01

К решению двух вазимосводящихся задач электростатики

© Р.З. Муратов

Московский государственный горный университет,
117935 Москва, Россия

(Поступило в Редакцию 6 декабря 1995 г.)

Известны две задачи электростатики, решения которых сводятся друг к другу. Одна — о заземленном проводнике, имеющем полость с заданной границей $\bar{S}$. Внутри полости по другой поверхности S или по охватываемому последней объему дано распределение заряда. Требуется найти плотность заряда, индуцированного на $\bar{S}$. Вторая — об адекватных (порождающих одинаковое внешнее поле) системах зарядов. В ней даны те же поверхности S и $\bar{S}$ и тот же исходный распределенный заряд, что и в первой задаче, но в пустом пространстве, а искомым является распределение заряда на $\bar{S}$, адекватное заданному. Взаимосводимость позволяет ограничиться задачей какого-нибудь одного (например, второго) типа, которая и рассматривается в работе применительно к софокусным эллипсоидам S и $\bar{S}$ и распределениям заряда, характеризующимся полиномиальными функциями декартовых координат. Описан метод мультипольных моментов, непосредственно (без вычисления поля) приводящий к решению. Даны аналитические решения для простейших поверхностных и объемных распределений заряда. Разобраны частные и предельные случаи, включая вырождение поверхностей S и $\bar{S}$ в софокусные эллиптические цилиндры.

Введение

К числу практически интересных задач макроскопической электростатики относится следующая. Пусть в некотором заземленном проводящем теле имеется замкнутая полость, уравнение границы $\bar{S}$ которой дано. Внутри полости в объеме, охватываемом другой заданной поверхностью S, или по самой S распределен заряд, соответствующая плотность $\rho(\mathbf{r})$ или $\sigma(\mathbf{r})$ которого тоже задана. Требуется найти поверхностную плотность $\bar{\eta}(\mathbf{r})$ индуцированного на $\bar{S}$ заряда.

У описанной задачи имеется "двойник" в электростатике вакуума. Мы имеем в виду, что задачу о полом проводнике можно считать решенной [1, с. 524], если решена взаимно соответствующая ей задача об адекватных[1] (т.е. создающих одинаковый наружный потенциал) системах зарядов. В последней заданы те же плотность ρ или σ и поверхности S и $\bar{S}$, что и в первой задаче, но теперь рассматривается свободное от материальных сред пространство и ищется плотность $\bar{\sigma}(\mathbf{r})$ распределенного по $\bar{S}$ заряда, адекватная заданному исходному распределению. Поскольку решения обеих задач различаются только знаком ($\bar{\eta} = -\bar{\sigma}$), далее обсуждается только задача об адекватных источниках. В принципиальном плане возможные подходы к ее решению рассмотрены в [2]. Там же для случая, когда S и $\bar{S}$ сливаются в одну сферическую поверхность, найдено распределение $\bar{\sigma}$, адекватное заданной плотности ρ.

В данной работе задача об адекватных зарядах рассматривается применительно к софокусным эллипсоидальным поверхностям S и $\bar{S}$, описывающимся соответственно уравнениями

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \tag{1}$$

[1] Их называют также "эквивалентными".

$$\frac{x^2}{\bar{a}^2} + \frac{y^2}{\bar{b}^2} + \frac{z^2}{\bar{c}^2} = 1, \tag{2}$$

где полуоси эллипсоидов подчинены равенствам[2]

$$\bar{a}^2 - a^2 = \bar{b}^2 - b^2 = \bar{c}^2 - c^2 = \lambda. \tag{3}$$

Будем считать также, что исходный заряд на S или в ограниченном ею объеме задается соответственно функциями $\sigma(x, y, z)/p$ или $\rho(x, y, z)$, являющимися полиномами декартовых координат. Здесь $p = \langle x^2/a^4 \rangle^{-1/2}$, угловые скобки всюду обозначают сумму трех циклических слагаемых.

В рамках сделанных предположений осуществимо строгое однозначное решение задачи на основе метода, развитого в [3]. То обстоятельство, что в [3] речь шла не об электрических зарядах, а о гравитационных источниках, с математической точки зрения не является принципиальным. Это позволяет ограничиться здесь лишь необходимым общим описанием метода, не воспроизводя деталей его обоснования. Тем самым содержание работы сводиться к рассмотрению простейших характерных примеров задачи об адекватных зарядах, их точному решению и анализу частных и предельных случаев.

