Журнал технической физики, 1997, том 67, № 4

01;07

Многоволновая дифракция рентгеновского параметрического излучения

© *Н.В. Шипов*

Московский государственный университет леса,
Москва, Россия

(Поступило в Редакцию 29 января 1996 г.)

Параметрическое рентгеновское излучение, обусловленное периодической структурой кристалла, ввиду высокой симметрии кристалла часто оказывается в условиях многоволновой дифракции [1,2] (четырехлучевая и восьмилучевая дифракция в эксперименте [2]). В отличие от симметричных спектральных и угловых распределений, рассчитанных в двухволновом приближении [3,4], в режиме многоволновой дифракции характерно появление узких и высоких максимумов, а сами распределения (эксперимент [2]) оказываются резко асимметричными.

Интенсивность излучения может быть найдена интегрированием решений граничной задачи для однородных уравнений Максвелла на больших расстояниях от кристалла [3,5]. Однако решение граничной рентгенооптической задачи в условиях многоволновой дифракции возможно только для отдельных геометрий и выделенных направлений [6], поэтому возможны только численные расчеты [5]. С другой стороны, интенсивность излучения с единицы длины траектории частицы (радиационные потери) находится интегрированием неоднородных уравнений без решения граничной задачи, что было кратко изложено на примере двухволнового приближения в [4]. Оба подхода дают сходные результаты, а при переходе к случаю тонкого кристалла [3], когда одна из амплитуд двухволнового приближения дает малый вклад в интенсивность, совпадают полностью [4].

В настоящей работе анализируются радиационные потери на параметрическое рентгеновское излучение в условиях трехволновой дифракции, развиваются и обосновываются методы интегрирования для последующих применений в режиме многоволновой дифракции, в том числе и для корректных численных расчетов. В компланарном случае, когда плоскости реакций k_0, k_1 и k_0, , k_2 оказываются в плоскости волновых векторов обратной решетки τ_1, τ_2, τ_3, образующих правильный треугольник (рис. 1), система неоднородных уравнений для фурье-амплитуд E_0, E_1, E_2 распадается на две отдельные системы для каждого состояния поляризации $s = \pi$ или $s = \sigma$ (орт σ перпендикулярен плоскости k_0, k_1)

$$\begin{aligned}&(1 + g_0 - k^2c^2/\omega^2)E_{0s} + c_sg(\bar{\tau}_1)E_{1s} + c_sg(\bar{\tau}_3)E_{2s}\\&\quad = 8\pi^2 iev\theta p_s\delta(\omega - k_0v)/\omega,\\&c_sg(\bar{\tau}_1)E_{0s} + \left(1 + g_0 - k_1^2c^2/\omega^2\right)E_{1s} + c_sg(\bar{\tau}_2)E_{2s} = 0,\\&c_sg(\bar{\tau}_3)E_{0s} + c_sg(\bar{\tau}_2)E_{1s} + \left(1+g_0-k_2^2c^2/\omega^2\right)E_{2s}=0,\end{aligned} \quad (1)$$

где $p_\sigma = \sin\phi$, $p_\pi = \cos\phi$, c_σ, $c_\pi = \cos 2\theta_B$, $\theta_B = 60°$; θ и ϕ — полярный и азимутальный углы вектора k_0 (рис. 1); e и v — заряд и скорость частицы; $g_0 = g_0' + ig_0''$, $g(\tau) = g'(\tau) + ig''(\tau)$ — пространственные фурье-амплитуды поляризуемости кристалла; $g'(\tau)$ и $g''(\tau)$ — действительная и мнимая составляющие $g(\tau)$.

Поглощение считается слабым $g'' \ll |g'|$, причем в одноатомном кристалле $g'(\tau) < 0$, $g''(\tau) = g_0''e^{-W}$, где e^{-W} — фактор Дебая–Уоллера. В центросимметричных кристаллах, например Ge и Si, поляризуемости $g(\tau_1)$, $g(\tau_2)$, $g(\tau_3)$ оказываются отличными от нуля и совпадающими при $h + k + l = 4n$, где $\tau = 2\pi(h, k, l)$ [6].

