

03;07;12

## Исследование фрактальных характеристик излучения за фронтом сильных ударных волн в режиме неустойчивости

© В.В. Кривец, А.И. Осипов, А.П. Рязин, А.В. Уваров

Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова,  
119899 Москва, Россия

(Поступило в Редакцию 31 июля 1995 г.)

Хорошо известно, что в некоторых диапазонах чисел Маха ударная волна теряет устойчивость [1–4]. Это проявляется в том, что фронт ударной волны искажается, за фронтом параметры газа меняются немонотонно, а скорость ударной волны немонотонно изменяется в процессе ее распространения по ударной трубе. По-видимому, в этом же диапазоне чисел Маха (для ксенона это 16–30) за фронтом ударной волны происходит турбулизация всего потока. Детального экспериментального и теоретического анализа этого процесса в настоящее время нет. Можно, однако, попытаться сравнить картину течения за ударной волной с картинами известных турбулентных течений, воспользовавшись методами фрактального анализа. Это и является целью настоящей работы.

План дальнейшего изложения таков. Сначала будет описана экспериментальная методика получения двумерной радиационной картины свечения ударно нагретого газа. Затем будет изложена методика обработки картины свечения для получения ее фрактальных характеристик и проведено сравнение с соответствующими фрактальными характеристиками турбулентных течений, изученных в [5–16].

Методика проведения эксперимента аналогична изложенной в [1,2]. Ударная волна инициировалась в ударной трубе квадратного сечения (27×27 мм). Исследуемым газом был ксенон при начальном давлении 5 Тор. Изучались режимы с числами Маха в диапазоне от 16 до 30. Визуализация объекта производилась через плоские смотровые стекла, смонтированные вдоль ударной трубы. Для измерения скорости ударной волны использовался метод X–T-развертки. Входной объектив дает изображение центральной части ударной трубы на горизонтальную щель, которой вырезается узкая полоса вдоль оси ударной трубы. Изображение щели проецируется на фотопленку через вращающуюся призму, разворачивающую изображение щели во времени. Фронт свечения ударной волны перемещается вдоль щели. Используя полученную развертку, можно найти скорость ударной волны на основе соотношения

$$v_{sv} = v_t \operatorname{tg} \varphi / \beta, \quad (1)$$

где  $v_{sv}$  — скорость ударной волны;  $v_t$  — скорость развертки;  $\beta$  — коэффициент увеличения "центр

ударной трубы–пленка фоторегистратора";  $\varphi$  — угол на развертке между осью времени и наклонной, соответствующей движению светящегося фронта вдоль щели.

Получение плоской двумерной радиационной картины производится методом Y–T-развертки. В этом случае щель располагается перпендикулярно оси трубы. В данном эксперименте использовались два скоростных фоторегистратора с Y–T-развертками: ВСК-5 и ЖФР. Коэффициент увеличения для перехода объект–пленка для ВСК-5 равен 0.567; для ЖФР — 0.667; ширина щели для обеих камер ~ 30 мкм.

Поскольку скорость ударной волны много больше скорости движения газа за фронтом, то радиационную картину можно считать стационарной на временном промежутке, соответствующем времени прохождения светящегося объекта мимо щели. Радиационная картина ударно нагретого газа для  $M = 25.7$  представлена на рис. 1.

В эксперименте разрешающая способность регистрирующей системы ограничена двумя факторами: 1) конечной шириной щели и разницей между скоростью ударной волны и скоростью развертки фоторе-