Метод мультипольных моментов

Построенный в [3] и используемый в данной работе прямой метод нахождения поверхностных зарядов $\bar{\sigma}$, адекватных заданным полиномам σ/p или ρ, опирается на точные формулы мультипольного представления

[2] С точки зрения задач о полом проводнике и адекватных зарадах величина λ в условии софокусности (3) эллипсоидов (1) и (2) есть заданное неотрицательное число. Однако, имея дело с аналитическими решениями, позволительно рассматривать (2) и (3) как параметрическое задание семейства софокусных эллипсоидов, где при $c = \min\{a, b, c\}$ значения параметра λ лежат в диапазоне $-c^2 \leqslant \lambda < \infty$. Эта возможность используется при анализе предельных случаев.

внешних потенциалов эллипсоида [4,5]. Следует отметить, что все полученные для гравитационных полей аналитические результаты работ [3–5] непосредственно переходят в записанные в гауссовой системе единиц их электрические аналоги, если гравитационную постоянную заменить единицей, а плотность и мультипольные моменты масс трактовать как плотность заряда и электростатические мультиполи соответственно.

Для дальнейшего существенны следующие два утверждения, вытекающие из изложенной в [4,5] теории и справедливые для произвольных софокусных эллипсоидов (1) и (2): а) распределенный по поверхности (2) заряд плотности $\bar{\sigma}_L$ адекватен заданному на поверхности (1) заряду плотности σ_L, если равны между собой все соответствующие распределениям σ_L и $\bar{\sigma}_L$ мультипольные моменты $Q^{(\sigma)}_{i_1\ldots i_l}$ и $\bar{Q}_{i_1\ldots i_l}$, тензорный ранг l которых заключен в диапазоне $0 \leqslant l \leqslant L$; б) распределенный по поверхности (2) заряд плотности $\bar{\sigma}_{L+2}$ адекватен заданному в объеме V эллипсоида (1) заряду плотности ρ_L, если равны между собой все соответствующие распределениям ρ_L и $\bar{\sigma}_{L+2}$ мультипольные моменты $Q^{(\rho)}_{i_1\ldots i_l}$ и $\bar{Q}_{i_1\ldots i_l}$, ранг которых заключен в диапазоне $0 \leqslant l \leqslant L+2$.

Здесь и далее σ_L/p, ρ_L и $\bar{\sigma}_L$ и $\bar{\sigma}_L/\bar{p}$ — полиномы степени L, $\bar{p} = \langle x^2/\bar{a}^4\rangle^{-1/2}$. Мультипольные моменты распределений σ_L и ρ_L определяются формулами

$$Q^{(\sigma)}_{i_1\ldots i_l} = \oint \sigma_L(x,y,z) d_{i_1\ldots i_l}(x,y,z) dS, \tag{4}$$

$$Q^{(\rho)}_{i_1\ldots i_l} = \int \rho_L(x,y,z) d_{i_1\ldots i_l}(x,y,z) dV, \tag{5}$$

где введенные в [6] тензоры $d_{i_1\ldots i_l} = \hat{D}_{i_1}\ldots\hat{D}_{i_l}\cdot 1$ являются результатом воздействия произведения компонент векторного оператора $\hat{\mathbf{D}} = 2\mathbf{r}(\mathbf{r}\nabla) - r^2\nabla + \mathbf{r}$ на единицу. В последующих вычислениях используются, в частности, следующие явные выражения некоторых компонент этих тензоров:

$$d_x = x, \qquad d_{xx} = 2x^2 - y^2 - z^2,$$
$$d_{xy} = 3xy, \quad d_{xyy} = 3x(4y^2 - x^2 - z^2). \tag{6}$$

Таким образом, метод сводится к вычислению и приравниванию друг другу конечного числа (зависящего от степени L полинома) независимых компонент мультипольных тензоров заданного σ_L (или ρ_L) и искомого $\bar{\sigma}_L$ (или $\bar{\sigma}_{L+2}$) распределений заряда и решению получающейся системы линейных алгебраических уравнений, выражающей коэффиценты полинома $\bar{\sigma}_L/\bar{p}$ (или $\bar{\sigma}_{L+2}/\bar{p}$) через заданные величины. При этом не возникает необходимости в вычислении электростатического потенциала и удается сохранить и использовать декартову симметрию решений.

