01;07;12

Нестационарная двухпотоковая модель переноса излучения для томографии рассеивающих сред

© С.В. Селищев, С.А. Терещенко

Московский институт электронной техники,
103498 Москва, Россия

(Поступило в Редакцию 18 декабря 1995 г.)

Сформулирована нестационарная двухпотоковая модель переноса излучения в неоднородной рассеивающей среде, примененная к ситуации облучения такой среды тонким лучом импульсного лазера. Показано, что при условии регистрации временнóго распределения прошедших фотонов возможно одновременное восстановление двух пространственных функций (коэффициентов поглощения и рассеяния излучения средой) с помощью обратного преобразования Радона и дополнительного решения набора нелинейных дифференциальных уравнений на линиях проецирования. Приведено аналитическое решение в квадратурах этих дифференциальных уравнений. Полученный результат представляет собой метод решения задачи оптической томографии в неоднородной рассеивающей среде.

Введение

В последнее время появилось большое количество работ в области исследования возможности томографических подходов к восстановлению внутренних структур в сильнорассеивающих (мутных) средах [1,2]. Однако примеры сведения таких задач к известному преобразованию Радона были приведены только для слаборассеивающих (разреженных) сред [3]. При этом, как и в случае рентгеновской томографии, предполагалось облучение непрерывным оптическим пучком. Так как существенного продвижения в стационарном случае не видно, то естественно обратиться к нестационарным моделям взаимодействия излучения с веществом. Кроме того, результаты целого ряда экспериментальных работ [1,2], исследовавших прохождение оптических импульсов ультракороткой длительности через мутные среды, позволяют считать использование импульсного излучения одним из наиболее перспективных направлений в этой области.

Для теоретического описания прохождения оптического излучения через мутные среды используется, как правило, диффузионное приближение уравнения переноса как в стационарном, так и в нестационарном случаях [4,5]. На наш взгляд, диффузионное приближение плохо согласуется с томографической идеей просвечивания объекта тонкими лучами, так как при этом в значительной степени теряется информация о направлении зондирующего луча. Анализ распространения оптического импульса малой длительности в рассеивающей среде на основе нестационарного уравнения переноса в приближении однократного и двукратного рассеяния [6] малопригоден для сильно рассеивающих сред.

Для непрерывного оптического излучения в мутной среде часто используют приближение Кубелки и Мунка, основанное на модели двух световых потоков, распространяющихся в прямом и обратном направлениях [4]. Казалось бы, это приближение, так же как и диффузионное, можно обобщить на нестационарные процессы. Тем не менее в настоящее время двухпотоковое (четырехпотоковое) приближение используется только для анализа стационарных процессов.

Наиболее общим способом описания взаимодействия оптического излучения с веществом (после уравнений Максвелла) является уравнение переноса излучения [4]. Важнейшими характеристиками рассеивающей среды, входящими в уравнение переноса, являются коэффициент поглощения излучения $\mu_a(\mathbf{r})$ и дифференциальный по углам коэффициент рассеяния излучения $\mu_s(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}' \to \mathbf{\Omega})$, где $\mathbf{r}$ – точка среды, $\mathbf{\Omega}'$ и $\mathbf{\Omega}$ — направления фотона до рассеяния и после рассеяния соответственно. Таким образом, в наиболее общей постановке задачи, можно говорить о восстановлении двух независимых функций, зависящих от трех $(\mu_a(\mathbf{r}))$ и семи $(\mu_s(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}' \to \mathbf{\Omega}))$ переменных. Так как в такой постановке задача становится слишком трудной для решения, то, как правило, рассматриваются более простые модели и соответственно более простые объекты восстановления. Подчеркнем, что объект восстановления определяется теоретической моделью, выбранной для описания взаимодействия излучения со средой.

В соответствии с вышесказанным целью настоящей работы является рассмотрение нестационарной двухпотоковой моделью переноса излучения в неоднородной сильнорассеивающей среде (СРС) и демонстрация возможности томографического восстановления определяемых этой моделью характеристик такой среды.

