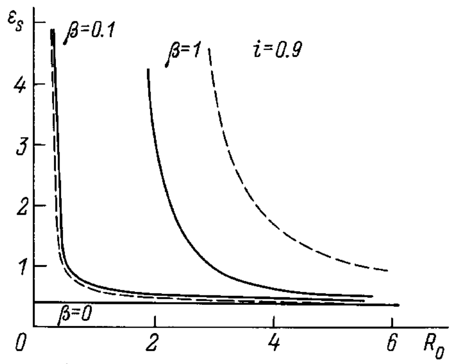

Рис. 4. Зависимость плотности критической энергии от радиуса. Сплошные кривые — двумерная модель, штриховые кривые — одномерная модель.

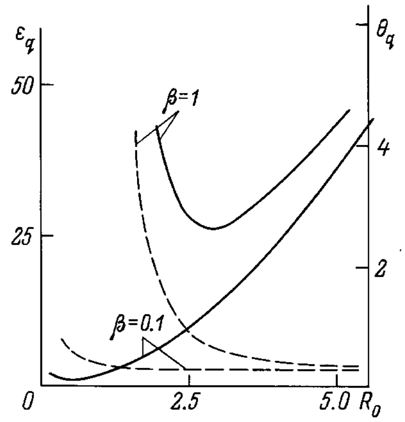

Рис. 3. Зависимость критической энергии от радиуса провода.

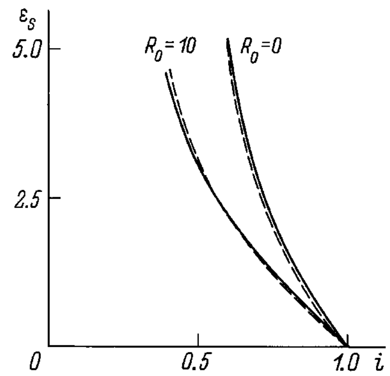

Рис. 5. Зависимость плотности критической энергии от тока. Сплошные кривые — двумерная модель, штриховые кривые — одномерная модель.

ной области. Из рис. 1 видно, что при действии закритического возмущения повышение температуры в центре провода происходит более интенсивно, чем на поверхности. Причем увеличение β приводит как к значительному увеличению температуры композита в нейтральной части, так и к ее уменьшению на поверхности. Вследствие этого соответствующие размеры нормальной зоны в продольном направлении зависят от используемой расчетной модели. Так, при $\beta = 0.1$ протяженность участка перешедшего в нормальное состояние, вычисленное в рамках двумерной модели незначительно отличается от одномерных значений. В то же время при $\beta = 1$ одно- и двумерные значения ξ, во-первых, сильно расходятся между собой, во-вторых, одномерный расчет по сравнению с двумерным приводит к существенно заниженным значениям ξ.

Отмеченные закономерности описывают характерные особенности размерного эффекта, которые лежат в основе возможного изменения условий тепловой стабилизации сверхпроводящих композитов. Их учет должен прежде всего оказать влияние на условия стационарной стабилизации, так как они непосредственно зависят от теплового баланса между суммарным джоулевым теплом, выделяемым внутри провода, и тепловым потоком, отводимым в хладагент. На рис. 2 построены результаты расчета тока стационарной стабилизации для термически тонкого и термически массивного провода. Сплошные линии описывают значения i_S для круглого провода, штрихпунктир — для композита прямоугольного сечения. Для последних использовалась та же постановка задачи, что и для круглого провода, но в уравнении теплопроводности дифференцирование по пространственным координатам изменялось в соответствии с переходом от цилиндрических координат к прямоугольным. Поскольку рассматривалось двумерное уравнение, то полученные результаты описывают условия полной стабилизации тонкой прямоугольной пластины, боковая поверхность которой теплоизолирована, а охлаждение осуществляется через границу, параллельную оси X. Здесь же показаны соответствующие зависимости, вычисленные согласно приведенной выше формуле для одномерных значений i_S. Видно,

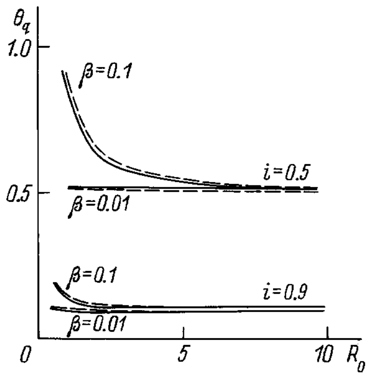

Рис. 6. Зависимость допустимой температуры возмущения от радиуса провода. Сплошные кривые — двумерная модель, штриховые кривые — одномерная модель.

что для термически массивных проводов одномерная теория дает сильно завышенную оценку границы полной стабилизации. Данный факт необходимо принимать во внимание при конструировании крупных магнитных систем, когда использование массивных ТНЭ неизбежно. Если в этом случае условия полного сохранения обмоткой сверхпроводящих свойств рассчитывались по одномерной теории, то в действительности необратимый процесс развития неустойчивости в магнитной системе с заданными таким образом параметрами может привести к катастрофическому разрушению всей установки.