Отметим, что в [3] обоснование метода мультипольных моментов и единственности доставляемого им решения задачи об адекватных источниках дано для случая, когда исходное распределение характеризуется объемной плотностью, а поверхности (1) и (2) совпадают. Это алгебраическое обоснование, включающее в себя доказательство равенства числа неизвестных (коэффициентов искомого полинома) числу уравнений (независимых компонент мультипольных моментов) и неравенства нулю определителя системы уравнений, сохраняет силу, как нетрудно сообразить, и для рассматриваемых здесь обобщений задачи.

Адекватные поверхностные заряды

В этом разделе речь пойдет о нахождении плотности $\bar{\sigma}_L$ поверхностного заряда на эллипсоиде (2), адекватной плотности σ_L, заданной на поверхности (1). Говоря о полиномиальных функциях σ_L/p и $\bar{\sigma}_L/\bar{p}$, напомним, что степенью произвольного полинома, рассматриваемого на границе эллипсоида (например, на поверхности (1)), называют степень полинома, получающегося из исходного в результате исключения с помощью (1) четных степеней какой-либо из декартовых координат и приведения подобных членов. Эти полиномы мы будем записывать в следующем симметричном виде:[3]

$$\sigma_L/p = \sum_{m=0}^{L} \sigma^{(m)}/p = \sum_{m=0}^{L} \sum_{i+j+k=m} \alpha_{ijk}(x/a)^i(y/b)^j(z/c)^k, \tag{7}$$

где в соответствии с установленной в [4] возможностью трактовать $\sigma^{(m)}/p$ как гармонические полиномы переменных x/a, y/b и z/c, коэффициенты α_{ijk} связаны уравнениями

$$(i+2)(i+1)\alpha_{i+2,j,k} + (j+2)(j+1)\alpha_{i,j+2,k} + (k+2)(k+1)\alpha_{i,j,k+2} = 0. \tag{8}$$

Использование так называемых "парциальных" плотностей $\sigma^{(m)}$ заряда удобно тем, что, как показано в [5], все электрические 2^l-польные моменты, обусловленные распределением $\sigma^{(m)}$ и удовлетворяющие неравенству $l < m$, равны нулю.

Обратимся теперь к конктретному примеру, в котором исходная плотность заряда соответствует полиному второй степени

$$\sigma_2/p = \alpha_{000} + \langle\alpha_{100}x/a\rangle + \langle\alpha_{110}xy/(ab)\rangle + \langle\alpha_{200}x^2/a^2\rangle, \tag{9}$$

причем в согласии с (8)

$$\langle\alpha_{200}\rangle = 0.$$

[3] Укажем еще одно (сохраняющее равноправие декартовых направлений) представление [3] таких полиномов

$$\sigma_L/p = \sum_{l=L-1}^{L} \sum_{i+j+k=l} \varkappa_{ijk}(x/a)^i(y/b)^j(z/c)^k.$$

Оно оказалось полезным, в частности, в опущенных в разделе 4 промежуточных выкладках при предельном переходе к результатам для эллиптического цилиндра.

В соответствии с утверждением а предыдущего раздела, соображениями симметрии и избранной формой записи "поверхностных" полиномов искомое распределение заряда на поверхности (2) имеет аналогичный вид

$$\bar{\sigma}_2 = \left(\beta_{000} + \left\langle \beta_{100}\frac{x}{\bar{a}}\right\rangle + \left\langle \beta_{110}\frac{xy}{\bar{a}\bar{b}}\right\rangle + \left\langle \beta_{200}\frac{x^2}{\bar{a}^2}\right\rangle\right)\bar{p}, \tag{10}$$

где

$$\langle\beta_{200}\rangle = 0. \tag{11}$$

Используя определение (4) и выражения (6), вычислим и приравняем друг другу полные заряды $Q^{(\sigma)} = \oint \alpha_{000} pdS$ и $\bar{Q} = \oint \beta_{000}\bar{p}d\bar{S}$, дипольные компоненты $Q_x^{(\sigma)}$ и $\bar{Q}_x$, квадрупольные компоненты $Q_{xy}^{(\sigma)}$ и $\bar{Q}_{xy}$, а также квадрупольные компоненты $Q_{xx}^{(\sigma)}$ и $\bar{Q}_{xx}$, отвечающие распределениям (9) и (10). При вычислении мультиполей полезна "поверхностная" формула Лагранжа

