

01;03

Вариационные принципы построения маломодовых моделей ламинарно-турбулентного перехода

© Н.М. Зубарев

Институт электрофизики УрО РАН,
620049 Екатеринбург, Россия

(Поступило в Редакцию 18 сентября 1995 г. В окончательной редакции 22 января 1996 г.)

Предложен основанный на вариационных принципах метод построения маломодовых моделей распределенных нелинейных систем, повышающий точность аппроксимации по сравнению с методом Галеркина при заранее заданном базисе пробных функций. Метод может быть полезным для исследования начальных стадий ламинарно-турбулентного перехода, когда увеличение числа пробных функций резко повышает жесткость редуцированной системы и поэтому, целесообразно использовать оптимальные маломодовые модели. С использованием метода построена и обсуждается модификация модели Лоренца для системы Зальцмана.

Введение

Теорема Рюэля–Такенса [1] о том, что переход к хаосу в динамических системах может происходить через конечное число бифуркаций обуславливает интерес к конечномерным моделям при описании ламинарно-турбулентного перехода в системах с распределенными параметрами. Обычно такие модели строятся применением процедуры Галеркина [2], которая дает системе конечного числа обыкновенных дифференциальных уравнений на амплитуды возмущений. Выбор базиса пробных функций в процедуре делается на основе априорной информации о поведении системы и характере ее неустойчивостей, причем минимальное число этих функций, обеспечивающее уже достаточно сложное поведение, — это 3. Но ясно, что использование малого числа мод в методе Галеркина ведет к значительной неточности аппроксимации. Конечно, необходимой точности всегда можно достичь удержанием большого числа мод возмущений. Однако увеличение базиса пробных функций без изменения количества параметров порядка в динамике системы вблизи порога ее устойчивости (см., например, [3]) значительно увеличивает жесткость такой системы и требует существенного уменьшения шага ее численного интегрирования [4].

В такой ситуации автору кажется целесообразным при анализе начальных стадий ламинарно-турбулентного перехода пойти путем построения оптимальной модели в рамках заранее заданного базиса из незначительного числа пробных функций. В настоящей работе развивается предложенный в [5] метод построения такой модели из соображений минимизации интеграла квадрата невязки в окрестности текущей точки динамической системы, что позволяет значительно повысить ее точность по сравнению с галеркинской аппроксимацией.

Использование метода продемонстрировано на примере системы Зальцмана, возникающей в ряде задач при описании начальных стадий ламинарно-турбулентного перехода (возникновение валов Бенара [6], стратификация жидкометаллического проводника с током [7,8]).

Для этой системы построена простейшая трехмодовая модель, оказавшаяся существенно отличной от получаемой процедурой Галеркина модели Лоренца [9].

Краткое изложение метода

Рассматривается уравнение в частных производных вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}, \mathbf{r}, u\right), \quad (1)$$

где $\mathbf{r} = \{x_1, \dots, x_m\}$ — пространственная координата; для функции u на области ее определения V задано начальное условие $u(\mathbf{r}, t)|_{t=0} = u^0(\mathbf{r})$, а на границе области функции u удовлетворяет соответствующим физике исследуемого явления граничным условиям.

Зададим теперь на V скалярное произведение как $(f(\mathbf{r}), g(\mathbf{r})) = \int_V f(\mathbf{r})g(\mathbf{r})dV$. Будем искать приближенное решение (1) в виде

$$u = \tilde{u} = \sum_{i=1}^n A_i(t)H_i(\mathbf{r}), \quad (2)$$

где пробные функции H_i удовлетворяют необходимым граничным условиям и, кроме того, пусть для них справедливо: $(H_i, H_j) \neq 0$, только если $i = j$, т.е. они ортогональны. Введем теперь невязку

$$N(\dot{\mathbf{A}}, \mathbf{A}, \mathbf{r}) = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} - F\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}, \mathbf{r}, \tilde{u}\right),$$

где $\mathbf{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$.

