

01;10

Движение частицы в постоянном магнитном поле и в поле плоской электромагнитной волны

© Е.М. Болдырев

Институт физики высоких энергий,
142284 Протвино, Московская область, Россия

(Поступило в Редакцию 18 августа 1995 г.)

Приводятся решения уравнения движения заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле: суперпозиции постоянно-однородного магнитного поля и поля плоской электромагнитной волны, поляризованной по кругу, как решения задачи Коши. Рассматривается случай резонанса.

Введение

Решение уравнения движения заряженной частицы во внешнем поле (суперпозиции постоянно-однородного магнитного поля и поля плоской электромагнитной волны, поляризованной по кругу) имеет не только теоретический интерес, о чем свидетельствуют публикации (см. [1] и приведенную там библиографию), но и практический, поскольку расчеты реальных физических систем, где реализуется указанная конфигурация внешнего электромагнитного поля (например, такие системы, как осциллографы, лазеры на свободных электронах и т.п.), с необходимостью требуют в качестве предварительной оценки описания движения заряженной частицы в такой простой модели, которая приведена в настоящей работе.

В отличие от [1,2] решения задачи Коши в настоящей работе представлены в явной зависимости от начальных данных, что облегчает их практическое применение. Необходимо так же отметить, что решения, приведенные в [2] в случае резонанса, интересном с физической и практической точек зрения, не удовлетворяют исходному уравнению движения. В нашем случае заряд частицы не фиксируется и для резонанса видна зависимость движения частицы от комбинирования знака заряда и степени поляризации электромагнитной волны. Как пример в настоящей работе рассматривается движение протона в указанной конфигурации электромагнитных полей.

Постановка задачи и метод решения

Как и в [2], систему координат (x, y, z) выбираем в соответствии с внешними полями: однородное постоянное магнитное поле направлено вдоль оси z и вдоль этой же оси распространяется плоская поляризованная по кругу электромагнитная волна, т.е.

$$\mathbf{H} = (-gE \sin \omega \xi, E \cos \omega \xi, H),$$

$$\mathbf{E} = (E \cos \omega \xi, gE \sin \omega \xi, 0),$$

где H, E — величина магнитного и электромагнитного полей соответственно; ω — частота электромаг-

нитной волны; $\xi = t - (z/c)$, t — время в лабораторной системе, c — скорость света; $g = \pm 1$ — степень поляризации электромагнитной волны.

Далее вводим ортонормированный базис $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$, $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$, в котором радиус-вектор частицы массой m и зарядом e , движущийся в заданном электромагнитном поле, имеет вид $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Для определения траектории движения частицы в указанном трехмерном пространстве и для ее импульса $\mathbf{P}(t)$ мы имеем следующую задачу Коши [4]:

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}[\mathbf{v}, \mathbf{H}],$$

$$\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0, \quad \mathbf{P}(t_0) = \mathbf{P}_0.$$

При этом $e = g_e|e|$, $g_e = \pm 1$ для положительно заряженной частицы и $g_e = -1$ для отрицательно заряженной частицы, $|e|$ — величина заряда частицы, \mathbf{v} — скорости частицы. Указанная задача Коши имеет следующие интегралы [2]:

$$\alpha = \frac{\varepsilon}{mc^2} - \frac{P_z}{mc},$$

$$\mathbf{f} = \frac{\mathbf{P}}{mc} - \frac{P_z}{mc}\mathbf{k} - g_e\gamma\mathbf{a} + g_e\frac{\omega_H}{c}(-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}).$$

Здесь ε — кинетическая энергия частицы, $\gamma = \omega_E/\omega$, $\mathbf{a} = (\sin \omega \xi, -g \cos \omega \xi, 0)$, $\omega_E = |e|E/mc$, $\omega_H = |e|H/mc$.