$$\oint \left(\frac{x}{a}\right)^{2l}\left(\frac{y}{b}\right)^{2m}\left(\frac{z}{c}\right)^{2n} pdS = \frac{4\pi\Pi_{lmn}abc}{(2l+2m+2n+1)!!},$$

$$\Pi_{lmn} = (2l-1)!!(2m-1)!!(2n-1)!!. \tag{12}$$

В результате указанных действий получаем для β_{000}, β_{100}, β_{110} окончательные выражения

$$\beta_{000} = g\alpha_{000}, \tag{13}$$

$$\beta_{100} = g\frac{a}{\bar{a}}\alpha_{100}, \quad \beta_{110} = g\frac{ab}{\bar{a}\bar{b}}\alpha_{110}, \tag{14), (15}$$

где

$$g = \frac{abc}{\bar{a}\bar{b}\bar{c}},$$

а для коэффициентов β_{200}, β_{020}, β_{002} второе наряду с (11) уравнение

$$2\bar{a}^2\beta_{200} - \bar{b}^2\beta_{020} - \bar{c}^2\beta_{002} = g(2a^2\alpha_{200} - b^2\alpha_{020} - c^2\alpha_{002}). \tag{16}$$

Третье уравнение замыкающее систему, находится из (16) с помощью циклической перестановки. В качестве него можно взять, например,

$$\bar{a}^2\beta_{200} - 2\bar{b}^2\beta_{020} + \bar{c}^2\beta_{002} = g(a^2\alpha_{200} - 2b^2\alpha_{020} + c^2\alpha_{002}). \tag{17}$$

Еще одно уравнение, циклчески связанное с (16), уже не будет независимым, представляя линейную комбинацию (16) и (17). Решение системы уравнений (11), (16) и (17) дает для β_{200} значение, которое с учетом $\langle\alpha_{200}\rangle = 0$ запишем в виде

$$\beta_{200} = g\left\langle\bar{a}^2\bar{b}^2\right\rangle^{-1}\left[\left\langle a^2b^2\right\rangle\alpha_{200} + \lambda\left(3a^2\alpha_{200} - \left\langle a^2\alpha_{200}\right\rangle\right)\right]. \tag{18}$$

Выражения для коэффициентов β_{010}, β_{001}, β_{101}, β_{020} и β_{002} получаются из формул (14), (15) и (18) в результате циклической замены. Таким образом, формальное рассмотрение примера завершено.

Если однако, в соответствии со сноской 2 считать (10) параметрическим представлением семейства поверхностных распределений, адекватных (входящему в это семейство при $\lambda = 0$) поверхностному заряду (9), то небезынтересно узнать, во что превращается (10) в результате предельного перехода при $\lambda \to -c^2$ ($\bar{c} \to 0$), т. е. при вырождении эллипсоида (2) в лежащий в плоскости (x, y) эллиптический диск. Так как при $\lambda \to -c^2$ имеет место $\bar{p} \to \bar{c}/D(x, y)$, а на поверхности эллипсоида $z/\bar{c} \to \pm D(x, y)$, где $D(x, y) = \sqrt{1 - (x/a_d)^2 - (y/b_d)^2}$ и $a_d = (a^2 - c^2)^{1/2}$, $b_d = (b^2 - c^2)^{1/2}$ — полуоси эллиптического диска, то оказывается, что в пределе распределение (10) "расщепляется" на две системы зарядов. Их образуют простой слой с плотностью

$$\sigma_d = \lim_{\lambda\to -c^2} 2\bar{\sigma}_2 = \frac{2abc}{a_db_dD}\Bigg\{\alpha_{000} + a_d^{-2}b_d^{-2}\Big[\left(\left\langle a^2b^2\right\rangle - 3c^4\right)$$

$$\times\,\alpha_{002} + c^2\left\langle a^2\alpha_{200}\right\rangle\Big] + \alpha_{100}\frac{ax}{a_d^2} + \alpha_{010}\frac{by}{b_d^2} + \alpha_{110}\frac{abxy}{a_d^2b_d^2}$$

$$+\,a_d^{-2}b_d^{-2}\Big[\left(\left\langle a^2b^2\right\rangle - 3a^2c^2\right)\alpha_{200} + \left(3c^4 - \left\langle a^2b^2\right\rangle\right)\alpha_{002}\Big]$$

$$\times\,\frac{x^2}{a_d^2} + a_d^{-2}b_d^{-2}\Big[\left(\left\langle a^2b^2\right\rangle - 3b^2c^2\right)\alpha_{020}$$

$$+\left(3c^4 - \left\langle a^2b^2\right\rangle\right)\alpha_{002}\Big]\frac{y^2}{b_d^2}\Bigg\} \tag{19}$$