Из условия обращения в бесконечность (при малом поглощении) амплитуд E_0, E_1, E_2 находим угол $\theta = \theta_0(\phi)$ испускания излучения в зависимости от азимута ϕ, определяющий конус параметрического рентгеновского излучения (рис. 1),

$$\begin{aligned}3\theta^2\cos^2\phi = &\left[\theta^2 - \nu - c_s^2g^2\left(z_0 + \theta^2\right)^{-1}\right]^2\\&- c_s^2g^2\left[1 + c_sg\left(z_0 + \theta^2\right)^{-1}\right]^2,\end{aligned} \quad (2)$$

где $z_0 = \gamma^{-2} - g_0'$; $\nu = 3(\omega - \omega_B)/\omega_B + g_0' + \gamma^{-2}/2$; $\omega_B = c\tau/2\sin\theta_B$; $g = g'(\tau)$; γ — лоренц-фактор частицы, который предполагается не малой величиной $\gamma^{-2} \lesssim |g|$.

Если частота излучения не слишком близка к ω_B, когда частотная отстройка ν оказывается полядка $\sqrt{|g|} \sim 10^{-3}$, для угла θ_0 получаем

$$\theta_0 = |\nu|/\sqrt{3}|\cos\phi| \sim \sqrt{|g|}. \quad (3)$$

Таким образом, для указанных частот $\nu \sim \sqrt{|g|}$ излучение возможно как для верхней части конуса $|\phi| < \pi/2$, так и для нижней части $|\phi| > \pi/2$, где оно было невозможно при $\nu > 0$ в условиях двухлучевой дифракции [4]. Это обстоятельство приводит к удвоению радиационных потерь в условиях трехлучевой компланарной дифракции. Действительно, вычисляя силу торможения частицы собственным полем излучения

$$F = \left(e\mathbf{v}/v(2\pi)^4\right)\iiiint \mathbf{E}_0(k_0, \omega)d^3k_0 d\omega,$$

где

$$d^3k_0 \rightarrow \theta d\theta d\phi \frac{\omega_B^2}{vc^2}d\omega,$$

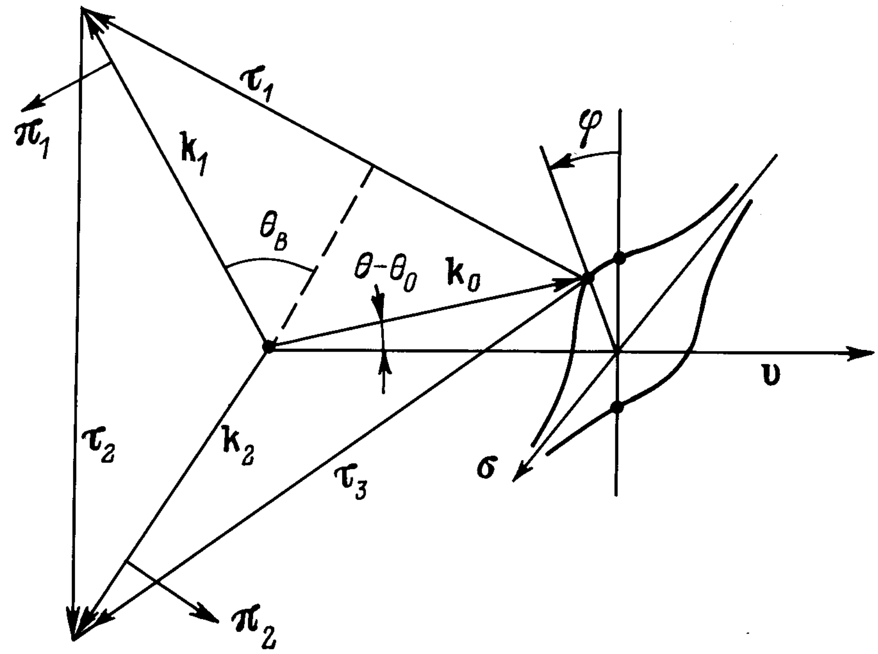

Рис. 1.