В соответствии с методом Галеркина (см., например, [2]) систему n обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) для амплитуд A_1, \dots, A_n можно получить из требований ортогональности невязки пробным функциям

$$(H_i(\mathbf{r}), N(\dot{\mathbf{A}}, \mathbf{A}, \mathbf{r})) = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3)$$

В итоге получается система

$$\dot{\mathbf{A}} = \mathbf{f}(\mathbf{A}) \quad (4)$$

с начальными условиями

$$A_i(0) = (u^0, H_i) / (H_i, H_i), \quad i = 1, \dots, n, \quad (5)$$

где $\mathbf{f} = \{f_1, \dots, f_n\}$ в общем случае нелинейные функции амплитуд.

В этой работе предлагается строить системы ОДУ из соображений минимальности на траектории функционала

$$S = \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} L(\dot{\mathbf{A}}, \mathbf{A}) dt \equiv \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} (N, N) dt, \quad (6)$$

где t_0 — текущее время; ε — величина временного интервала, на котором производится минимизация.

Смысл этого в том, что мы выпускаем траекторию из текущей точки таким образом, чтобы она оптимально аппроксимировала исходное уравнение (1) во временной ε -окрестности текущей точки. Легко заметить, что такой подход сводится к методу Галеркина при $\varepsilon \equiv 0$.

Обозначим поправки к уравнениям (4) за $\mathbf{V} = \{V_1, \dots, V_n\}$

$$\mathbf{V} = \dot{\mathbf{A}} - \mathbf{f}(\mathbf{A}),$$

тогда функция L записывается в виде

$$L(\dot{\mathbf{A}}, \mathbf{A}) \equiv (N, N) = C(\mathbf{A}) + \sum_{i=1}^n \alpha_i V_i^2, \quad (7)$$

где $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ — положительные коэффициенты, а функция $C(\mathbf{A}) \geq 0$ отражает неточность приближения (4).

Не теряя общности можно считать, что $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 1$. Действительно, если это условие не соблюдается, то можно взять в (2) пробные функции в виде $\tilde{H}_i = H_i / \sqrt{\alpha_i}$ ($i = 1, \dots, n$), что приведет (7) к требуемому виду.

Задачу минимизации функционала S целесообразно разбить на две отдельные: задачу минимизации функционала $S_1 = \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0} (N, N) dt$ с первым свободным и вторым закрепленным концом; а также задачу минимизации функционала $S_2 = \int_{t_0}^{t_0+\varepsilon} (N, N) dt$ с первым закрепленным и вторым свободным концом. При условии малости параметра ε решение подобных задач [5] приводит к системам ОДУ

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} A_i = f_i(\mathbf{A}) \pm \frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial C(\mathbf{A})}{\partial A_i} - \frac{\varepsilon^2}{4} \frac{\partial}{\partial A_i} \\ \times \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial C}{\partial A_j} f_j(\mathbf{A}) \right) + O(\varepsilon^3), \quad i = 1, \dots, n, \quad (8) \end{aligned}$$

где знак "плюс" соответствует первой задаче, а знак "минус" — второй.

Различие знаков связано с тем, что мы нарушили инвариантность относительно замены $t \rightarrow -t$, минимизируя функционалы на несимметричных временных интервалах $[t_0, t_0 + \varepsilon]$ и $[t_0 - \varepsilon, t_0]$. Решение первоначальной

задачи минимизации функционала (6) на симметричном интервале $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ получим, отбрасывая в (8) все нечетные по ε члены. Получим маломодовую модель

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} A_i = f_i(\mathbf{A}) - \frac{\varepsilon^2}{4} \frac{\partial}{\partial A_i} \\ \times \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial C}{\partial A_j} f_j(\mathbf{A}) \right) + O(\varepsilon^4), \quad i = 1, \dots, n, \quad (9) \end{aligned}$$

с начальными условиями (5), отличную от получаемой методом Галеркина и включающую в себя неопределенный параметр ε . Что касается этого параметра, то его оптимальное значение должно соответствовать минимуму такой характеризующей качество модели величины, как $I(\varepsilon) = \int_{T_0}^{T_0+T} L d\tau$ (числа T_0 и T выбираются значительно превышающим характерные времена для системы (9)). Несложно заметить, что с хорошей точностью можно считать оптимальное ε равным наименьшему характерному времени системы. Дело в том, что именно это время определяет круг сходимости разложения по ε в (8).