Нестационарная двухпотоковая модель переноса излучения в неоднородной СРС

Вследствие сложности аналитического решения полного уравнения переноса обычно используются те или иные приближения. Используем представление о двух потоках фотонов, распространяющихся в противоположных направлениях. В стационарном случае примером такого подхода является хорошо известная двухпотоковая модель Кубелки и Мунка [4].

Рассмотрим обобщение двухпотокового приближения на нестационарные процессы для описания распространения точечного мононаправленного импульса в полубесконечной неоднородной рассеивающей среде. Важным отличием нашего подхода от модели Кубелки и Мунка является не только нестационарность модели и неоднородность среды, но и применение к тонкому (коллимированному) лучу, в то время как обычно для сведения к одномерному случаю имеют в виду плоский однородный источник. Указанное обстоятельство приводит к определенному изменению физического смысла подлежащих восстановлению характеристик СРС.

Как принято в вычислительной томографии [7], введем неподвижную систему координат (x, y, z) и вращающуюся вокруг оси z систему координат (ξ, ζ, z). Уравнение переноса излучения в односкоростном приближении во вращающейся системе координат можно записать в следующем виде:

$$\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial t}\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, t) + \mathbf{\Omega}\mathrm{grad}\,\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, t) + \mu(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, t)$$
$$- \int \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, t)\mu_s(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}' \to \mathbf{\Omega})d\mathbf{\Omega}' = S(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, t), \quad (1)$$

где ν — скорость света в среде; $\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, t)$ — плотность потока фотонов в точке $\mathbf{r} = (\xi, \zeta, z)$ в момент времени t, движущихся в направлении $\mathbf{\Omega}$; $\mu_s(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}' \to \mathbf{\Omega})$ — дифференциальный по углам коэффициент рассеяния излучения; $\mu_a(\mathbf{r})$ — коэффициент поглощения излучения; $\mu(\mathbf{r}) = \mu_a(\mathbf{r}) + \int \mu_s(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}' \to \mathbf{\Omega})d\mathbf{\Omega}'$; $S(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, t)$ — функция распределения источников излучения.

Будем рассматривать только те фотоны, которые двигаются вдоль оси исходного луча. Так как возврат фотонов, рассеянных в сторону от оси, к движению вдоль оси маловероятен, то можно считать, что процесс рассеяния фотонов сводится к обратному рассеянию вдоль оси. Следовательно, коэффициент (обратного) рассеяния можно записать в виде $\mu_s(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}' \to \mathbf{\Omega}) = m_s(\mathbf{r})\delta(\mathbf{\Omega}' + \mathbf{\Omega})$, где $\delta(\cdot)$ — дельта-функция Дирака; $m_s(\mathbf{r})$ — некоторая функция координат, которую мы будем называть одномерным коэффициентом рассеяния, имея в виду одномерность двухпотоковой модели, а также тот факт, что на оси лазерного пучка этот коэффициент является функцией только одной переменной. Кроме того, так как в этой модели для сохранения энергетического баланса рассеянные в стороны от оси x фотоны следует считать поглощенными, то и коэффициент поглощения $\mu_a(\mathbf{r})$ необходимо заменить на некоторую функцию $m_a(\mathbf{r}_)$, которую будем аналогично называть одномерным коэффициентом поглощения. Обозначим $m(\mathbf{r}) = m_a(\mathbf{r}) + m_s(\mathbf{r})$ и перепишем уравнение (1) в виде

$$\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial t}\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, t) + \mathbf{\Omega}\mathrm{grad}\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, t) + m(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, t)$$
$$- \mu_s(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r}, -\mathbf{\Omega}, t) = S(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, t). \quad (2)$$