Переходим от переменных $[t, x, y, z]$ к переменным $[\xi, x, y, z]$ согласно $t = \xi + (z/c)$, $x = x$, $y = y$, $z = z$. При этом для любой произвольной функции $F(\xi)$ в силу первого интеграла производная от этой функции по τ — собственному времени частицы ($d\tau = dt\sqrt{1-\beta^2}$, $\beta = v/c$) есть $\alpha(dF(\xi)/d\xi)$. Следуя общей теории дифференциальных уравнений [3], определяем интегралы задачи Коши через начальные условия. Из последнего интеграла для определения $x(\xi)$, $y(\xi)$ мы имеем систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx(\xi)}{d\xi} = g_e\gamma_1 \sin \omega \xi + g_e\omega_1 y(\xi) + \eta f_x,$$

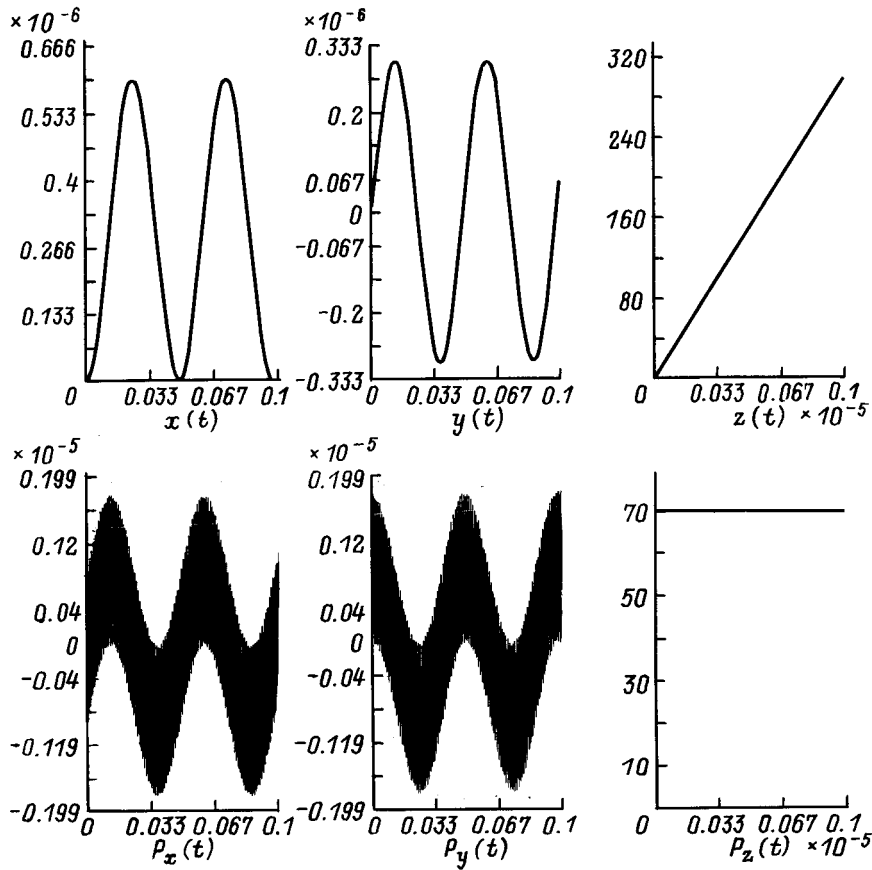


Рис. 1.

$$\frac{dy(\xi)}{d\xi} = -g_e \gamma_1 \cos \omega \xi - g_e \omega_1 x(\xi) + \eta f_y,$$

где $\gamma_1 = \eta \gamma$, $\omega_1 = \omega_H / \alpha$, $\eta = c / \alpha$,

$$\alpha = \frac{\varepsilon_0}{mc^2} - \frac{P_{z0}}{mc},$$

$$f_x = \frac{P_{x0}}{mc} - g_e \gamma \sin \omega \xi_0 - g_e \frac{\omega_H}{c} y_0,$$

$$f_y = \frac{P_{y0}}{mc} + g_e \gamma \cos \omega \xi_0 + d_e \frac{\omega_H}{c} x_0.$$

Здесь ε_0 — начальная кинетическая энергия движущейся частицы ($\varepsilon_0 = c\sqrt{P^2 + m^2 c^2}$, $P^2 = P_x^2 + P_y^2 + P_z^2$). Далее мы находим

$$P_x(\xi) = m\alpha \frac{dz(\xi)}{d\xi},$$

$$P_y(\xi) = m\alpha \frac{dy(\xi)}{d\xi},$$

после чего $P_z(\xi)$ определяется из дифференциального уравнения

$$\frac{P_z(\xi)}{d\xi} = g_e \frac{\omega_e}{\alpha} (P_x \cos \omega \xi + g P_y \sin \omega \xi),$$

тогда $z(\xi)$ находим как неопределенный интеграл от $P_z(\xi)$ по $d\xi$. Кинетическая энергия определяется из первого интеграла движения

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{mc^2} + \frac{P_z - P_{z0}}{mc}.$$

Для того чтобы вновь перейти от переменных $[\xi, x, y, z]$ к переменным $[t, x, y, z]$ необходимо решить нелинейное уравнение

$$\xi = t - \frac{z(\xi)}{c}.$$

Как показывают рассуждения в [3], решение $\xi = \xi(t, z)$ этого уравнения существует и оно без труда находится численным методом.

