Журнал технической физики, 1997, том 67, № 4

Краткие сообщения

01

Электростатическая задача для тора и диска

© Г.Ч. Шушкевич

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы,
230023 Гродно, Белоруссия

(Поступило в Редакцию 22 января 1996 г.)

Рассмотрим осесимметричную задачу о нахождении потенциала электростатического поля системы проводников, состоящей из тора S с малым радиусом r_0, большим радиусом R_0 и круглого диска Γ радиуса a (см. рисунок). Для решения задачи с точкой 0_1 свяжем тороидальные координаты $\{\alpha, \beta, \varphi\}$ [1]

$$x_1 = \frac{c\,\mathrm{sh}\,\alpha \cos\varphi}{\mathrm{ch}\,\alpha - \cos\beta},\ y_1 = \frac{c\,\mathrm{sh}\,\alpha \sin\varphi}{\mathrm{ch}\,\alpha - \cos\beta},\ z_1 = \frac{c \sin\beta}{\mathrm{ch}\,\alpha - \cos\beta}$$

$(0 \leqslant \alpha < \infty,\ -\pi \leqslant \beta \leqslant \pi,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ c = \sqrt{R_0^2 - r_0^2})$, с точкой 0 — цилиндрические координаты $\{\rho, z, \varphi\}$

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z = z$$

$(0 \leqslant \rho < \infty,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ -\infty < z < \infty)$.

Рассматриваемые проводники будут описываться следующим образом:

$$S = \left\{\alpha = \alpha_0 = \ln\left(\frac{R_0}{r_0} + \sqrt{\left(\frac{R_0}{r_0}\right)^2 - 1}\right),\right.$$

$$\left. -\pi \leqslant \beta \leqslant \pi,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\right\},$$

$\Gamma = \{0 \leqslant \rho \leqslant a,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ z = 0\}$.

Расстояние между точками 0 и 0_1 обозначим через h. Требуется найти потенциал U, который удовлетворяет 1) уравнению Лапласа $\Delta U = 0$ во всем пространстве, за исключением проводников S и Γ; 2) граничным условиям

$$U\Big|_S = V_T, \quad U\Big|_\Gamma = V_g \qquad (1),\ (2)$$

и условиям непрерывности

$$U\Big|_{z=0-0} = U\Big|_{z=0+0}, \quad \frac{\partial U}{\partial z}\Big|_{\substack{z=0-0\\ \rho>a}} = \frac{\partial U}{\partial z}\Big|_{\substack{z=0+0\\ \rho>a}}; \ (3),\ (4)$$

3) условию на бесконечности $U(M) \to 0$ при $M \to \infty$, где M — произвольная точка пространства.

Потенциал U представим в виде суперпозиции тороидальных и цилиндрических гармонических функций [1,2]

$$U = \begin{cases} U_1 = \int\limits_0^\infty B(\lambda)\exp(\lambda z) J_0(\lambda\rho)\,d\lambda, & z < 0, \\ U_2 + U_3, & z > 0, \end{cases}$$

где

$$U_2 = \int\limits_0^\infty A(\lambda)\exp(-\lambda z) J_0(\lambda\rho)\,d\lambda,$$

$$U_3 = \sqrt{2(\mathrm{ch}\,\alpha - \cos\beta)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \frac{P_{h-\frac{1}{2}}(\mathrm{ch}\,\alpha)}{P_{h-\frac{1}{2}}(\mathrm{ch}\,\alpha_0)} \exp(in\beta),$$

$J_0(\lambda\rho)$ — функция Бесселя первого рода, $P_{h-\frac{1}{2}}(\mathrm{ch}\,\alpha)$ — функция Лежандра первого рода или функция тора [1,3].

Для выполнения граничного условия (1) на поверхности тора представим U_2 через тороидальные гармонические функции, используя разложение [4]

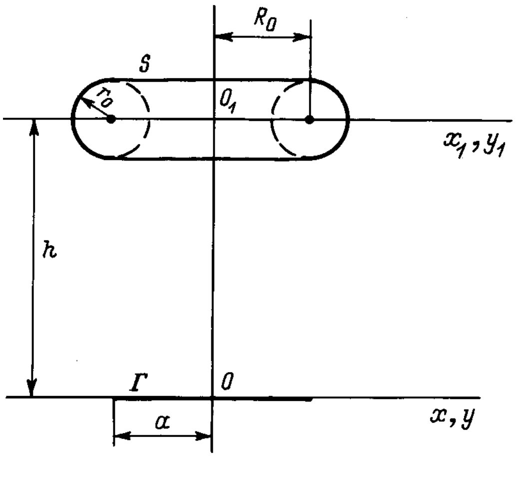
$$J_0(\lambda\rho)\exp(-\lambda z) = \frac{\sqrt{2(\mathrm{ch}\,\alpha - \cos\beta)}}{2\pi}$$

$$\times \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(\lambda c) Q_{h-\frac{1}{2}}(\mathrm{ch}\,\alpha)\exp(in\beta),$$

где

$$a_h(\lambda c) = 2\exp(-i\lambda c)\,{}_1F_1(h + \frac{1}{2},\ 1;\ 2i\lambda c),$$

$Q_{h-\frac{1}{2}}(\mathrm{ch}\,\alpha)$ — функция Лежандра второго рода, ${}_1F_1(a,\ b;\ z)$ — вырожденная гипергеометрическая функция [1,3].