Для короткого импульса лазерного излучения, испущенного в момент времени $t = 0$ из точки $\mathbf{r}_0 = (\xi_0, \zeta_0, z_0)$, можно записать $S(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, t) = U(\mathbf{\Omega})\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\delta(t)$. Будем считать, что лазерный импульс направлен вдоль оси ζ. Обозначим $\mathbf{\Omega}_0$ — направление вдоль оси луча. Так как мы будем рассматривать только те фотоны, которые движутся вдоль направления $\mathbf{\Omega}_0$, а рассеянные в стороны от этого направления фотоны считаются поглощенными, то можно записать $\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, t) = \Phi_0(\zeta, \mathbf{\Omega}, t)\delta(\xi - \xi_0)\delta(z - z_0)$. Рассмотрим два направления $\mathbf{\Omega} = \mathbf{\Omega}_0$ и $\mathbf{\Omega} = -\mathbf{\Omega}_0$. Тогда получим

$$\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial t}\Phi_0(\zeta, \mathbf{\Omega}_0, t) + \frac{\partial}{\partial \zeta}\Phi_0(\zeta, \mathbf{\Omega}_0, t) + m(\mathbf{r})\Phi_0(\zeta, \mathbf{\Omega}_0, t)$$
$$- \mu_s(\mathbf{r})\Phi_0(\zeta, -\mathbf{\Omega}_0, t) = U(\mathbf{\Omega}_0)\delta(\zeta - \zeta_0)\delta(t),$$
$$\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial t}\Phi_0(\zeta, -\mathbf{\Omega}_0, t) - \frac{\partial}{\partial \zeta}\Phi_0(\zeta, -\mathbf{\Omega}_0, t) + m(\mathbf{r})\Phi_0(\zeta, -\mathbf{\Omega}_0, t)$$
$$- \mu_s(\mathbf{r})\Phi_0(\zeta, \mathbf{\Omega}_0, t) = U(-\mathbf{\Omega}_0)\delta(\zeta - \zeta_0)\delta(t). \quad (3)$$

Обозначая $F_+(\zeta, t) = \Phi_0(\zeta, \mathbf{\Omega}_0, t)$, $F_-(\zeta, t) = \Phi_0(\zeta, -\mathbf{\Omega}_0, t)$, $U(\mathbf{\Omega}_0) = U_0$, считая $U(-\mathbf{\Omega}_0) = 0$ и учитывая источник в начальных и граничных условиях, получим основную систему уравнений для нестационарной двухпотоковой модели переноса излучения в неоднородной СРС

$$\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial t}F_+(\zeta,t) + \frac{\partial}{\partial \zeta}F_+(\zeta,t) + m(\mathbf{r})F_+(\zeta,t) - \mu_s(\mathbf{r})F_-(\zeta,t) = 0,$$
$$\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial t}F_-(\zeta,t) - \frac{\partial}{\partial \zeta}F_-(\zeta,t) + m(\mathbf{r})F_-(\zeta,t) - m_s(\mathbf{r})F_+(\zeta,t) = 0, \quad (4)$$

$$F_+(\zeta_0, t) = U_0\delta(t), \qquad F_-(\zeta \to +\infty, t) = 0,$$
$$F_+(\zeta, 0) = 0, \qquad F_-(\zeta, 0) = 0. \quad (5)$$

Выражение (5) определяет граничные и начальные условия.

Рассмотрим решение системы (4) для однородной среды $m(\mathbf{r}) = m = \mathrm{const}$ и $m_s(\mathbf{r}) = m_s = \mathrm{const}$. Исключая из системы (4) $F_-(\zeta, t)$, получим уравнение

$$\frac{1}{\nu^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}F_+ - \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2}F_+ + \frac{2m}{\nu}\frac{\partial}{\partial t}F_+ + (m^2 - m_s^2)F_+ = 0, \quad (6)$$

решением которого является

$$F_+(\zeta, t) = U_0 m\nu\delta(m\nu t - m\zeta') - \exp(-m\zeta')$$
$$+ U_0\eta(m\nu t - m\zeta')\frac{m_s\nu\zeta'}{\sqrt{(\nu t)^2 - \zeta'^2}}$$
$$\times I_1\left(m_s\sqrt{(\nu t)^2 - \zeta'^2}\right)\exp(-m\nu t), \quad (7)$$

где $\eta(\cdot)$ — функция Хевисайда, $I_1(\cdot)$ — модифицированная функция Бесселя 1-го рода 1-го порядка, $\zeta' = \zeta - \zeta_0$.