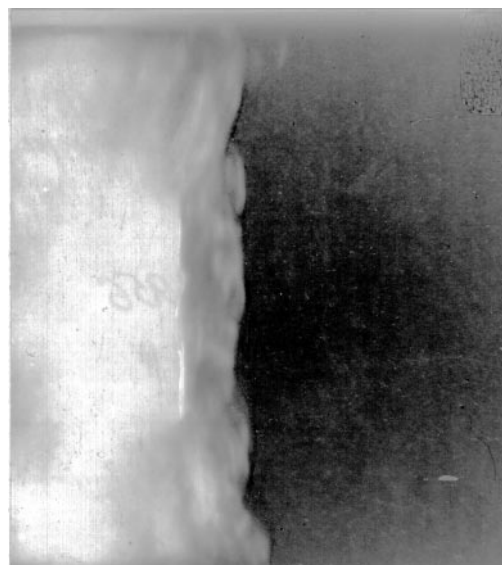


Рис. 1. Радиационная картина ударно нагретого газа для  $M = 25.7$ , полученная методом Y–T-развертки.

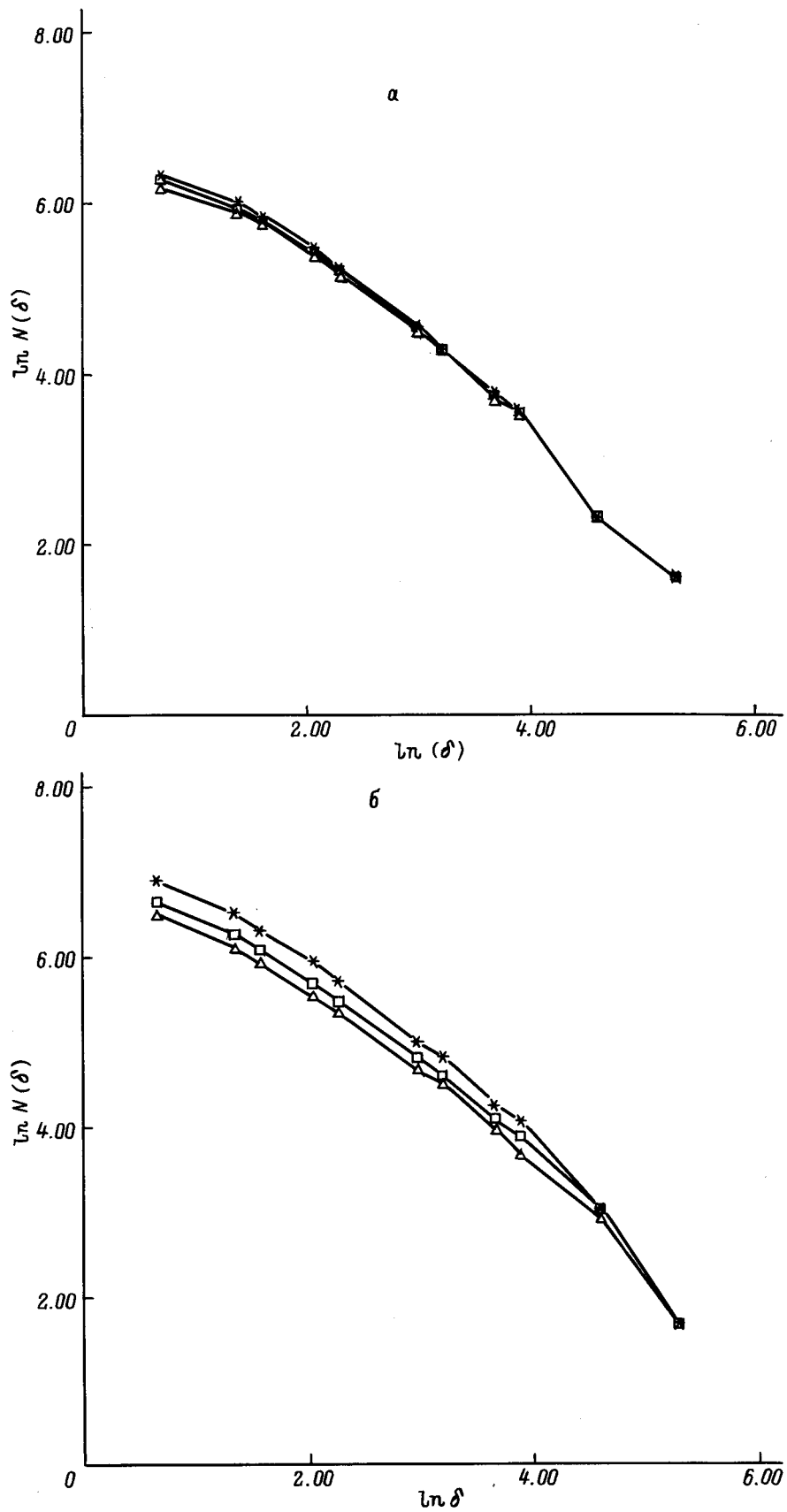


Рис. 2. Зависимость  $\ln N(\delta)$  от  $\ln \delta$  для различных чисел Маха и порогов интенсивности. а —  $M = 25.7$ , пороги