и учитывая при обходе полюса $\theta = \theta_0$, т.е. если переменная интегрирования θ имеет малую мнимую положительную составляющую, то полюс обходится сверху, что сводится к умножению на $-\pi i$, для дифференциальной по азимуту спектральной плотности радиационных потерь получаем

$$\frac{d^2W_s}{d\omega d\phi} = e^2g^2\omega_B p_s^2 c_s^2|\nu|^3/\pi c^2\left(\nu^2 + 3z_0\cos^2\phi\right)^2. \qquad (4)$$

С приближением к азимуту $\phi = \pi/2$ угол испускания θ_0 начинает значительно превышать характерную величину $\sqrt{z_0} \sim \sqrt{|g|}$, однако интенсивность излучения для рассматриваемых частот $\nu \sim \sqrt{|g|}$, как следует из (4), по-прежнему оказывается порядка $e^2g^2\omega/c^2\sqrt{z_0}$ (рис. 2). Узкая область азимутов $|\phi \pm \pi/2| \lesssim \sqrt{|g|}$ дает малый вклад в интеграл в пределах от $-\pi$ до π.

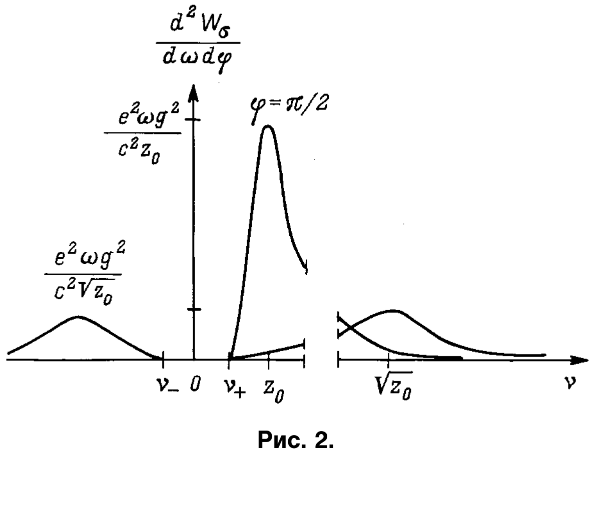

Рис. 2.

Поэтому интегрированием (4) приходим к следующим спектральным распределениям

$$dW_\sigma/d\omega = I\left(1 + \nu^2/3z_0\right)^{-1/2}, \quad I = e^2g^2\omega_B/c^2\sqrt{3z_0},$$

$$dW_\pi/d\omega = E\nu^2/12z_0\left(1 + \nu^2/3z_0\right)^{3/2}. \qquad (5)$$

Найденные зависимости, как и ожидалось, вдвое превышает спектральные распределения двухлучевой дифракции параметрического излучения, причем максимум $dW_\pi/d\omega$ достигается при $\nu = \nu_m = \sqrt{2r_0/3}$ (сплошные кривые на рис. 3). По аналогии можно ожидать, что открытие нового канала для излучения в условиях четырехлучевой дифракции приведет к утроению радиационных потерь, а в условиях шестилучевой дифракции радиационные потери будут в среднем в пять раз выше.

Анализ значительно усложняется вблизи брегговской частоты ω_B, когда $\nu \sim |g|$. Угол испускания излучения оказывается значительно меньше типичных значений $\sim \sqrt{|g|}$, если $|\phi \pm \pi/2| \gtrsim \sqrt{|g|}$,

$$\theta_0 = \Big[(\nu - c_s^2g^2/z_0)^2 - c_s^2g^2(1 + c_sg/z_0)^2\Big]^{1/2}\Big/\sqrt{3}|\cos\phi| \sim |g|. \qquad (6)$$

Важнейшим следствием (6) является существование интервалов частот, где $\theta_0^2 < 0$, запрещенных для излучения по всему конусу (за исключением симметричных точек с азимутами $\pm\frac{\pi}{2}$), $\nu_- \leqslant \nu \leqslant \nu_+$. Для σ-поляризации $\nu_- = g$, $\nu_+ = -g - 2g^2/z_0$; для π-поляризации $\nu_+ = -g/2$, $\nu_- = g/2 - g^2/2z_0$. В указанном интервале частот $d^2W/d\omega d\phi = 0$ (рис. 2), а вне его интенсивность излучения мала $(-e^2\omega g^2\nu^3/c^2z_0^2)$.