и поверхностное распределение диполей (двойной слой) с плотностью

$$\tau_d = \lim_{\lambda\to -c^2} 2z\bar{\sigma}_2 = \frac{2abc^2}{a_db_d}D\left(\alpha_{001} + \alpha_{101}\frac{ax}{a_d^2} + \alpha_{011}\frac{by}{b_d^2}\right). \tag{20}$$

Удостовериться в адекватности распределения (9) и двойной системы зарядов (19), (20) можно, сопоставляя либо их вычисленные потенциалы [7,8], либо соответствующие компоненты их мультипольных моментов. В последнем случае расчет интегралов по поверхности эллиптического диска облегчает формула

$$\int\left(\frac{x}{a_d}\right)^{2l}\left(\frac{y}{b_d}\right)^{2m} D^{2n-1}dS = \frac{2\pi\Pi_{lmn}a_db_d}{(2l+2m+2n+1)!!},$$

получающаяся из (12) при $c \to 0$.

При совпадении поверхностей (1) и (2), т. е. при $\lambda = 0$, распределение (10), как уже отмечалось, переходит в (9) в силу единственности решения задачи об адектватном поверхностном заряде.

В другом частном случае, когда эллипсоиды (1) и (2) вырождаются в концентрические сферы, так что

$$a = b = c = p = r_0, \quad \bar{a} = \bar{b} = \bar{c} = \bar{p} = R_0, \tag{21}$$

отношение любого коэффициента распределения (10) к соответствующему коэффициенту распределения (9) дается общей формулой

$$\beta_{ijk}/\alpha_{ijk} = (r_0/R_0)^{i+j+k+3}.$$

Поверхностные заряды, адекватные объемным

Рассмотрим теперь пример, в котором заряд эллипсоида (1) задан объемной плотностью, являющейся полиномом первой степени

$$\rho_1 = \rho_0 + \langle \rho_a x/a \rangle \,. \tag{22}$$

В соответствии с утверждением б первого раздела плотность $\bar{\sigma}'$ заряда на поверхности (2), адекватная распределению (22), должна иметь вид

$$\bar{\sigma}_3' = \Big[\gamma_{000} + \langle \gamma_{200} x^2/\bar{a}^2 \rangle + \langle (\gamma_{100} + \gamma_{300} x^2/\bar{a}^2 + \gamma_{120} y^2/\bar{b}^2 + \gamma_{102} z^2/\bar{c}^2) x/\bar{a} \rangle \Big] \bar{p}, \tag{23}$$

где отсутствие произведений координат xy, yz, xz и xyz очевидно из соображений симметрии, а коэффициенты γ_{ijk}, согласно (8), связаны равенствами

$$\langle \gamma_{200} \rangle = 0, \quad 3\gamma_{300} + \gamma_{120} + \gamma_{102} = 0 \tag{24), (25}$$

и теми, что получаются из (25) при циклической перестановке.

Используя определения (4) и (5) и привлекая для вычисления электрических моментов эллипсоида наряду с (12) "объемную" формулу Лагранжа

$$\int \left(\frac{x}{a}\right)^{2l} \left(\frac{y}{b}\right)^{2m} \left(\frac{z}{c}\right)^{2n} dV = \frac{4\pi \Pi_{lmn} abc}{(2l+2m+2n+3)!!}, \tag{26}$$

приравняем полные заряды $\bar{Q} = Q^{(\rho)}$ и любые две диагональные компоненты квадрупольных тензоров (например, $\bar{Q}_{xx} = Q_{xx}^{(\rho)}$ и $\bar{Q}_{yy} = Q_{yy}^{(\rho)}$) распределений (23) и (22). Это приводит к системе уравнений, включая (24), для коэффициентов γ_{000}, γ_{200}, γ_{020} и γ_{002}, решение которой дается формулами

$$\gamma_{000} = \frac{1}{3}\rho_0 g, \quad \gamma_{200} = \gamma_{000}(3\bar{a}^{-2} \langle \bar{a}^{-2} \rangle^{-1} - 1) \tag{27}$$

и теми, что получаются из (27) при циклической перестановке.