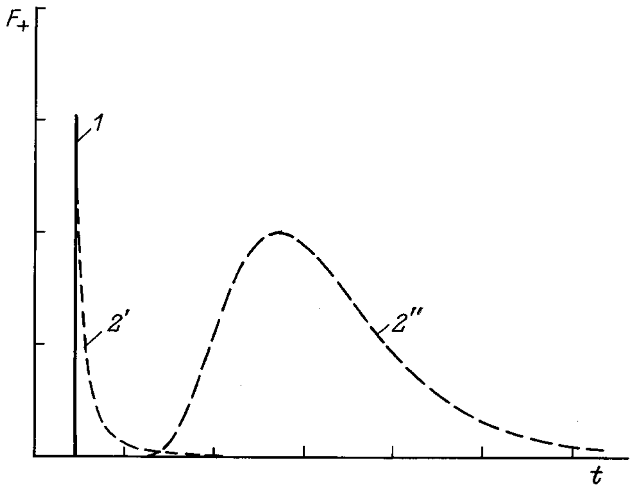

Рис. 1. Типичное временно́е распределение короткого оптического импульса после прохождения рассеивающего слоя. *1* — баллистическая компонента, *2* — рассеянная компонента.

Выражение (7) можно считать приближенным описанием излучения, прошедшего через слой толщины ζ', причем первое слагаемое описывает нерассеянную (баллистическую) компоненту излучения, прошедшего через слой толщины ζ'. Как и следовало ожидать, эта компонента подчиняется известному закону экспоненциального ослабления. Второе слагаемое описывает рассеянную компоненту излучения. Типичный вид временно́го распределения (7) показан на рис. 1. Вертикальная линия *1* соответствует нерассеянной компоненте. Рассеянная компонента имеет для малых толщин вид *2′*, а для больших толщин — вид *2″*.

Относительную долю нерассеянной $(U_+^{(ns)})$ и рассеянной $(U_+^{(s)})$ компонент можно найти, проинтегрировав по времени каждое слагаемое в (7) в отдельности

$$U_+^{(ns)}(\zeta) = \int\limits_0^\infty U_0 m\nu\delta(m\nu t - m\zeta')\exp(-m\zeta')dt$$
$$= U_0\exp(-m\zeta') = U_0\exp\big[-m(\zeta-\zeta_0)\big], \quad (8)$$

$$U_+^{(s)}(\zeta) = \int\limits_{\zeta'/\nu}^\infty \frac{U_0 m_s\nu\zeta'}{\sqrt{(\nu t)^2-\zeta'^2}} I_1$$
$$\times\left(m_s\sqrt{(\nu t)^2-\zeta'^2}\right)\exp(-m\nu t)dt$$
$$= U_0\Big[\exp\Big(-\zeta'\sqrt{m^2-m_s^2}\Big) - \exp(-\zeta' m)\Big]$$
$$= U_0\Big[\exp\Big(-(\zeta-\zeta_0)\sqrt{m^2-m_s^2}\Big)$$
$$-\exp\big(-(\zeta-\zeta_0)m\big)\Big]. \quad (9)$$

Оптическая томография рассеивающих сред в двухпотоковой модели переноса излучения