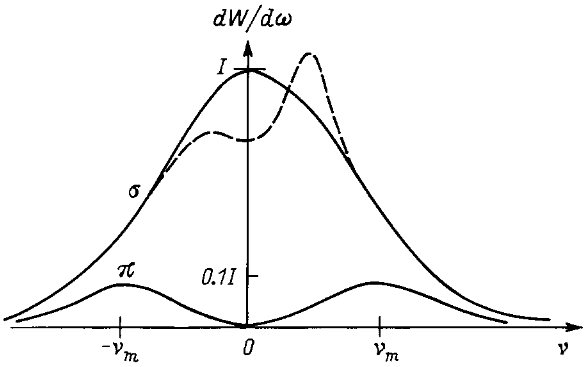

Рис. 3.

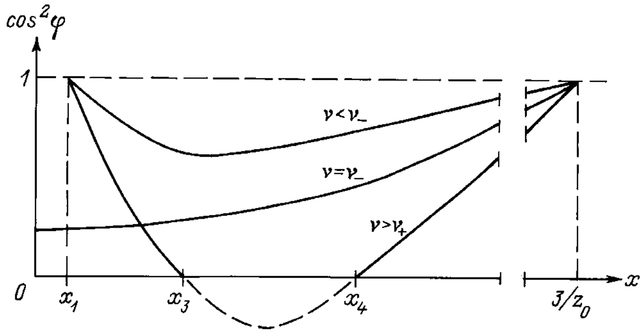

Рис. 4.

В узкой области азимутов вблизи $\pm\pi/2$ границы $\nu_\pm$ начинают зависеть от ϕ, что приводит к "размытию" запрещенной для излучения зоны. Рассмотрим более детально точку с азимутом $\phi = \pi/2$. Предварительно нормируем величины θ^2, ν, g на положительную константу z_0, а соответствующие нормированные величины обозначим через x, ν_1, g_1. Тогда для квадрата угла испускания x находим два значения

$$x_3 = \left[\nu_1 + g_1 - 1 + \sqrt{(\nu_1 + g_1 + 1)^2 + 8g_1^2}\right] \Big/ 2,$$

$$x_4 = \nu_1 - g_1. \tag{7}$$

Соответствующий угол θ_4 не дает вклада в потери, поскольку $E_0(\theta_4) = 0$. Отметим, что для рассматриваемых частот $\nu_1 \sim 1$, $x_3 \sim 1$, т.е. угол испускания излучения $\theta_3 \sim \sqrt{z_0}$. Дифференциальную по азимуту спектральную плотность находим по аналогичной (4) схеме

$$\frac{d^2W_\sigma}{d\omega d\phi} = e^2\omega_B g^2 x_3 \Big/ \pi z_0 c^2 (1 + x_3)$$

$$\times \sqrt{(\nu_1 + g_1 + 1)^2 + 8g_1^2}. \tag{8}$$

Максимум частотной зависимости (8) оказывается порядка $e^2\omega g^2/c^2 z_0$, а его узость $\sim z_0 \sim 10^{-5}$ (рис. 2). Таким образом, оказываясь на два–три порядка более узким, максимум спектрального распределения (8) становится вместе с тем на два–три порядка выше по сравнению с другими направлениями на конусе. Это приводит ко вкладу в спектральную плотность, сравнимую с (5), а также к смещению максимума спектрального распределения вправо от брегговской частоты (рис. 3), т.е. к значительной асимметрии спектрального распределения.