Приравнивание дипольных $\bar{Q}_x = Q_x^{(\rho)}$ и любых двух октупольных компонент с нечетным числом индексов x (например, $\bar{Q}_{xyy} = Q_{xyy}^{(\rho)}$ и $\bar{Q}_{xzz} = Q_{xzz}^{(\rho)}$) дает вместе с (25) систему уравнений для определения γ_{100}, γ_{300}, γ_{120}, γ_{102}. Решение последней имеет вид

$$\gamma_{100} = \frac{1}{5}\rho_a g a/\bar{a}, \qquad \gamma_{300} = \gamma_{100}(5\bar{a}^{-2}\varkappa_a^{-1} - 1),$$

$$\gamma_{120} = \gamma_{100}(5\bar{b}^{-2}\varkappa_a^{-1} - 1), \quad \gamma_{102} = \gamma_{100}(5\bar{c}^{-2}\varkappa_a^{-1}), \tag{28}$$

где $\varkappa_a = \langle \bar{a}^{-2} + 2\bar{a}^{-2} \rangle$.

Выражения для остальных коэффициентов, содержащихся в (23), получаются из (28) путем циклической замены.

Рассматривая (23) как параметрическое семейство поверхностных зарядов, адекватных распределению (22), выполним, как в предыдущем разделе, предельный переход к эллиптическому диску. Результат показывает, что плотности (22) адекватна на софокусном диске двойная система зарядов: простой слой с плотностью

$$\sigma_d' = \lim_{\lambda \to -c^2} 2\bar{\sigma}_3' = \frac{2abc}{a_d b_d} D \left(\rho_0 + \rho_a \frac{ax}{a_d^2} + \rho_b \frac{by}{b_d^2} \right) \tag{29}$$

и двойной слой с плотностью

$$\tau_d' = \lim_{\lambda \to -c^2} 2z\bar{\sigma}_3' = \frac{2}{3}\frac{abc^2}{a_d b_d} \rho_c D^3. \tag{30}$$

Сравнение этих формул с их найденными выше аналогами обнаруживает примечательное различие. Так, если распределение (29) содержит множитель D в первой степени, т.е. обращается в нуль на краю диска, то в (19) величина D входит в отрицательной степени, обусловливая характерную статическую особенность на краю диска, именуемую в теории дифракции как "условие на ребре", По-разному ведут себя на краю диска, характеризуясь "нулями" разного порядка, и дипольные плотности (20) и (30). Указанные различия являются проявлением своеобразной асимметрии, присутствующей и в утверждениях а и б. Она заключается в том, что, в то время как для любого объемного заряда всегда существует адекватное поверхностное распределение, обратное в случае эллипсоида, вообще говоря, не имеет места. Зато при вырождении эллипсоида в шар любому поверхностному заряду соответствует и уже не одно адекватное объемное распределение, а их бесконечное множество. Например, однородно заряженной сфере адекватно любое сферически симметричное распределение того же полного заряда в объеме концентрического с ней шара произвольного радиуса.

Отметим частные случаи полученных в этом разделе результатов. При $\bar{a} = a$, $\bar{b} = b$, $\bar{c} = c$, т.е. при слиянии поверхностей (1) и (2) распределение (23) принимает вид, согласующийся с соответствующими формулами работы [3], где рассматривался именно этот случай.

Если поверхности (1) и (2) превращаются в концентрические сферы (21), то из всех коэффициентов γ_{ijk} отличными от нуля остаются лишь γ_{000}, γ_{100}, γ_{010}, γ_{001}. В результате кубический полином (23) обращается в распределение

$$\bar{\sigma}' = \left(\frac{r_0}{R_0}\right)^3 \left[\frac{1}{3}\rho_0 R_0 + \frac{r_0}{5R_0}(\rho_a x + \rho_b y + \rho_c z)\right],$$

являющееся подобно (22) полиномом первой стемени.

Эллиптический цилиндр

Располагая аналитическими решениями задачи об адекватных зарядах эллипсоида, нетрудно распространить их на предельный случай — аналогичную двумерную задачу об эллиптическом цилиндре. Для этого будем считать теперь c наибольшей полуосью эллипсоида, положим в (9) и (22) все коэффициенты при положительных степенях z равными нулю (в результате чего в соотношениях типа (8) исчезает третье слагаемое, упрощается, сводясь лишь к двум индексам, и маркировка самих коэффициентов α) и выполним предельный переход при $c \to \infty$ в формулах (1), (2), (10) и (23).