В Приложении приведены явные выражения координат и компонент импульса заряженной частицы, движущейся во внешнем электромагнитном поле: суперпозиции постоянно-однородного магнитного поля и поля плоской электромагнитной волны поляризованной по кругу. Анализ этих формул показывает, что для общего случая x -, y -компоненты радиус-вектора траектории и импульса есть линейная комбинация двух осциллирующих членов с частотами ω и ω_1 , которые обозначим $O(\omega)$ и $O(\omega_1)$ соответственно. Для z -компонент траектории и импульса

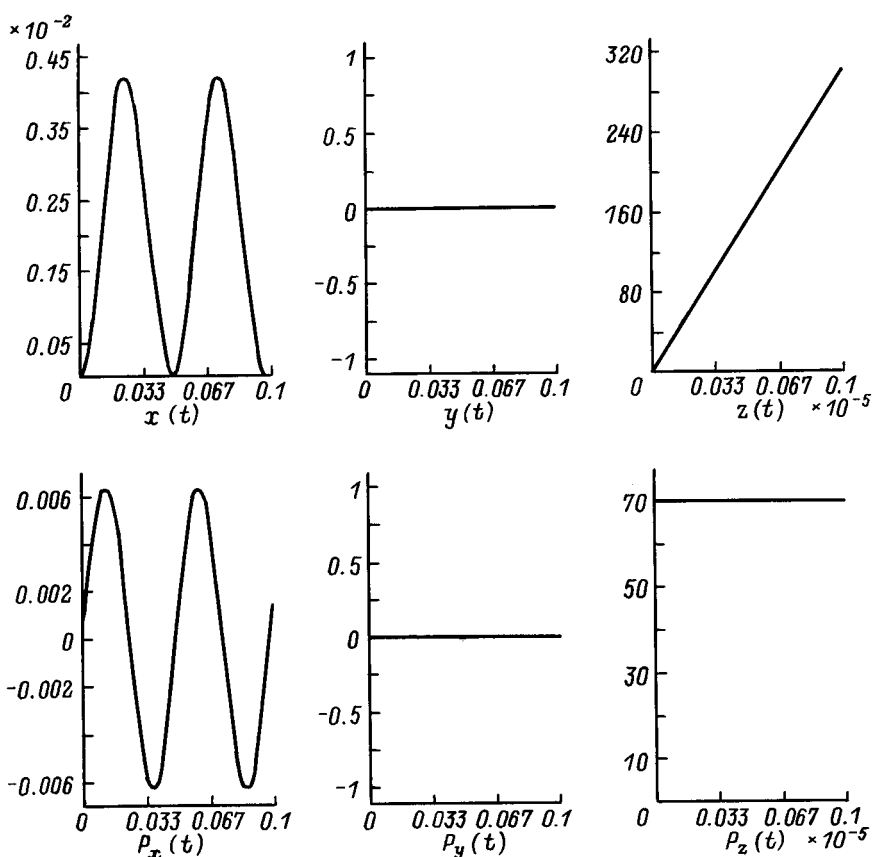


Рис. 2.