Для перехода к оптической томографии рассеивающих сред необходимо проанализировать распространение оптического импульса в неоднородной среде. Рассмотрим (рис. 2) обычную геометрическую схему измерений с параллельными проекциями [8]. Будем рассматривать коэффициенты поглощения и рассеяния в выделенной плоскости $z = z_0$ в неподвижной системе координат (x, y, z): $m(x, y, z_0) = m(x, y)$; $m_s(x, y, z_0) = m_s(x, y)$ и во вращающейся системе координат (ξ, ζ, z) для каждого фиксированного ξ: $m\big(x(\xi,\zeta), y(\xi,\zeta), z_0\big) = m(\zeta)$; $m_s\big(x(\xi,\zeta), y(\xi,\zeta), z_0\big) = m_s(\zeta)$. Тогда вместо уравнения (6) получим следующее уравнение:

$$\frac{1}{\nu^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}F_+ - \frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}F_+ + \frac{1}{\nu}\left[2m(\zeta) + \frac{m_s'(\zeta)}{m_s(\zeta)}\right]\frac{\partial}{\partial t}F_+ + \frac{m_s'(\zeta)}{m_s(\zeta)}$$
$$\times\frac{\partial}{\partial\zeta}F_+ + \left[m^2(\zeta) - m_s^2(\zeta) + m(\zeta)\frac{m_s'(\zeta)}{m_s(\zeta)} - m'(\zeta)\right]F_+ = 0. \quad (10)$$

Проинтегрировав уравнение (10) по времени, можно найти уравнение для суммарной энергии прошедшего через рассеивающую среду импульса

$$U_+'' - \frac{m_s'(\zeta)}{m_s(\zeta)}U_+' - \Bigg[m^2(\zeta) - m_s^2(\zeta)$$
$$+ m(\zeta)\frac{m_s'(\zeta)}{m_s(\zeta)} - m'(\zeta)\Bigg]U_+ = 0, \quad (11)$$

где

$$U_+(\zeta) = \int\limits_0^\infty F_+(\zeta, t)dt \ \text{ и } \ U_+(\zeta_0) = U_0, \ \ U_+(\zeta\to\infty) = 0.$$

Уравнения для нерассеянной $(U_+^{(ns)})$ и рассеянной $(U_+^{(s)})$ компонент имеют следующий вид:

$$[U_+^{(ns)}]'' - \big[m^2(\zeta) - m'(\zeta)\big]U_+^{(ns)} = 0, \quad (12)$$

$$[U_+^{(s)}]'' - \frac{m_s'(\zeta)}{m_s(\zeta)}[U_+^{(s)}]' - \Bigg[m^2(\zeta) - m_s^2(\zeta) + m(\zeta)\frac{m_s'(\zeta)}{m_s(\zeta)}$$
$$- m'(\zeta)\Bigg]U_+^{(s)} = -m_s^2(\zeta)U_0\exp\left(-\int\limits_{\zeta_0}^{\zeta} m(\chi)d\chi\right),$$
$$U_+^{(ns)}(\zeta_0) = U_0, \qquad U_+^{(ns)}(\zeta\to\infty) = 0,$$
$$U_+^{(s)}(\zeta_0) = 0, \qquad U_+^{(s)}(\zeta\to\infty) = 0. \quad (13)$$

Решением [9] уравнения (12), как и следовало ожидать, является закон экспоненциального ослабления

$$U_+^{(ns)} = U_0\exp\Bigg[-\int\limits_{\zeta_0}^{\zeta} m(\chi)d\chi\Bigg]. \quad (14)$$