Предельный перход превращает поверхности (1) и (2) в границы софокусных эллиптических цилиндров

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{\bar{a}^2} + \frac{y^2}{\bar{b}^2} = 1, \tag{31), (32}$$

где $\bar{a}^2 - a^2 = \bar{b}^2 - b^2 = \lambda$.

Заданному на (31) поверхностному распределению

$$\sigma_2 = \left(\alpha_{00} + \alpha_{10}\frac{x}{a} + \alpha_{01}\frac{y}{b} + \alpha_{11}\frac{xy}{ab} + \alpha_{20}\frac{x^2}{a^2} + \alpha_{02}\frac{y^2}{b^2}\right) p,$$

в котором $\alpha_{20} + \alpha_{02} = 0$, оказывается адекватным распределенный по поверхности (32) заряд плотности

$$\bar{\sigma}_2 = \frac{ab}{\bar{a}\bar{b}}\left[\alpha_{00} + \alpha_{10}\frac{ax}{\bar{a}^2} + \alpha_{01}\frac{by}{\bar{b}^2} + \alpha_{11}\frac{abxy}{\bar{a}^2\bar{b}^2} + \frac{a^2 + b^2}{\bar{a}^2 + \bar{b}^2}\left(\alpha_{20}\frac{x^2}{\bar{a}^2} + \alpha_{02}\frac{y^2}{\bar{b}^2}\right)\right]\bar{p}, \tag{33}$$

где $p = (x^2/a^4 + y^2/b^4)^{-1/2}$, $\bar{p} = (x^2/\bar{a}^4 + y^2/\bar{b}^4)^{-1/2}$.

Что касается объемного заряда плотности

$$\rho_1 = \rho_0 + \rho_a\frac{x}{a} + \rho_b\frac{y}{b},$$

заданного в цилиндре (31), то ему на поверхности (32) адекватно распределение

$$\bar{\sigma}'_3 = \left(\gamma_{00} + \gamma_{20}\frac{x^2}{\bar{a}^2} + \gamma_{02}\frac{y^2}{\bar{b}^2} + \gamma_{10}\frac{x}{\bar{a}} + \gamma_{30}\frac{x^3}{\bar{a}^3} + \gamma_{12}\frac{xy^2}{\bar{a}\bar{b}^2} + \gamma_{01}\frac{y}{\bar{b}} + \gamma_{21}\frac{x^2y}{\bar{a}^2\bar{b}} + \gamma_{03}\frac{y^3}{\bar{b}^3}\right)\bar{p}. \tag{34}$$

Здесь

$$\gamma_{00} = \frac{\rho_0 ab}{2\bar{a}\bar{b}}, \qquad \gamma_{20} = -\gamma_{02} = \gamma_{00}\frac{b^2 - a^2}{\bar{a}^2 + \bar{b}^2},$$

$$\gamma_{10} = \frac{\rho_a a^2 b}{4\bar{a}^2\bar{b}}, \quad 3\gamma_{30} = -\gamma_{12} = 3\gamma_{10}\frac{b^2 - a^2}{\bar{a}^2 + 3\bar{b}^2}, \tag{35}$$

а выражения для γ_{01}, γ_{03}, γ_{21} получаются из формул (35) путем взаимной замены $a \leftrightarrow b$ и одновременной перестановки индексов у коэффициентов γ.

При $\lambda \to -b^2$ ($\bar{b} \to 0$), когда эллиптический цилиндр (32) вырождается в софокусную с ним бесконечную прямолинейную полосу шириной $2a_s = 2\sqrt{a^2 - b^2}$, лежащую в плоскости (x, z), каждое из двух самостоятельных параметрических семейств адекватных распределений (33) и (34) расщепляется в пределе на две системы зарядов. Так, для (33) адекватным пределом оказывается совокупность простого слоя с плотностью

$$\bar{\sigma}_s = \lim_{\lambda \to -b^2} 2\bar{\sigma}_2 = \frac{2ab}{\sqrt{a_s^2 - x^2}}\left[\alpha_{00} + \alpha_{10}\frac{ax}{a_s^2} - \alpha_{20}\frac{a^2 + b^2}{a_s^2}\left(1 - 2\frac{x^2}{a_s^2}\right)\right]$$

