

01;03;04

Индукционная цилиндрическая МГД машина в режиме идеального источника давления

© Ю.А. Половко, Е.П. Романова, Э.А. Тропп

Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН,
194021 Санкт-Петербург, Россия

(Поступило в Редакцию 4 апреля 1996 г.)

Исследованы причины возникновения специфического режима работы индукционных МГД машин, возникающего после потери устойчивости однородного течения. В результате применения оригинального метода исследования сингулярно возмущенных динамических систем в окрестности точки бифуркации построена асимптотика характерной величины давления для различных предельных случаев.

Введение

Уже в первых экспериментах [1], подтвердивших предсказанную в [2] потерю устойчивости течения в индукционных МГД машинах, было обнаружено характерное свойство возникающих вторичных течений: после потери устойчивости в широком диапазоне изменения расхода индукционная МГД машина работает как идеальный источник давления. На внешних характеристиках машины (зависимости развиваемого машиной напора от расхода протекающей через нее электропроводной жидкости) имеется характерное протяженное "плато" $p = p_c = \text{const}$, которому соответствует ступенчатый профиль скорости вторичных течений. Позднее это же явление было зафиксировано и в целом ряде других экспериментов, исследовавших цилиндрические и плоские МГД машины в режимах постоянного тока электропитания и постоянного напряжения сети. Этот эффект отмечался и при расчетах по одномерным струйным моделям как для насосов, так и для генераторов и МГД дросселей [3–5].

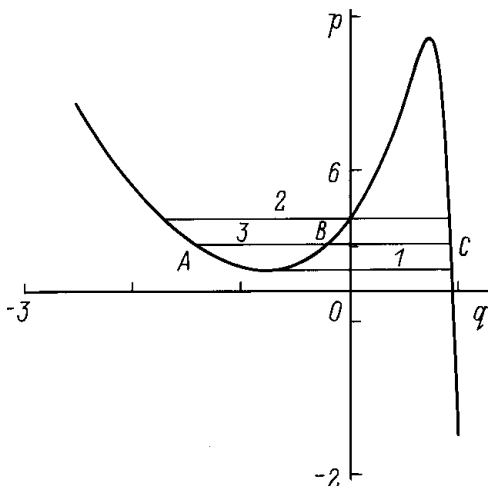


Рис. 1. Предложенные ранее способы построения отрезка внешней характеристики $p = p_c$ вторичных течений в МГД машине, соответствующего ее работе в режиме идеального источника давления (насосный режим).

Было предложено по крайней мере три различных способа построения горизонтального участка ответвившейся внешней характеристики (рис. 1): через точку минимума характеристики электродинамического приближения [6] (отрезок 1), через точку ее нулевого расхода [7] (отрезок 2) и в соответствии с моделью трехскоростного течения, когда, как показано на рис. 1, $AB = BC$ [8]. Однако, ни один из этих способов не имел достаточно строгого обоснования, и проблема объяснения причин данного явления и разработки метода априорной оценки величины характерного давления для МГД машины с заданными параметрами оставалась актуальной.

Решение этой проблемы имеет как теоретическое, так и прикладное значение, поскольку, с одной стороны, обсуждаемое явление может наблюдаться в широком классе МГД течений с определенной геометрией канала, а с другой стороны, МГД машины данного типа используются в контурах охлаждения реакторов на быстрых нейтронах, и важно знать, какие режимы течения могут возникнуть в таких, требующих высокой надежности устройствах.

В [9] впервые была предпринята попытка получения асимптотической формулы для оценки величины характерного давления при больших токах электропитания. Полученный результат основывался на решении нелинейной задачи на собственные значения, возникающей при построении внутреннего пограничного слоя вторичных течений. Использованные при этом недостаточно обоснованные дополнительные гипотезы относительно структуры погранслоя привели к выражению, не являющемуся, строго говоря, асимптотической формулой, но вполне пригодному для практических оценок.

В настоящей работе рассматривается математическая модель, учитывающая трение между струями жидкости, которая использовалась в [5] для исследования вторичных течений в МГД машинах. При этом вывод носит достаточно строгий характер, а его результатом является получение двух различных асимптотических формул.