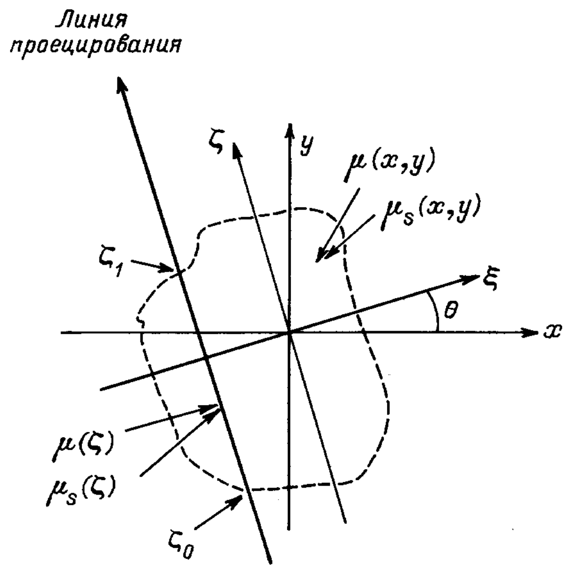

Рис. 2. Геометрическая схема измерений с параллельными проекциями в томографии.

Как известно [7], закон (14), или, что то же самое, уравнение (12), в задаче томографического восстановления двумерной функции $m(x,y)$ приводит к обратному преобразованию Радона. А именно, применяя обратное преобразование Радона $\Re^{-1}\{\cdot\}$ [7] к проекциям

$$p_+^{(ns)}(\xi,\theta) = -\ln\frac{U_+^{(ns)}(\zeta_1)}{U_0},$$

где θ — угол поворота вращающейся системы координат (ξ,ζ) относительно неподвижной системы координат (x,y), а $\zeta_1 = \zeta_1(\xi,\theta)$ — точка пересечения луча с границей среды (рис. 2), получим восстановленное изображение искомой функции $m(x,y)$. Однако в случае рассеивающей среды необходимо одновременно восстановить еще одну двумерную функцию $m_s(x,y)$. Одним из подходов [10] может служить постулирование пропорциональности как коэффициента поглощения $m(x,y)$, так и коэффициента рассеяния $m_s(x,y)$ плотности среды $n(x,y)$, что сводит две неизвестные функции к одной. Можно предложить более общий подход. Будем считать, что в каждом измерении регистрируется временно́е распределение прошедших фотонов. Тогда из него можно выделить часть, соответствующую баллистическим (нерассеянным) фотонам, описываемую уравнением (12). Тогда, используя обратное преобразование Радона, получим одну из искомых функций $m(x,y)$

$$m(x,y) = \Re^{-1}\{p_+^{(ns)}(\xi,\theta)\}. \tag{15}$$

Для нахождения второй неизвестной функции $m_s(x,y)$ поступим следующим образом. Учитывая, что решение $U_+(\zeta)$ уравнения (11) является неотрицательной функцией, его можно записать в экспоненциальной форме с некоторой функцией $M(\zeta)$

$$U_+(\zeta) = U_0\exp\left[-\int_{\zeta_0}^{\zeta} M(\chi)d\chi\right]. \tag{16}$$

Применяя к проекциям

$$p_+(\xi,\theta) = -\ln\frac{U_+(\zeta_1)}{U_0}$$

обратное преобразование Радона, получим введенную функцию $M(x,y)$

$$M(x,y) = \Re^{-1}\{p_+(\xi,\theta)\}. \tag{17}$$

Для нахождения связи между функциями $m(x,y)$, $m_s(x,y)$ и $M(x,y)$ подставим выражение (16) в уравнение (11)

$$m_s'(\zeta) = \frac{m_s^3(\zeta)}{m(\zeta)-M(\zeta)} + \frac{M^2(\zeta)-M'(\zeta)-m^2(\zeta)+m'(\zeta)}{m(\zeta)-M(\zeta)}m_s(\zeta). \tag{18}$$

Так как функция $m(x,y)$ уже известна, то для каждой линии проецирования можно найти $m_s(x,y)$, решая нелинейное дифференциальное уравнение (18) относительно $m_s(\zeta)$. Уравнение (18) является уравнением Бернулли, которое можно решить в квадратурах [11],

$$m_s(\zeta) = \frac{\exp\left(\int_{\zeta_0}^{\zeta} f_1(\chi)d\chi\right)}{\sqrt{C-2\int_{\zeta_0}^{\zeta} f_3(\chi)\exp\left(2\int_{\zeta_0}^{\chi} f_1(\chi_1)d\chi_1\right)d\chi}}, \tag{19}$$