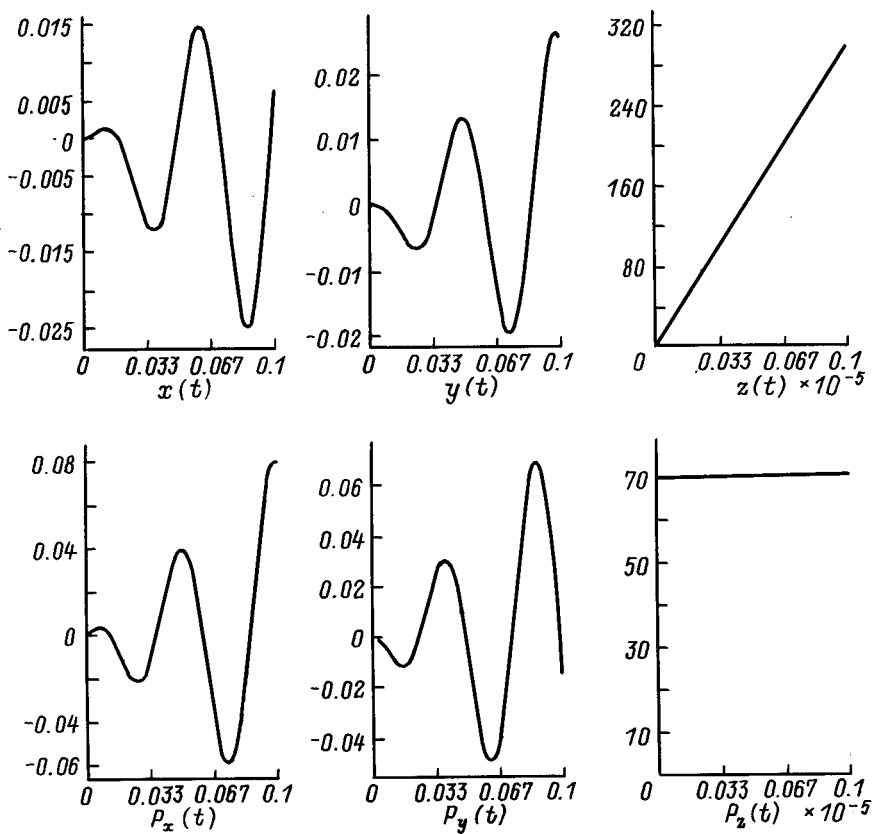


Рис. 3.

имеем линейную комбинацию осциллирующих членов с комбинацией частот ω и ω_1 . И еще в z -компоненте радиус-вектора траектории имеем член, линейно зависящий от ξ , который мы обозначим как $L(\xi)$. В случае резонанса ($\omega = \omega_1$) движение частицы существенно меняется, ибо в этом случае имеем в x -, y -, z -компонентах радиуса-вектора траектории и импульса не только линейную комбинацию $O(\omega_1)$, но еще в x -, y -компонентах имеем осциллирующий член с амплитудой, линейно зависящей от ξ , который обозначим $OL(\omega_1, \xi)$; в z -компоненте радиуса-вектора траектории имеем кубические и квадратичные члены от ξ , а в z -компоненте импульса — квадратичные и линейные. Необходимо отметить зависимость движения частицы в случае резонанса от комбинирования знака заряда частицы и степени поляризации электромагнитной волны: члены в компонентах, общим множителем которых являются $gg_e \pm 1$, совершенно различны и, более того, при такой комбинации знака заряда и степени поляризации, когда $gg_e = 1$, $OL(\omega_1, \xi)$ в x -, y -компонентах исчезает.

Для иллюстрации вышеизложенного метода определения движения заряженной частицы в суперпозиции постоянно-однородного магнитного поля и поля плоской электромагнитной волны, поляризованной по кругу, проведены расчеты движения протона с начальной энергией 70 ГэВ в указанном внешнем электромагнитном поле с параметрами $H = E = 10^5$ Гс и начальными данными (при $t = 0$) $x_0 = y_0 = z_0 = P_{x0} = P_{y0} = 0$, $P_{z0} = 70$ ГэВ/с. Хотя указанный пример и является иллюстративным, но тем не менее выбор параметров модели в принципе позволяет указанную модель реализовать экспериментально.

На рис. 1–3 показаны проведенные расчеты в зависимости от времени (s) в лабораторной системе отсчета. На этих рисунках три верхних графика есть $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ (м); следующие три графика есть $P_x(t)$, $P_y(t)$, $P_z(t)$ (ГэВ/с). Приведение зависимости энергии от времени нецелесообразно, поскольку при данных условиях энергия даже в случае резонанса со временем меняется незначительно и $\varepsilon(t)$ повторяет зависимость величины импульса в силу кинематической зависимости между ними, а величина импульса фактически есть $P_z(t)$.

На рис. 1 показан общий случай $g = 1$. В случае $g = -1$ меняется только фаза. Обращает на себя внимание, что в этом случае практически имеем движение протона в постоянно-однородном магнитном поле. Это связано с тем, что при данных условиях частота ω более чем на два порядка больше частоты ω_1 , а поскольку $O(\omega)$ и $O(\omega_1)$ имеют знаменателями ω и ω_1 соответственно, то имеем доминирование $O(\omega_1)$. В силу той же причины и в z -компоненте радиуса-вектора траектории доминирующим становится только член, линейно зависящий от времени. В компонентах импульса $O(\omega)$ и $O(\omega_1)$ становятся

сравнимыми, и мы имеем сложение двух колебательных процессов: движения в магнитном поле и поле электромагнитной волны; в z -компоненте доминирует постоянный член — начальный импульс (то же, разумеется, и для энергии).