интенсивности 100 ( $\Delta$ ), 140 ( $\square$ ), 170 (\*); б —  $M = 30.1$ , пороги интенсивности 100 ( $\Delta$ ), 120 ( $\square$ ), 150 (\*).

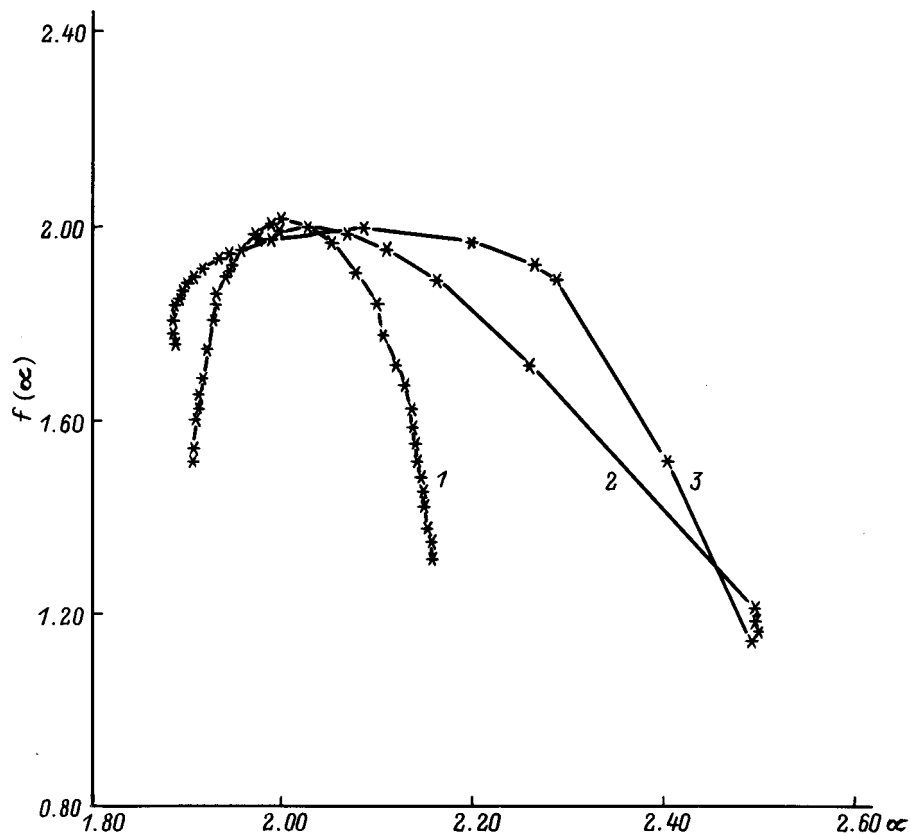


Рис. 3. Функция фрактальной размерности  $f(\alpha)$ . 1 — из работы [17] для  $Re = 3000$ , 2 — для  $M = 25.7$ , 3 — для  $M = 30.1$ .