Обобщение метода на случай системы уравнений

Рассматривается система k уравнений в частных производных

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} = F \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}, \mathbf{r}, u_1, \dots, u_k \right), \quad j = 1, \dots, k, \quad (10)$$

такая что $u_1 = u_2 = \dots = u_k = 0$ является частным решением этой системы. Будем искать приближенное решение системы, используя аппроксимацию каждой функции u_j ($j = 1, \dots, k$) с помощью n_j пробных функций

$$u_j = \tilde{u}_j = \sum_{i=d_j+1}^{d_{j+1}} A_i(t) H_i(\mathbf{r}), \quad j = 1, \dots, k, \quad (11)$$

где $d_j = \sum_{i=1}^j n_i$ и, следовательно, $d_k \equiv n$ есть общее число пробных функций.

Введем теперь невязку для каждого уравнения системы (10)

$$\begin{aligned} N_j(\dot{\mathbf{A}}, \mathbf{A}, \mathbf{r}) = \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial t} - F \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}, \mathbf{r}, \tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_k \right), \\ j = 1, \dots, k, \end{aligned}$$

Как и прежде, из требований ортогональности невязок пробным функциям получается система n ОДУ (4) на амплитуды A_1, \dots, A_n . Далее, в отличие от (6) возьмем подынтегральную функцию L в виде

$$L(\dot{\mathbf{A}}, \mathbf{A}) = \sum_{j=1}^k (N_j, N_j) \beta_j, \quad (12)$$

где β_1, \dots, β_k — неотрицательные коэффициенты, определяющие вклад невязок различных уравнений в функцию L .

Их значения будут выбраны ниже. Каждое скалярное произведение из (12) представимо в виде

$$(N_j, N_j) + C_j(\mathbf{A}) + \sum_{i=d_j+1}^{d_j+1} \gamma_i B_i^2,$$

где, как и прежде B_1, \dots, B_n — поправки к уравнениям (4).

Из того, что $u_1 = u_2 = \dots = u_k = 0$ удовлетворяет (12), ясно, что $\mathbf{A} = 0$ будет являться стационарным решением системы уравнений (4). Потребуем теперь, чтобы значения коэффициентов β_1, \dots, β_k были таковы, что вблизи этой точки в фазовом пространстве системы (4) вклад различных слагаемых (12) был бы эквивалентен. Так как добавки предлагаемого метода к уравнениям (4) существенно нелинейны, то, действительно, для определения значения коэффициентов оказывается достаточным рассматривать лишь Галеркинское приближение (4). Перепишем эту систему в виде

$$\dot{\mathbf{A}} = D\mathbf{A} + O(A^2), \tag{13}$$

где D — квадратная матрица с элементами

$$D_{ij} \equiv \left. \frac{\partial f_i}{\partial A_j} \right|_{\mathbf{A}=0}.$$

Система (13) в общем случае с помощью линейной замены координат $\mathbf{A} = V\mathbf{a}$, где V — квадратная матрица, удовлетворяющая свойству $V^{-1}DV = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, приводится к виду

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + O(a^2).$$

Не нарушая общности, можно считать $\text{Re}(\lambda_1) \geq \text{Re}(\lambda_2) \geq \dots \geq \text{Re}(\lambda_n)$.

Ясно, что поведение динамической системы и, следовательно, величина слагаемых в (12) будут определяться наиболее быстрыми амплитудами a , т.е. амплитудами с наибольшим значением вещественной части показателя λ .

Наиболее важными представляются два случая: первый — когда λ_1 вещественное, второй — когда λ_1 и λ_2 составляют комплексно-сопряженную пару (считаем, что эти собственные значения невырожденные).

В первом случае, переписывая выражение (12) для L в переменных a_1, \dots, a_n , полагая затем $a_2 = a_3 = \dots = a_n = 0$ и оставляя лишь квадратичные по a_1 члены, получим

$$L \approx \left(\frac{d}{dt} a_1 - \lambda_1 a_1 \right)^2 \sum_{i=1}^n \gamma_i V_{1i}^2,$$

где V_{1i} ($i = 1, \dots, n$) — элементы первого столбца матрицы V .