На рис. 2 и 3 показаны случаи ($g = 1$ и -1 соответственно) резонанса ($\omega = \omega_1$) и, следовательно, мы имеем только один колебательный процесс. Следует отметить существенное различие между этими двумя случаями, о чем было замечено выше. То, что в случае $g = 1$ движение происходит в одной плоскости, в основном за счет выбора наших начальных условий. Но существенно, что отличается и сам характер движения, не считая z -компоненты радиус-вектора траектории, где, как и в общем случае, доминирующим является $L(\xi)$, и z -компоненты импульса, где доминирующим по-прежнему является постоянный член — начальный импульс. В нашем случае $gg_e = 1$ и, как это было сказано выше, $OL(\omega_1, \xi)$ исчезает и мы имеем чисто колебательный процесс. При $g = 1$ $OL(\omega_1, \xi)$ не только не исчезает (коэффициент перед ним удваивается), но даже становится доминирующим, что и находит свое отражение в характере движения.

В заключение автор выражает благодарность С.А. Садовскому за постановку задачи, А.П. Воробьеву, В.В. Змушко, В.О. Соловьеву за обсуждение и сделанные замечания.

Приложение.

Движение частицы в общем случае

$$\begin{aligned}
 x = & x_0 + \frac{P_{x0}}{\alpha m \omega_1} \sin \omega_1 (\xi - \xi_0) + g_e \frac{P_{y0}}{\alpha m \omega_1} [1 - \cos \omega_1 (\xi - \xi_0)] \\
 & - g \frac{\gamma_1}{\omega_1 + gg_e \omega} \cos \omega \xi + g \frac{\gamma_1}{\omega_1} \cos \omega \xi_0 \\
 & + \frac{1}{2} g (1 - gg_e) \frac{\gamma_1}{\omega_1} \frac{\omega}{\omega_1 - \omega} \cos [\omega_1 (\xi - \xi_0) + \omega \xi_0] \\
 & - \frac{1}{2} g (1 - gg_e) \frac{\gamma_1}{\omega_1} \frac{\omega}{\omega_1 + \omega} \cos [\omega_1 (\xi - \xi_0) - \omega \xi_0], \\
 y = & y_0 - g \frac{P_{x0}}{\alpha m \omega_1} [1 - \cos \omega_1 (\xi - \xi_0)] \\
 & + \frac{P_{y0}}{\alpha m \omega_1} \sin \omega_1 (\xi - \xi_0) \\
 & - \frac{\gamma_1}{\omega_1 + gg_e \omega} \sin \omega \xi + \frac{\gamma_1}{\omega_1} \sin \omega \xi_0 \\
 & + \frac{1}{2} (1 - gg_e) \frac{\gamma_1}{\omega_1} \frac{\omega}{\omega_1 - \omega} \sin [\omega_1 (\xi - \xi_0) + \omega \xi_0] \\
 & + \frac{1}{2} (1 + gg_e) \frac{\gamma_1}{\omega_1} \frac{\omega}{\omega_1 + \omega} \sin [\omega_1 (\xi - \xi_0) - \omega \xi_0],
 \end{aligned}$$

$$z = z_0 + g_e \frac{\omega_E}{\alpha(\omega_1 + gg_e\omega)^2} \times \left\{ \frac{P_{x0}}{\alpha m} \left\{ \cos \omega \xi_0 - \cos[\omega_1(\xi - \xi_0) + gg_e\omega\xi] \right\} + \frac{P_{y0}}{m\alpha} \left\{ g \sin \omega \xi_0 - g_e \sin[\omega_1(\xi - \xi_0) + gg_e\omega\xi] \right\} + \frac{1}{2} g(1 - gg_e) \frac{\gamma_1 \omega}{\omega_1 - \omega} \sin[\omega_1(\xi - \xi_0) + \omega(gg_e\xi + \xi_0)] - \frac{1}{2} g(1 + gg_e) \frac{\gamma_1 \omega}{\omega_1 + \omega} \sin[\omega_1(\xi - \xi_0) + \omega(gg_e\xi - \xi_0)] \right\} + \frac{1}{\alpha m} \left[P_{z0} - \frac{1}{\alpha} \frac{\omega_E}{\omega_1 + gg_e\omega} \left(g P_{x0} \sin \omega \xi_0 - P_{y0} \cos \omega \xi_0 - \frac{\alpha \gamma_1 \omega m}{\omega_1 + gg_e\omega} \right) \right] (\xi - \xi_0),$$