С целью более корректного учета вклада областей $|\phi \pm \pi/2| \lesssim \sqrt{z_0}$ в спектральную плотность радиационных потерь проведем вначале интегрирование по азимуту ϕ, а затем по полярному углу θ. Основной вклад вблизи брегговской частоты ω_B дает σ-поляризация, поскольку (при $\phi = \pi/2$) $p_\pi = 0$, так что узкий максимум (рис. 2) для π-поляризации отсутствует. Зависимость азимута ϕ от полярного угла θ на конусе излучения находим из (2)

$$\cos^2\phi = z_0(x - \nu_1 + g_1)\left(z - \nu_1 - g_1 - 2g_1^2(1 + x)^{-1}\right) \Big/ 3x. \tag{9}$$

Для разных частот излучения зависимость $\cos^2\phi$ от x иллюстрируется на рис. 4, где $x_1 = z_0(\nu - \nu_-)(\nu - \nu_+)/3$, а точки x_3, x_4, отвечающие $\phi = \pm\pi/2$, находятся с помощью соотношений (7). Отметим, что с уменьшением частоты ν_1 вначале обращается в нуль x_3 (при $\nu = \nu_+$), а затем и x_4 (при $\nu = \nu_-$) (рис. 4). Таким образом, в зависимости от частоты спектральная плотность будет выражаться через один или два интеграла

$$\frac{dW_\sigma}{d\omega} = \begin{cases} I\int\limits_{x_1}^{x_3} f_1 f_2 dx + I\int\limits_{x_4}^{3/z_0} f_1 f_2 dx, & \nu \geqslant \nu_+, \\ I\int\limits_{x_4}^{3/z_0} f_1 f_2 dx, & \nu_- \leqslant \nu \leqslant \nu_+, \\ I\int\limits_{x_1}^{3/z_0} f_1 f_2 dx, & \nu \leqslant \nu_-, \end{cases} \tag{10}$$

где $f_1 = (x - \nu_1 + g_1)^{1/2}(x - \nu_1 - g_1 - 2g_1^2(1 + x)^{-1})^{-1/2}$, $f_2 = 2(x - x_1)^{1/2}/\pi(1 + x)^2$.

Поскольку $f_1(x) < 1$, то для интересующих нас значений ω вблизи брегговской частоты ω_B, например $\nu = \nu_-$, из (10) немедленно следует, что $dW/d\omega < I$. Более точные оценки показывают возможность понижения максимума по сравнению с I более чем на 15–20%. Таким образом, запрещенная для излучения область частот проявляется также и в интегральной характеристике — спектральной плотности излучения (рис. 3). В частности, при проведении численных расчетов вблизи ω_B нужно уменьшать шаг следования на один–два порядка.

Если границы тонкого кристалла перпендикулярны скорости частицы (рис. 1), то для получения интенсивностей излучения в направлениях k_1, k_2 следует соответствующие характеристики (4), (5), (8), (10) умножить на $L/2$, где L — толщина кристалла. Разумеется, суммарная интенсивность излучения, поделенная на L, будет совпадать с радиационными потерями с единицы длины.

Список литературы

[1] *Адищев Ю.В., Мун В., Углов С.Р.* Матер. XVII Всесоюз. совещания по физике взаимодействия заряженных частиц с кристаллами. М., 1988. С. 99–100.
[2] *Афанасенко В.П., Барышевский В.Г., Зуевский Р.Ф.* и др. // Матер. XX Всесоюз. совещания по физике взаимодействия заряженных частиц с кристаллами. М., 1991. С. 112–114.
[3] *Feranchuk I.D., Ivashin A.V.* // J. Physigue. 1985. Vol. 46. N 11. P. 1981–1986.
[4] *Шипов Н.В.* Изв. вузов. Радиофизика. 1985. Т. 28. № 8. С. 1043–1052.
[5] *Truong Ba Ha, Dubovskaya I.* // Phys. Stat. Sol. (b). 1991. Vol. 155. P. 685–690.
[6] *Пинскер З.Г.* Рентгеновская кристаллооптика. М.: Наука, 1982. 390 с.