Сразу видно, что для коэффициентов β_1, \dots, β_k следует положить

$$\beta_j = \left(\sum_{i=d_j+1}^{d_j+1} \gamma_i V_{1i}^2 \right)^{-1}, \quad j = 1, \dots, k.$$

Понятно, что все это справедливо, если суммы в правых частях отличны от нуля. Те весовые коэффициенты β , для которых это не так, определяются аналогично сравнением поведения более медленных амплитуд (т.е. с меньшими показателями λ).

Во втором случае под эквивалентностью слагаемых в (12) будем понимать эквивалентность их усредненных за время $T = 2\pi/\text{Im}(\lambda_1)$ значений. Переписывая выражение для L в переменных a_1, \dots, a_n , полагая затем $a_3 = \dots = a_n = 0$ и оставляя лишь квадратичные по a_1 и a_2 члены, получим

$$\frac{1}{T} \int_t^{t+T} L dt \approx 2 \left(\frac{d}{dt} \sqrt{a_1 a_2} - \text{Re}(\lambda_1) \sqrt{a_1 a_2} \right)^2 \sum_{i=1}^n \gamma_i V_{1i} V_{2i},$$

где V_{1i} и V_{2i} ($i = 1, \dots, n$) — элементы первого и второго столбцов матрицы V .

Таким образом, следует положить

$$\beta_j = \left(\sum_{i=d_j+1}^{d_j+1} \gamma_i V_{1i} V_{2i} \right)^{-1}, \quad j = 1, \dots, k.$$

Итак, мы нашли значения коэффициентов β_1, \dots, β_k . Если теперь переписать функцию L в виде (7), где будет

$$C(\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^k \beta_j C_j, \quad \alpha_i = \beta_j \gamma_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

а значение нижнего индекса j определяется неравенствами

$$j = \begin{cases} 1, & 0 < i \leq d_1, \\ 2, & d_1 < i \leq d_2, \\ \vdots & \vdots \\ k, & d_{k-1} < i \leq n, \end{cases}$$

то мы опять получаем задачу на оптимизацию функционала (6) и в дальнейшем для построения системы ОДУ следует действовать аналогично предыдущему разделу.

Пример использования метода

В этом разделе в качестве исходной системы уравнений в частных производных рассматривается система Зальцмана, возникающая в ряде задач при описании начальных стадий ламинарно-турбулентного перехода

(возникновение валов Бенара [6], стратификация жидко-металлического проводника с током [7,8] и т.д.)

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t} = \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \alpha \frac{\partial \theta}{\partial x} + \gamma \nabla^4 \psi, \quad (14)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{\partial \theta}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} + \zeta \nabla^2 \theta, \quad (15)$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \zeta$ — положительные коэффициенты; $\psi(x, z, t), \theta(x, z, t)$ — некоторые скалярные поля, удовлетворяющие граничным условиям $\theta|_{z=0} = \theta|_{z=z_0} = \psi|_{z=0} = \psi|_{z=z_0} = \nabla^2 \psi|_{z=0} = \nabla^2 \psi|_{z=z_0} = 0$.

Для задачи о двумерной тепловой конвекции в плоском слое жидкости высотой z_0 в результате ее подогрева снизу; γ есть коэффициент вязкости, ζ — коэффициент температуропроводности, α — произведение ускорения свободного падения на коэффициент теплового расширения, β — отношение разности между температурами нижнего и верхнего слоев жидкости к z_0 . В этом случае ψ — функция тока жидкости и θ — отклонение температуры от равновесного (линейного по z) профиля.

Для задачи о статификации жидкого проводника γ есть коэффициент вязкости, ζ — коэффициент магнитной вязкости, а α и β пропорциональны полному электрическому току через проводник. Как и прежде, ψ — функция тока, а θ в таком случае — возмущение равновесного профиля распределения напряженности магнитного поля по сечению проводника [7,8].