$$P_x = P_{x0} \cos \omega_1(\xi - \xi_0) + g_e P_{y0} \sin \omega_1(\xi - \xi_0) + g \frac{\alpha \gamma_1 \omega m}{\omega + gg_e\omega} \sin \omega \xi - \frac{1}{2} g(1 - gg_e) \frac{\alpha \gamma_1 \omega m}{\omega_1 - \omega} \sin[\omega_1(\xi - \xi_0) + \omega \xi_0] + \frac{1}{2} g(1 + gg_e) \frac{\alpha \gamma_1 \omega m}{\omega_1 + \omega} \sin[\omega_1(\xi - \xi_0) + \omega \xi_0],$$

$$P_y = P_{y0} \cos \omega_1(\xi - \xi_0) - g_e P_{x0} \sin(\xi - \xi_0) - \frac{\alpha \gamma_1 \omega m}{\omega + gg_e\omega} \cos \omega \xi + \frac{1}{2} (1 - gg_e) \frac{\alpha \gamma_1 \omega m}{\omega_1 - \omega} \cos[\omega_1(\xi - \xi_0) + \omega \xi_0] + \frac{1}{2} (1 + gg_e) \frac{\alpha \gamma_1 \omega m}{\omega_1 + \omega} \cos[\omega_1(\xi - \xi_0) - \omega \xi_0],$$

$$P_z = P_{z0} + \frac{\omega_E}{\alpha(\omega_1 + gg_e\omega)} \times \left\{ P_{x0} \left\{ g_e \sin[\omega_1(\xi - \xi_0) + gg_e\omega\xi] - g \sin \omega \xi_0 \right\} + P_{y0} \left\{ \cos \omega \xi_0 - \cos[\omega_1(\xi - \xi_0) + gg_e\omega\xi] \right\} - \frac{1}{2} (1 - gg_e) \frac{\alpha \gamma_1 \omega m}{\omega_1 - \omega} \cos[\omega_1(\xi - \xi_0) + \omega(gg_e\xi + \xi_0)] - \frac{1}{2} (1 + gg_e) \frac{\alpha \gamma_1 \omega m}{\omega_1 + \omega} \cos[\omega_1(\xi - \xi_0) + \omega(gg_e\xi - \xi_0)] \right\} + m \gamma_1 \frac{\omega_E \omega}{(\omega_1 + gg_e\omega)^2}.$$

Движение частицы в случае резонанса ($\omega = \omega_1$)

$$x = x_0 + \frac{1}{2} g_e (1 - gg_e) \gamma_1 (\xi - \xi_0) \sin \omega_1 \xi + \frac{P_{x0}}{\alpha m \omega_1} \sin \omega_1 (\xi - \xi_0) + g_e \frac{P_{y0}}{\alpha m \omega_1} [1 - \cos \omega_1 (\xi - \xi_0)] + \frac{1}{4} (1 - 3gg_e) \frac{\gamma_1}{\omega_1} \cos \omega_1 \xi - \frac{1}{4} g_e (1 + gg_e) \frac{\gamma_1}{\omega_1} \cos \omega_1 (\xi - 2\xi_0) + g \frac{\gamma_1}{\omega_1} \cos \omega_1 \xi_0,$$

$$y = y_0 + \frac{1}{2} (1 - gg_e) \gamma_1 (\xi - \xi_0) \cos \omega_1 \xi - g_e \frac{P_{x0}}{\alpha m \omega_1} [1 - \cos \omega_1 (\xi - \xi_0)] + \frac{P_{y0}}{\alpha m \omega_1} \sin \omega_1 (\xi - \xi_0) - \frac{1}{4} (3 - gg_e) \frac{\gamma_1}{\omega_1} \sin \omega_1 \xi + \frac{1}{4} g_e (1 + gg_e) \frac{\gamma_1}{\omega_1} \sin \omega_1 (\xi - 2\xi_0) + \frac{\gamma_1}{\omega_1} \sin \omega_1 \xi_0,$$