гистратора; разрешающая способность в этом случае не менее  $S^*v_{sv}/v_t$ , где  $S^*$  — ширина изображения щели на пленке; 2) конечностью телесного угла  $\Omega$ , определяемого входной диафрагмой ВСК или ЖФР; разрешающая способность по этой причине не менее  $L_T\Omega/2$ , где  $L_T$  — ширина ударной трубы. В обоих случаях ошибка, связанная с разрешающей способностью аппаратуры, не превышает 0.1 мм.

С полученных в эксперименте негативов картин свечения ударно нагретого газа печатались фотографии с шестикратным увеличением. С помощью сканера поле каждой фотографии разбивалась на  $\sim 5 \cdot 10^5$  элементарных ячеек (разрешающая способность сканирования  $\sim 0.03$  мм). Каждой из них ставилось в соответствие число в диапазоне от 0 до 255, пропорциональное интенсивности излучения объекта в данной точке пространства. После создания файлов, содержащих информацию о распределении интенсивности свечения изучаемых объектов, были проведены машинные расчеты для получения фрактальных характеристик радиационных картин ударно нагретого газа. Вычисления проводились тремя способами.

1. Использовался метод получения фрактальной клеточной размерности границы объекта, в основе которого лежит соотношение

$$L = N(\delta) \cdot \delta \sim \delta^{1-D}, \quad (2)$$

где  $N(\delta)$  — количество ячеек размера  $\delta$ , требуемых для покрытия границы объекта.

Этим методом были получены фрактальные размерности  $D = -\ln(N(\delta))/\ln(\delta)$  для чисел Маха 17.2, 25.7, 30.1. Очевидно, что для расчета фрактальной размерности необходимо выбрать границу по интенсивности и тем самым отделить светящийся объект от темного фона. Расчеты показывают, что при выборе границы в очень широком диапазоне (от 30 до 200 отн. ед., если весь диапазон яркости меняется от 0 до 255) получаются одинаковые результаты. Это совпадает с выводами работы [12], где выбор границы подробно обсуждался. Этот результат снимает вопросы по методу обработки объекта. Действительно, несмотря на искажения, вносимые используемым здесь методом (как, впрочем, и любым другим), сохраняется монотонная зависимость реальной яркости от измеряемой, а сдвиг границы за счет возможного изменения наклона этой зависимости не влияет на ответ. Для чисел Маха 25.7 и 30.1 тангенс угла наклона зависимости  $\ln(N(\delta))$  от  $\ln(\delta)$  (рис. 2) не имеет постоянного значения, а меняется в диапазоне 1–1.45. При числе Маха, равном 17.2, размерность границы радиационной картины в пределах ошибок, связанных с неровностью кромок щели фоторегистратора, близка к единице.

2. Использовался метод получения фрактальной клеточной размерности границы объекта, в основе которого лежит соотношение  $N(\delta) \cdot \delta^2 \sim \delta^{2-D}$ . В этом случае границе объекта ставилась в соответствие площадь. Графики зависимостей  $\ln(N(\delta))$  от  $\ln(\delta)$  для чисел Маха 25.7 и 30.1 имели изменяющийся тангенс угла наклона. При  $M = 25.7$   $1 < D < 1.75$ ; при  $M = 30.1$   $1 < D < 1.5$ . Для  $M = 17.2$  полученная графически фрактальная размерность имела значение, близкое к 2. Сравним эти результаты с результатами работы [6], где определялась фрактальная размерность течения с полностью развитой турбулентностью. В [6] рассматривались длины, сравнимые с колмогоровским масштабом  $\eta = (\nu^3/\varepsilon) \sim 1/R^{3/4} \sim 10$  см ( $\nu$  — кинематическая вязкость,  $\varepsilon$  — средняя скорость диссипации энергии единицы массы,  $R$  — число Рейнольдса). С увеличением  $\delta$  зависимость  $\ln(N(\delta))$  от  $\ln(\delta)$  перестает быть линейной и ее наклон уменьшается. В наших экспериментах  $\delta \gg \eta$  ( $\delta \sim 10^{-1}$  см, а  $\eta \sim R^{-3/4} \sim 10^{-3}$  см), но эта тенденция сохраняется. Именно отклонение зависимости  $\ln N(\delta)$  от  $\ln \delta$  от прямой показало недостаточность "простых" фрактальных характеристик и потребовало мультифрактального анализа.