Интерес к этой системе вызван тем, что на ее основе была предложена одна из самых известных маломодовых моделей ламинарно-турбулентного перехода — модель Лоренца [9]

$$\dot{X} = \sigma Y - \sigma X, \quad (16)$$

$$\dot{Y} = rX - XZ - Y, \quad (17)$$

$$\dot{Z} = XY - bZ, \quad (18)$$

где $\sigma = \gamma/\zeta$, $b = 8/3$ и $r = 4\alpha\beta a^4(27\gamma\zeta)^{-1}$ (здесь $a = z_0/\pi$), а точкой обозначено дифференцирование по безразмерному времени $\tau = 3a^{-2}\zeta t/2$.

Она является результатом подстановки

$$\psi = 3\zeta X(t) \sin\left(\frac{z}{a}\right) \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}a}\right), \quad (19)$$

$$\theta = \frac{\beta a}{r} \left(\sqrt{2}Y(t) \cos\left(\frac{z}{a}\right) \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}a}\right) - Z(t) \sin\left(\frac{2z}{a}\right) \right) \quad (20)$$

в систему Зальцмана с последующим отбрасыванием не входящих сюда мод с помощью стандартной процедуры (3).

Из [6] известно, что при увеличении числа мод в Галеркинской аппроксимации вблизи порога устойчивости эти три моды дают наибольший вклад. Также ясно, что при увеличении числа мод n число параметров порядка остается неизменным [3], а остальные моды

будут адиабатически подстраиваться под них. При этом для минимального времени релаксации $\Delta\tau$ при достаточно больших n справедливо: $\Delta\tau \simeq n^{-2}$. Например, из [4] ясно, что наличие таких быстро затухающих мод, не существенных для качественного анализа характера фазового перехода, заставляет, однако, выбирать шаг численного интегрирования много меньшим $\Delta\tau$, что связано с жесткостью подобных систем. Таким образом, на примере анализа ламинарно-турбулентного перехода наиболее ясно видно, что точность модели нужно повышать не за счет увеличения базиса, а за счет усложнения правых частей уравнений маломодовой модели.

Пострим теперь модификацию модели Лоренца с помощью предлагаемого в данной работе метода. Возьмем функцию L в виде

$$L(\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}, X, Y, Z) = \beta_1 \int_V N_1^2 dV + \beta_2 \int_V N_2^2 dV,$$

где N_1, N_2 — невязки для уравнений (14) и (15) соответственно, а положительные коэффициенты β_1, β_2 выбираются в соответствии с указаниями предыдущего раздела такими, чтобы при малых X, Y, Z вклад невязок этих уравнений в функцию L был бы эквивалентен.

Так, с учетом того что динамика системы будет определяться наиболее быстрой модой с показателем

$$\lambda = \frac{-(\sigma + 1) + \sqrt{(\sigma - 1)^2 + 4r\sigma}}{2},$$

получим

$$L(\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}, X, Y, Z) = (\dot{X} - \sigma Y + \sigma X)^2/c(\sigma, r) + (\dot{Y} - rX + XZ + Y)^2 + (\dot{Z} - XY + bZ)^2 + X^2 Z^2,$$

где $c = \sigma^2/(\sigma + \lambda)^2$.

При больших значениях управляющего параметра r для $c(\sigma, r)$ справедливо $c \approx \sigma/r$.

Пользуясь (9), получим с точностью до квадратичных по ε членов

$$\dot{X} = \sigma(Y - X) - \varepsilon^2 \left(YZ(c\sigma Z + (2c+1)X^2)/2 - XZ^2(c\sigma + cb) \right), \quad (21)$$

$$\dot{Y} = rX - XZ - Y - \varepsilon^2 XZ(X^2 + c\sigma Z)/2, \quad (22)$$

$$\dot{Z} = XY - bZ - \varepsilon^2 \left(YX(X^2 + 2\sigma Z)/2 - ZX^2(\sigma + b) \right). \quad (23)$$

Таким образом, для системы Зальцмана с помощью подстановки Лоренца (19), (20) получается модель, отличная от известной модели (16)–(18). В нее входит дополнительный параметр ε , определяющий интервал времени, на котором производится минимизация функционала $S = \int L d\tau$. Как говорилось выше, оптимальное значение этого параметра соответствует минимуму интеграла $I(\varepsilon) + \int_{T_0}^{T_0+T} L d\tau$. Несложно заметить, что ниже границы потери устойчивости тривиального стационарного решения системы (т.е. при $r \leq 1$) нужно положить

$\varepsilon = 0$ и эта модель превращается в модель Лоренца, т.е. предлагаемый метод в этом частном случае дает ту же модель, что и метод Галеркина.