На рис. 3 построены безразмерные критические энергии как функции внешнего радиуса композита при $X_1 = 1$, $i = 0.9$. Штриховыми кривыми показаны соответствующие зависимости допустимой температуры импульса. Приведенные кривые демонстрируют еще одну отличительную особенность размерного эффекта, которая имеет место у охлаждаемых ТНЭ. Она выражается в существовании минимума у зависимости $\varepsilon_q(R_0)$. Последний, как это нетрудно понять, обусловлен монотонным уменьшением допустимой температуры импульса (в общем случае это плотности энергии возмущения) при соответствующем увеличении поперечного размера провода. Причем с увеличением β (т.е. при улучшении охлаждения) спадающая ветвь кривой сдвигается в область бо́льших значений R_0.

На рис. 4 сопоставлены между собой одномерные и двумерные вычисления безразмерной плотности критической энергии $\varepsilon_S = 2X_1\theta_q$ в зависимости от внешнего радиуса композита для различных условий охлаждения при действии "точечного" ($X_1 = 1$) возмущения. Как и следовало ожидать, уровень допустимых тепловыделений у теплоизолированного композита ($\beta = 0$) не зависит от его поперечного размера и двумерные вычисления полностью совпадают с одномерным расчетом. У охлаждаемых проводов различия в расчетных значениях критических энергий, полученных по одномерной и двумерной моделям, зависят от величины β. В области "малых" значений β (например, при "плохом" охлаждении, "хорошей" теплопроводности) расчетные двумерные значения ε_S для "точечных" тепловыделений во всем диапазоне изменения R_0 хотя и незначительно, но превышают соответствующие критические энергии, вычисленные по одномерной модели. При относительно "больших" значениях β наблюдается существенное расхождение между одномерной и двумерной теориями. При этом оказывается, что существуют такие значения параметра β, для которых улучшение условий теплообмена с хладагентом практически не будут влиять на значения критических энергий. В целом отличие между одномерной и двумерной моделями зависит не только от поперечного размера провода и условий его охлаждения, но и от величины транспортного тока, характера возмущения. На рис. 5 построены кривые, описывающие одномерные и двумерные значения критической плотности возмущения ε_S в зависимости от тока для термически тонкого и термически массивного ТНЭ при $X_1 = 1$, $\beta = 0.1$. На рис. 6 представлены одномерные и двумерные вычисления допустимой температуры импульса для "протяженного" возмущения ($X_1 = 10$). Приведенные результаты показывают, что одномерный расчет условий устойчивости термически массивного ТНЭ вблизи тока стационарной стабилизации дает завышенную оценку допустимого уровня возмущений. Но при увеличении тока различие между расчетными значениями может поменять знак, и вблизи критического тока двумерная модель приводит к несколько оптимистическим результатам. Как показывают выполненные численные эксперименты, диапазон токов, где имеет место завышенная оценка одномерных расчетов, увеличивается в случае действия "протяженных" возмущений и уменьшается при уменьшении радиуса ТНЭ и увеличении значения параметра β.

Влияние размерного эффекта на устойчивость сверхпроводящих композитов к рассматриваемым температурным возмущениям может быть объяснено следующим образом. При $\beta = 0$ тепловое состояние ТНЭ по сечению однородно не только в начальный момент времени, но и на протяжении всего процесса развития неустойчивости, так как при этом отсутствует тепловой поток в хладагент. Поэтому одномерные и двумерные вычисления совпадают. Увеличение β приводит не только к появлению поперечного теплового потока, который совместно с теплоотдачей в хладагент оказывает стабилизирующее действие. При этом также изменяется тепловое состояние поверхности композита, его центральной части. Как обсуждалось выше, температура поверхности, вычисленная в рамках двумерной модели, может быть меньше соответствующей температуры, определенной по одномерной модели. В то же время в центре композита его температура повышается. Вследствие этого имеет место более интенсивное увеличение размеров нормальной зоны. Поэтому, несмотря на то что увеличение β приводит к более сильной неоднородности температурного поля, переход от одномерного уравнения теплопроводности к двумерному приводит к резкому уменьшению критических энергий.

Таким образом, двумерный расчет условий тепловой стабилизации сверхпроводящего ТНЭ показывает, что одномерная теория, не учитывающая поперечный тепловой поток, приводит к завышенным оценкам тока стационарной стабилизации. При расчете устойчивых состояний композита, параметры которого удовлетворяют условию $2\beta_0 \ll 1$, двумерная теория приводит к более оптимистичным оценкам. В противном случае критические энергии, вычисленные по двумерной модели, могут быть значительно ниже соответствующих значений, определенных в рамках одномерной теории.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 95-02-03527а).

Список литературы

[1] *Альтов В.А., Зенкевич В.Б., Кремлев М.Г., Сычев В.В.* Стабилизация сверхпроводящих магнитных систем. М.: Энергоатомиздат, 1984. 312 с.
[2] *Уилсон М.* Сверхпроводящие магниты. М.: Мир, 1985. 407 с.
[3] *Гуревич А.В., Минц Р.Г., Рахманов А.Л.* Физика композитных сверхпроводников. М.: Наука, 1987. 240 с.
[4] *Романовский В.Р.* // ДАН СССР. 1984. Т. 279. № 4. С. 884–887.