3. Мультифрактальный анализ, который стал развиваться в конце 80-х годов, дает гораздо более подробную информацию о системе. Следует отметить, что все методы мультифрактального анализа приводят к сходным результатам, поэтому в работе использовался один из этих методов — метод прямого приближения. В этом методе, кроме  $P_j(\delta)$  — величины, поставленной в соответствие  $j$ -й ячейке линейного размера  $\delta$  и характеризующей наличие некоторого измеряемого признака, вводится нормированная мера

$$\mu_j(q, \delta) = (P_j(\delta))^q / \sum_i (P_i(\delta))^q. \quad (3)$$

Выражения, определяющие функцию фрактальной размерности  $f(q)$  и средний показатель силы сингулярности (показатель Липшица–Гельдера)  $\alpha(q)$ , имеют вид

$$f(q) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[ \left( \sum \mu_j(q, \delta) \cdot \ln(\mu_j(q, \delta)) / \ln \delta \right) \right],$$

$$\alpha(q) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[ \left( \sum \mu_j(q, \delta) \cdot \ln(P_j(\delta)) / \ln \delta \right) \right]. \quad (4)$$

Этим выражениям можно придать физический смысл, если воспользоваться термодинамической интерпретацией [11]. Представим  $P_j(\delta)$  в виде  $P_j(\delta) = \exp(-E_j(\delta))$ , тогда

$$\mu_j(\delta) = \exp(-\beta E_j) / \sum_i \exp(-\beta E_i)$$

имеет смысл нормированного Больцмановского распределения с  $\beta = 1/kT = q$ . В этом случае функции

$f$  соответствует энтропия, а показателю  $\alpha$  — внутренняя энергия. Зависимость  $f(\alpha(q))$  можно интерпретировать как зависимость энтропии от внутренней энергии. При этом, как и в термодинамике,  $df/d\alpha = q$ .

В работах [9–11], где изучался турбулентный пограничный слой, роль  $P_j(\delta)$  играла величина  $E_{\delta_j} \sim \delta^{\alpha_j}$  — диссипация энергии в  $j$ -й ячейке линейного размера  $\delta$ . Поле величин диссипации энергии регистрируется с помощью датчиков, которые непосредственно измеряют величину  $\langle (\partial u / \partial t)^2 \rangle$  ( $u$  — отклонение скорости течения от основной скорости потока  $U$ ), пропорциональную диссипации энергии  $\varepsilon$ .

На рис. 3 приведены известные зависимости  $f(\alpha)$ , получаемые на основе анализа экспериментальных данных для развитой турбулентности в струе воздуха с добавкой дыма [16]. Там же представлены наши данные для чисел Маха 25.7 и 30.1. Анализ этих кривых указывает на качественное сходство процессов в турбулентных струях и в ударно нагретом слое. Отметим, что распределение интенсивности свечения в ударно нагретом газе отражает в первую очередь распределение таких параметров, как плотность и температура электронного газа и газа тяжелых частиц.