где

$$f_1(\zeta) = \frac{M^2(\zeta)-M'(\zeta)-m^2(\zeta)+m'(\zeta)}{m(\zeta)-M(\zeta)}, \tag{20}$$

$$f_3(\zeta) = \frac{1}{m(\zeta)-M(\zeta)}, \tag{21}$$

$$C = \frac{1}{m^2(\zeta_0)-M^2(\zeta_0)}. \tag{22}$$

Для полного восстановления функции $m_s(x,y)$ достаточно вычислить значения $m_3(\zeta)$ по формуле (19) по всем линиям проецирования при каком-либо одном значении угла поворота θ. В частном случае при $m_s(x,y) = \beta m(x,y)$ получим уравнение

$$m'(\zeta) = \frac{(1-\beta^2)}{M(\zeta)}m_s^3(\zeta) - \frac{M^2(\zeta)-M'(\zeta)}{M(\zeta)}m(\zeta), \tag{23}$$

решением которого является $m(\zeta) = \left(\sqrt{1-\beta^2}\right)^{-1}M(\zeta)$, что согласуется с ранее полученным результатом [10].

Выводы

С целью упрощения задачи восстановления двух независимых функций, зависящих от трех (коэффициент поглощения) и семи (дифференциальные по углам коэффициент рассеяния излучения) переменных сформулирована нестационарная двухпотоковая модель переноса излучения в неоднородной рассеивающей среде, примененная к ситуации облучения такой среды тонким лучом импульсного лазера. Введены подлежащие томографической реконструкции и зависящие от математической модели характеристики рассеивающей среды, названные условно одномерными коэффициентами поглощения и рассеяния, но зависящие тем не менее от трех пространственных переменных. Показано, что при условии регистрации временнóго распределения прошедших фотонов возможно одновременное восстановление этих двух пространственных функций с помощью обратного преобразования Радона и дополнительного решения набора нелинейных дифференциальных уравнений на линиях проецирования. Приведено аналитическое решение в квадратурах этих дифференциальных уравнений. Таким образом, в данной работе, отталкиваясь от уравнения переноса излучения, предложен математический метод для реализации оптической томографии рассеивающих сред при их просвечивании тонкими лучами импульсного лазера.

Список литературы

[1] Proc. SPIE. Medical Optical Tomography: Functional Imaging and Monitoring / Ed. G.I.Muller et al. 1993. Vol. IS11.
[2] Proc. SPIE. Theoretical Study, Mathematical, Experimental Model for Photon Transport in Scattering Media and Tissue. 1994. Vol. 2326.
[3] *Левин Г.Г., Вишняков Г.Н.* Оптическая томография. М.: Радио и связь. 1989. 224 с.
[4] *Исимару А.* Распространение и рассеяние волн в случайнонеоднородных средах. М.: Мир, 1981. Т. 1. 280 с.
[5] *Любимов В.В.* // Опт. и спектр. 1994. Т. 76. Вып. 5. С. 814–815.
[6] *Белянцев А.М., Долин Л.С., Савельев В.А.* // Изв. вузов. Радиофизика. 1967. Т. 10. № 4. С. 489–497.
[7] *Наттерер Ф.* Математические аспекты компьютерной томографии. М.: Мир, 1990. 288 с.
[8] *Федоров Г.А., Терещенко С.А.* Вычислительная эмиссионная томография. М.: Энергоатомиздат, 1990. 184 с.
[9] *Ельшин М.И.* // ДАН СССР. 1938. Т. 18. № 3. С. 141–145.
[10] *Селищев С.В., Терещенко С.А.* // Письма в ЖТФ. 1995. Т. 21. Вып. 12. С. 24–27.
[11] *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976. 576 с.