и двойного слоя с плотностью

$$\tau_s = \lim_{\lambda \to -b^2} 2y\bar{\sigma}_2 = \frac{2ab^2}{a_s^2}\sqrt{a_s^2 - x^2}\left(\alpha_{01} + \alpha_{11}\frac{ax}{a_s^2}\right),$$

а распределение (34) переходит в адекватную ему комбинацию простого слоя с плотностью

$$\bar{\sigma}'_s = \lim_{\lambda \to -b^2} 2\bar{\sigma}'_3 = \frac{2ab}{a_s^2}\sqrt{a_s^2 - x^2}\left(\rho_0 + \rho_a\frac{ax}{a_s^2}\right)$$

и двойного слоя с плотностью

$$\bar{\tau}'_s = \lim_{\lambda \to -b^2} 2y\bar{\sigma}'_3 = \frac{2ab^2}{3a_s^4}\rho_b(a_s^2 - x^2)^{3/2}.$$

В правильности полученных в этом разделе выражений для адекватных распределений заряда можно убедиться, сравнивая либо соответствующие потенциалы эллиптических цилиндров [7], либо соответствующие компоненты погонных двумерных электрических 2^n-польных моментов

$$q_{i_1\ldots i_n} = \int \rho(x, y)d^{(2)}_{i_1\ldots i_n}dS, \quad q_{i_1\ldots i_n} = \oint \sigma(x, y)d^{(2)}_{i_1\ldots i_n}dl, \tag{36}$$

где вместо (6) теперь следует использовать выражения

$$d^{(2)}_x = x, \qquad d^{(2)}_{xx} = x^2 - y^2,$$

$$d^{(2)}_{xy} = 2xy, \quad d^{(2)}_{xxx} = -d^{(2)}_{xyy} = x^3 - 3xy^2.$$

При вычислении интегралов (36) по поверхности или контуру поперечного сечения эллиптического цилиндра полезны двумерные формулы Лагранжа

$$\int \left(\frac{x}{a}\right)^{2l}\left(\frac{y}{b}\right)^{2m} dS = \frac{2\pi\Pi_{lm0}ab}{(2l + 2m + 2)!!},$$

$$\oint \left(\frac{x}{a}\right)^{2i}\left(\frac{y}{b}\right)^{2j} pdl = \frac{2\pi\Pi_{ij0}ab}{(2i + 2j)!!}.$$

Заключение

Прямое (не связанное с вычислением полей) решение рассмотренных здесь задач оказалось возможным благодаря использованию свойств универсальности и инвариантности, присущих мультипольному представлению внешнего потенциала эллипсоида [4,5]. Отметим, что давно и хорошо известная теорема Маклорена (см., например, [7,9]), содержанием которой является констатация указанных свойств применительно к однородно заряженному эллипсоиду, легко позволяет для этого случая найти адекватные распределения. Примечательно, что возможность обобщения теоремы Маклорена выявилась как побочный результат при рассмотрении конкретной электростатической задачи [10].

Список литературы

[1] *Френкель Я.И.* Электродинамика. М.; Л.: ОНТИ, 1935. Т. 2. 556 с.
[2] *Френкель Я.И.* Электродинамика (Общая теория электричества). Собр. избр. тр. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1956. Т. 1. 370 с.
[3] *Муратов Р.З.* // Астрон. журн. 1992. Т. 69. № 3. С. 604–616.
[4] *Ефимов С.П., Муратов Р.З.* // Астрон. журн. 1990. Т. 67. № 2. С. 302–313.
[5] *Ефимов С.П., Муратов Р.З.* // Астрон. журн. 1990. Т. 67. № 2. С. 314–325.
[6] *Ефимов С.П.* // ТМФ. 1979. Т. 39. № 2. С. 219–233.
[7] *Муратов Р.З.* Потенциалы эллипсоида. М.: Атомиздат, 1976. 144 с.
[8] *Левин М.Л., Муратов Р.З.* // ЖТФ. 1980. Т. 50. Вып. 9. С. 1809–1814.
[9] *Чандрасекхар С.* Эллипсоидальные фигуры равновесия. М.: Мир, 1973. 288 с.
[10] *Муратов Р.З.* // ЖТФ. 1987. Т. 57. Вып. 11. С. 2097–2104.