В случае $r > 1$ ясно, что, начиная со значения ε , равного нулю, величина интеграла уменьшается (т.е. наша модель оказывается более точной, чем модель Лоренца); при некотором значении ε достигает минимума, а затем начинает увеличиваться. Это связано с тем, что при больших ε недостаточно учитывать лишь квадратичные по ε члены в (9).

Например, для модели (21)–(23) с параметрами $\sigma = 10$ и $r = 28$ значение функции $I(\varepsilon)$ достигает минимума при $\varepsilon = 0.035$. Ее значение в этой точке, полученное в результате вычислительного эксперимента, равно $0.77I(0)$, т.е. существенно меньше, чем для модели Лоренца. Интересно отметить, что обсуждаемому случаю соответствует странный аттрактор типа аттрактора Лоренца.

Вообще при больших надкритичностях (т.е. при $\sigma \ll r$ и $b \ll r$) наименьшее характерное время системы есть $1/r$ и можно взять $\varepsilon = 1/r$. Так, для $r = 28$ будет $\varepsilon \approx 0.036$, что совпадает с приведенными выше результатами численного интегрирования.

Естественно, применение модели (21)–(23) вместо (16)–(18) дает значительные поправки к значению порога устойчивости нетривиальных стационарных состояний исходной системы (14), (15). Так, если в модели Лоренца все стационарные решения теряют устойчивость и единственным устойчивым предельным множеством становится аттрактор Лоренца при $r \approx 24.74$, то для построенной в данной работе модели уже, например, при $r = 19$, $\varepsilon = 0.045$ динамика системы становится хаотической и при этом справедливо $I(\varepsilon) = 0.78I(0)$.

Заключение

В данной работе был предложен метод построения маломодовых моделей, обобщающий метод Галеркина; с его использованием была построена модификация модели Лоренца для системы Зальцмана и было показано, что такая модель обеспечивает значительно меньшую невязку, чем модель Лоренца. Автор надеется, что простота аналитических выкладок при построении модели, приводящая, однако, к существенному повышению точности аппроксимации по сравнению с методом Галеркина, может оказаться полезной при качественном анализе характера потери устойчивости стационарных состояний и построении моделей ламинарно-турбулентного перехода в нелинейных системах с распределенными параметрами.

Считаю своим долгом поблагодарить Н.Б. Волкова и А.М. Искольдского за стимулирующие обсуждения и О.В. Зубареву за помощь при проведении расчетов.

Данная работа выполнена в рамках проекта РФФИ № 94-02-06654-а.

Список литературы

- [1] *Ruelle D., Takens F.* // *Comm. Math. Phys.* 1971. Vol. 20. P. 167.
- [2] *Флетчер К.* Численные методы на основе метода Галеркина. М.: Мир, 1988. 352 с.
- [3] *Хакен Г.* Синергетика. М.: Мир, 1980. 408 с.
- [4] *Деккер К., Вервер Я.* Устойчивость методов Рунге–Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1988. 334 с.
- [5] *Зубарев Н.М.* Письма в ЖТФ. 1995. Т. 21. Вып. 15. С. 83–86.
- [6] *Saltzman B.* // *J. Atmos. Sci.* 1962. Vol. 19. P. 329.
- [7] *Волков Н.Б., Искольдский А.М.* Письма в ЖЭТФ. 1990. Т. 51. Вып. 11. С. 560–562.
- [8] *Волков Н.Б., Зубарев Н.М.* // *ЖЭТФ.* 1995. Т. 107. Вып. 6. С. 1868–1876.
- [9] *Lorenz E.N.* // *J. Atmos. Sci.* 1963. Vol. 20. P. 130.