Обратим внимание на количественное сходство кривых 1–3 по отдельным параметрам. Мультифрактальные спектры  $f(\alpha)$  для различных течений целесообразно сравнивать при одинаковых  $q$ , в частности при  $q = 1$ , когда мера  $\mu_j$  имеет простую физическую интерпретацию. В этом случае  $df/d\alpha = q = 1$  или  $f(\alpha) = \alpha$ . Как видно из рис. 3, значения  $\alpha(q = 1)$  для всех трех кривых примерно одинаковы. Если воспользоваться термодинамической интерпретацией, то можно сказать, что при одной и той же "температуре" ( $q = 1$ ) "энергии" ( $\alpha$ ), (или "энтропии"  $f(\alpha)$ ), оказываются примерно одинаковыми. Существенное отличие кривых 1–3 заключается в их полуширине. Эффективная протяженность мультифрактального спектра (полуширина) оказывается заметно больше в случае свечения ударно нагретого газа, т. е. спектр пространственных неоднородностей в ударно нагретом газе более богатый, чем в потоке с развитой турбулентностью.

В заключение перечислим основные результаты. Показано, что в режиме перестройки ударных волн (в Хе при  $M = 27.5$  и 30.1) картина свечения ударно нагретого газа носит фрактальный характер. Поведение фрактальной клеточной размерности в зависимости от линейного размера ячейки разбиения аналогично поведению фрактальной размерности в струях с полностью развитой турбулентностью. Мультифрактальный анализ картины свечения ударно нагретого газа приводит к функции фрактальной размерности  $f(\alpha)$ , которая в своих основных чертах совпадает с аналогичной функцией для картин течений с полностью развитой турбулентностью.

Авторы благодарны В.Б. Брагинскому, который обратил наше внимание на фрактальный характер картины излучения в ударно нагретом газе.

Публикуемые исследования были проведены при частичной поддержке Международного научного фонда по гранту № MIL300 и Российского фонда фундаментальных исследований по гранту № 95-01-00354а.

## Список литературы

- [1] *Рязин А.П.* // Письма в ЖТФ. 1980. Т. 6. Вып. 9. С. 516–520.
- [2] *Мукин В.А., Осипов А.И., Рязин А.П., Уваров А.В.* // Хим. физ. 1993. Т. 12. № 3. С. 380–382.
- [3] *Тумакаев Г.К., Степанова З.А.* // ЖТФ. 1982. Т. 52. Вып. 11. С. 2305–2306.
- [4] *Тумакаев Г.К., Степанова З.А., Григорьев П.В.* // ЖТФ. 1994. Т. 64. Вып. 4. С. 46–50.
- [5] *Mandelbrot B.B.* The Fractal Geometry of Nature. San Francisco: Freeman, 1982.
- [6] *Sreenivasan K.R., Meneveau C.* // J. Fluid Mech. 1986. Vol. 173. P. 357–386.
- [7] *Chhabra A., Jensen R.V.* // Phys. Rev. Lett. 1984. Vol. 68. N 12. P. 1327–1330.
- [8] *Halsey T.C., Jensen M.H., Kadanoff L.P. et al.* // Phys. Rev. A. 1986. Vol. 33. N 2. P. 1141–1151.
- [9] *Sreenivasan K.R., Meneveau C.* // Phys. Rev. A. 1988. Vol. 38. N 12. P. 6287–6294.
- [10] *Meneveau C., Sreenivasan K.R.* // Phys. Lett. A. 1989. Vol. 137. N 3. P. 103–112.
- [11] *Chhabra A.B., Meneveau C., Jensen R.V. et al.* // Phys. Rev. A. 1989. Vol. 40. N 9. P. 5284–5293.
- [12] *Prasad R.R., Sreenivasan K.R.* // Experiments in Fluids. 1989. Vol. 7. P. 259–264.
- [13] *Sreenivasan K.R., Ramshakar R., Meneveau C.* // Proc. R. Soc. Lond. A. 1989. Vol. 421. P. 79–108.
- [14] *Prasad R.R., Sreenivasan K.R.* // Phys. Fluids. A. 1990. Vol. 2. N 9. P. 792–807.
- [15] *Sreenivasan K.R.* // Phys. Rev. Lett. 1991. Vol. 67. N 13. P. 1739–1742.
- [16] *Flohr P., Olivari D.* // Phys. D. 1994. Vol. 76. N 1–3. P. 278–290.