$$z = z_0 + g_e \frac{\omega_E}{m\alpha^2} \left\{ \frac{1}{12} (1 - gg_e) \left[g_e m \alpha \gamma_1 \omega_1 (\xi^3 - \xi_0^3) + 3(P_{x0} \cos \omega_1 \xi_0 - g_e P_{y0} \sin \omega_1 \xi_0 - g_e m \alpha \gamma_1 \omega_1 \xi_0) (\xi^2 - \xi_0^2) \right] - \frac{1}{8\omega_1^2} (1 + gg_e) \left[P_{x0} [\cos \omega_1 (2\xi - \xi_0) - \cos \omega_1 \xi_0] + g_e P_{y0} [\sin \omega_1 (2\xi - \xi_0) - \sin \omega_1 \xi_0] + \frac{1}{2} g_e m \alpha \gamma_1 \sin 2\omega_1 (\xi - \xi_0) \right] \right\} + \frac{1}{m\alpha} \left\{ P_{z0} - \frac{1}{4} g_e \frac{\omega_E}{\omega_H} \times \left[2(1 - gg_e) \left(\frac{1}{2} g_e m \alpha \gamma_1 \omega_1^2 \xi_0^2 + P_{x0} \omega_1 \xi_0 \cos \omega_1 \xi_0 - g_e P_{y0} \omega_1 \xi_0 \sin \omega_1 \xi_0 - g_e \alpha m \gamma_1 \omega_1^2 \xi_0^2 \right) + (1 + gg_e) \times (P_{x0} \sin \omega_1 \xi_0 - g_e P_{y0} \cos \omega_1 \xi_0 - \frac{1}{2} g_e m \alpha \gamma_1) \right] \right\} (\xi - \xi_0),$$

$$P_x = g_e P_{x0} \cos \omega_1 (\xi - \xi_0) + g_e P_{y0} \sin \omega_1 (\xi - \xi_0) - \frac{1}{2} g_e (1 - gg_e) m \alpha \gamma_1 \omega_1 (\xi - \xi_0) \cos \omega_1 \xi + \frac{1}{4} g_e (1 + gg_e) m \alpha \gamma_1 \sin \omega_1 \xi + \frac{1}{4} g_e (1 + gg_e) m \alpha \gamma_1 \sin \omega_1 (\xi - 2\xi_0),$$

$$\begin{aligned}
 P_y &= P_{y0} \cos \omega_1(\xi - \xi_0) - g_e P_{x0} \sin \omega_1(\xi - \xi_0) \\
 &\quad - \frac{1}{2}(1 - gg_e)m\alpha\gamma_1\omega_1(\xi - \xi_0) \sin \omega_1\xi \\
 &\quad - \frac{1}{4}(1 + gg_e)m\alpha\gamma_1 \cos \omega_1\xi \\
 &\quad + \frac{1}{4}(1 + gg_e)m\alpha\gamma_1 \cos \omega_1(\xi - 2\xi_0), \\
 P_z &= P_{z0} + \frac{1}{4}g_e \frac{\omega_E}{\omega_H} \left\{ (1 - gg_e) \left[g_e m\alpha\gamma_1\omega_1^2(\xi^2 - \xi_0^2) \right. \right. \\
 &\quad + 2(P_{x0} \cos \omega_1\xi_0 - g_e P_{y0} \sin \omega_1\xi_0 - g_e m\alpha\gamma_1\omega_1\xi_0) \\
 &\quad \times \omega_1(\xi - \xi_0) \left. \right] + (1 + gg_e) \left[P_{x0} [\sin \omega_1(2\xi - \xi_0) - \sin \omega_1\xi_0] \right. \\
 &\quad - g_e P_{y0} [\cos \omega_1(2\xi - \xi_0) - \cos \omega_1\xi_0] \\
 &\quad \left. \left. - \frac{1}{2}g_e m\alpha\gamma_1 [\cos 2\omega_1(\xi - \xi_0) - 1] \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

Для всех случаев

$$t = \xi + \frac{z(\xi)}{c}, \quad \varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{mc^2} + \frac{P_z - P_{z0}}{mc}.$$

Список литературы

- [1] Володин Б.А., Хапаев А.М. Изв. вузов. Физика. 1989. № 3. С. 76.
- [2] Соколов А.А., Тернов И.М. Релятивистский электрон. М., 1974.
- [3] Смирнов В.И. Курс высшей математики. М., 1974. Т. 2.
- [4] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. М., 1973.