Тор	Значения параметра p								
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
S_0	1.139	1.393	1.633	1.896	2.205	2.598	3.143	4.016	5.903
S_2	1.189	1.601	2.139	2.909	4.086	6.052	9.811	18.876	55.677

Тогда

$$U_2(\alpha,\beta)=\sqrt{2(\operatorname{ch}\alpha-\cos\beta)}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Big[\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}A(\lambda)$$

$$\times\exp(-\lambda h)a_n(\lambda c)d\lambda\Big]Q_{h-\frac12}(\operatorname{ch}\alpha)\exp(in\beta).$$

Выполняя граничное условие (1) и используя разложение [1]

$$\frac{1}{\sqrt{2(\operatorname{ch}\alpha-\cos\beta)}}=\frac{1}{\pi}\sum_{h=-\infty}^{\infty}Q_{h-\frac12}(\operatorname{ch}\alpha)\exp(in\beta),$$

получим

$$x_h+\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}A(\lambda)\exp(-\lambda h)a_n(\lambda c)d\lambda Q_{h-\frac12}(\operatorname{ch}\alpha_0)$$

$$=\frac{V_T}{\pi}Q_{h-\frac12}(\operatorname{ch}\alpha_0), \tag{5}$$

$h=0,\pm1,\pm2,\dots$.

Для выполнения условий (2)–(4) представим U_3 через цилиндрически гармонические функции. Применив интегральное представление

$$\sqrt{2(\operatorname{ch}\alpha-\cos\beta)}\,P_{h-\frac12}(\operatorname{ch}\alpha)$$

$$=c\int_0^{\infty}\overline{a_n(\lambda c)}\exp(\lambda z_1)J_0(\lambda\rho_1)d\lambda,\ z_1<0,$$

получим

$$U_3(\rho,z)=\int_0^{\infty}N(\lambda)\exp(\lambda z)J_0(\lambda\rho)d\lambda,$$

где

$$N(\lambda)=\exp(-\lambda h)\sum_{h=-\infty}^{\infty}\frac{cx_n\overline{a_n(\lambda c)}}{P_{h-\frac12}(\operatorname{ch}\alpha_0)}. \tag{6}$$

Выполняя условия (2)–(4), получим парные интегральные уравнения вида

$$\int_0^{\infty}A(\lambda)J_0(\lambda\rho)d\lambda=V_g-\int_0^{\infty}N(\lambda)J_0(\lambda\rho)d\lambda,\quad \rho<a,$$

$$\int_0^{\infty}\lambda A(\lambda)J_0(\lambda\rho)d\lambda=0,\quad \rho>a.$$

Если $A(\lambda)$ заменить новой неизвестной функцией $\psi(s)$, которая является непрерывно дифференцируемой на отрезке $[0,a]$, по формуле

$$A(\lambda)=\int_0^{a}\psi(x)\cos\lambda x dx, \tag{7}$$

то парные интегральные уравнения преобразуются к виду [2]

$$\psi(x)=\frac{2}{\pi}V_g-\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}N(\lambda)\cos\lambda x d\lambda,\quad 0\leqslant x\leqslant a. \tag{8}$$

Исключая из (8) $N(\lambda)$ с помощью (6) и учитывая (5), (7), получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода относительно $\psi(x)$

$$\psi(x)+\frac{c}{\pi^2}\int_0^{a}K(x,t)\psi(t)dt=F(x),\quad 0\leqslant x\leqslant a, \tag{9}$$

где

$$K(x,t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{Q_{h-\frac12}(\operatorname{ch}\alpha_0)}{P_{h-\frac12}(\operatorname{ch}\alpha_0)}K_n(t)\overline{K_n(x)},$$

$$F(x)=\frac{2}{\pi}V_g-\frac{2c}{\pi^2}V_T\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{Q_{h-\frac12}(\operatorname{ch}\alpha_0)}{P_{h-\frac12}(\operatorname{ch}\alpha_0)}\overline{K_n(x)},$$

$$K_n(t)=\int_0^{\infty}\exp(-\lambda h)a_n(\lambda c)\cos\lambda t d\lambda,$$

$$\overline{K_n(x)}=\int_0^{\infty}\exp(-\lambda h)a_n(\lambda c)\cos\lambda t d\lambda.$$

Сделаем следующие замены: $x=\tau a$, $t=\sigma a$, $V(\tau)=(2/\pi)\psi(x)$,

$$V(\sigma)=\frac{2}{\pi}\psi(t),\quad \alpha=\frac{a}{R_0},\quad \delta=\sqrt{1-\left(\frac{r_0}{R_0}\right)^2},\quad \mu=\frac{R_0}{h}.$$

Тогда интегральное уравнение (9) примет вид

$$V(\tau)+\frac{\alpha\delta\mu^2}{\pi^2}\int_0^{1}K(\tau,\sigma)V(\tau)d\tau=V_g-\frac{\mu\delta}{\pi}V_T$$

$$\times\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{Q_{h-\frac12}(\operatorname{ch}\alpha_0)}{P_{h-\frac12}(\operatorname{ch}\alpha_0)}\overline{I_n(\tau)},\quad 0\leqslant\tau\leqslant 1, \tag{10}$$

$$K(\tau,\sigma)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{Q_{h-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\alpha_0)}{P_{h-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\alpha_0)}\overline{I_n(\tau)}I_n(\sigma),$$

$$I_n(\sigma)=\int_0^{\infty}e^{-p}a_n(\mu\delta p)\cos(\alpha\mu\sigma p)dp.$$

Заряд Q_g диска Г через функцию $V(\tau)$ вычисляется по формуле [2]

$$Q_g=8\varepsilon a\int_0^1 V(\tau)d\tau,$$

а заряд Q_T тора S — по формуле

$$Q_T=8\varepsilon c\left(V_TS_0-\frac{\alpha\mu}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}p_n\frac{Q_{h-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\alpha_0)}{P_{h-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\alpha_0)}\right),$$

где

$$p_0=\int_0^1 I_0(\tau)V(\tau)d\tau,$$

$$p_n=\int_0^1\left(I_n(\tau)+\overline{I_n(\tau)}\right)V(\tau)d\tau,\quad n\geqslant 1,$$

$$S_0=\sum_{h=0}^{\infty}\delta_h\frac{Q_{h-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\alpha_0)}{P_{h-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\alpha_0)},\quad \delta_n=\begin{cases}1, & n=0,\\ 2, & n\geqslant 1,\end{cases}$$

ε — диэлектрическая проницаемость среды.

В общем случае нахождение функции $V(\tau)$ производится путем решения интегрального уравнения (10) численными методами. Для упрощения вычислений положим $\mu^n\approx 0$ при $h\geqslant 4$. Разложим функции, входящие в интегральное уравенение (10), в ряды по малому параметру μ. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях μ, получим

$$V(\tau)=V_g-\frac{2\delta}{\pi}V_TS_0\mu-\frac{4\alpha\delta}{\pi^2}V_gS_0\mu^2$$
$$+\frac{\delta}{\pi}V_T\left(S_2\delta^2+\frac{8\alpha\delta}{\pi^2}S_0^2+2(\alpha\tau)^2S_0\right)\mu^3+\dots,$$

где

$$S_2=\sum_{h=0}^{\infty}\delta_n(4n^2+1)\frac{Q_{h-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\alpha_0)}{P_{h-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\alpha_0)}.$$

Заряды диска и тора вычисляются соответственно по формулам

$$Q_g=8\varepsilon a\left\{V_g-\frac{2\delta}{\pi}V_TS_0\mu-\frac{4\alpha\delta}{\pi^2}V_gS_0\mu^2\right.$$
$$\left.+\frac{\delta}{\pi}\left(S_2\delta^2+\frac{8\alpha\delta}{\pi^2}S_0^2+\frac{2}{3}\alpha^2S_0\right)V_T\mu^3+\dots\right\},$$

$$Q_T=8\varepsilon R_0\delta\left\{S_0V_T-\frac{2\alpha}{\pi}V_gS_0\mu+\frac{4\alpha\delta}{\pi^2}V_TS_0^2\mu^2\right.$$
$$\left.+\frac{\alpha}{\pi}\left(S_2\delta^2+\frac{8\alpha\delta}{\pi^2}S_0^2+\frac{2}{3}\alpha^2S_0\right)V_g\mu^3+\dots\right\}.$$

Зная заряды проводников, можно определить емкостные коэффициенты C_{ik} по формулам

$$C_{11}=Q_g(V_g=V_T=1),\quad C_{22}=Q_T(V_g=V_T=1),$$
$$C_{12}=Q_g(V_g=0,\,V_T=-1)=C_{21}$$
$$=Q_T(V_g=-1,\,V_T=0).$$

В таблице приведены значения S_0, S_2 для некоторых значений $p=r_0/R_0$ ($\operatorname{ch}\alpha_0=1/p$). Функции Лежандра вычислялись по формулам [1,3]

$$P_{h-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}(\operatorname{ch}\alpha_0)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\operatorname{ch}\alpha_0+\operatorname{sh}\alpha_0\cos t)^{h-\frac{1}{2}}dt,$$

$$Q_{h-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\alpha_0)=\int_0^{\pi}\frac{\cos nt dt}{\sqrt{2(\operatorname{ch}\alpha_0-\cos t)}},$$

используя квадратурную формулу Симпсона ($n=18$). Бесконечные суммы вычислялись с точностью 10^{-4}.

Список литературы

[1] *Лебедев Н.Н.* Специальные функции и их приложения. М.: ГИИТЛ, 1953. 380 с.

[2] *Шушкевич Г.Ч.* // ЖТФ. 1984. Т. 54. Вып. 9. С. 1801–1803.

[3] Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. М.: Наука, 1979. 832 с.

[4] *Ерофеенко В.Т.* // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19. № 8. С. 1416–1427.