Математическая модель

Для описания течений в индукционных МГД машинах в [5] использовалась следующая система нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \varkappa d^2 \mathbf{b}(\varphi) / d\varphi^2 &= [1 - i\varepsilon(1 - v(\varphi))] \mathbf{b}(\varphi) + \mathbf{i}, \\ \nu d^2 v(\varphi) / d\varphi^2 &= -\varepsilon^{-1} j^2 \operatorname{Re} \mathbf{b}(\varphi) \\ &+ v^2(\varphi) \operatorname{sign}(v(\varphi)) + p \end{aligned} \quad (1)$$

с периодическими граничными условиями $\mathbf{b}(0) = \mathbf{b}(2\pi)$, $\mathbf{b}'(0) = \mathbf{b}'(2\pi)$, $v(0) = v(2\pi)$, $v'(0) = v'(2\pi)$, где \mathbf{b} — относительное значение комплексной амплитуды индукции магнитного поля $\mathbf{B}(\varphi, t) = \mathbf{b}(\varphi) \exp(i(\alpha x - \omega t))$, v — относительное значение скорости течения, p — относительная величина развиваемого машиной давления, $\varkappa = 1/\alpha^2 R^2$, $\varepsilon = \mu_0 \sigma \omega \delta_h / \alpha^2 \delta_m$ — магнитное число Рейнольдса, j — безразмерный ток электропитания, ν — приведенная гидродинамическая вязкость, τ — длина полюсного деления, L — длина машины, δ_h — ширина гидравлического зазора, δ_m — ширина магнитного зазора между центральным и внешним магнитопроводами, σ — удельная проводимость рабочего тела, R — радиус машины, \mathbf{i} — мнимая единица.

В отличие от предшествующих работ [2–4, 9], использовавших так называемую одномерную струйную модель течения, система (1) учитывает трение между отдельными струями жидкости, в результате чего уравнение баланса давлений преобразуется из конечного в дифференциальное, а сама система повышает порядок с четвертого до шестого.

Будем исследовать поведение системы (1) для широких каналов, т.е. при малых значениях ν и \varkappa . При этом рассмотрим два разных пути предельного перехода в точку $(\nu, \varkappa) = (0, 0)$. В первом случае величина \varkappa считается пренебрежимо малой, отбрасываются члены системы (1), содержащие в качестве множителя эту величину, а затем находится асимптотика характерного значения давления p_c при $\nu \rightarrow 0$. Во втором, напротив, изначально пренебрегается трением между струями ($\nu = 0$), а затем изучаются свойства системы при малых \varkappa .

Обозначим $\operatorname{Re} \mathbf{b}(\varphi) = x_1$, $\operatorname{Im} \mathbf{b}(\varphi) = x_2$ и преобразуем исходную систему уравнений и граничные условия к виду

$$\begin{aligned} \varkappa x_1'' &= x_1 + \varepsilon x_2 - \varepsilon x_2 v = f_1(x_1, x_2, v, p, \varepsilon, j), \\ \varkappa x_2'' &= x_2 - \varepsilon x_1 + \varepsilon x_1 v + 1 = f_2(x_1, x_2, v, p, \varepsilon, j), \\ \nu v'' &= -\varepsilon^{-1} j^2 x_1 + v|v| + p = f_3(x_1, x_2, v, p, \varepsilon, j), \\ x_i(0) &= x_i(2\pi), \quad x_i'(0) = x_i'(2\pi), \quad i = 1 \dots 2, \\ v(0) &= v(2\pi), \quad v'(0) = v'(2\pi). \end{aligned} \quad (2)$$

Случай бесконечно широких каналов

В первом приближении при $\varkappa \rightarrow 0$ после пренебрежения членами, содержащими \varkappa , и последующего выражения x_1 и x_2 через v , задача (2) переписывается в виде

$$\begin{aligned} \nu v'' &= p - \frac{j^2(1-v)}{\varepsilon^2(1-v)^2 + 1} + v|v| \\ &= p - P(v) = F(v, p, \varepsilon, j), \\ v(0) &= v(2\pi), \quad v'(0) = v'(2\pi). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь за $P(v)$ обозначена внешняя характеристика МГД машины, соответствующая однородному течению. Система (3) принадлежит к классу автономных динамических систем второго порядка, подробно рассмотренных в [10]. При $p_1^i < p^i < p_2^i$, $i = 1, 2$ (рис. 2) она имеет три положения равновесия: v_1^i , v_0^i , v_2^i , одно из которых v_0^i — типа ”центр”, а два других — седловые точки. При некотором значении $p_c^i \in (p_1^i, p_2^i)$ в системе (3) возникает бифуркация — возникновение сепаратрис, соединяющих две седловые точки покоя (рис. 3). Как показано в [10], в окрестности точек p_c^i при малых ν решение (3) (профиль скорости) будет иметь вид, близкий к ступенчатому, а именно будет наблюдаться резкий скачок между значениями v_1^i и v_2^i . Положение этого скачка, т.е. протяженность каждой ступени, очень чувствительно к отклонению величины p от p_c . При $|p^i - p_c^i| \sim \exp(-1/\nu)$ соотношение между длинами ступеней, а значит, и величина расхода изменяются на величину порядка единицы [10]. Именно этот эффект и приводит к возникновению горизонтального участка на ответвляющихся внешних характеристиках. Само бифуркационное значение p_c^i определяется в насосном ($i = 1$) и генераторном ($i = 2$) режимах из системы трех нелинейных уравнений относительно переменных

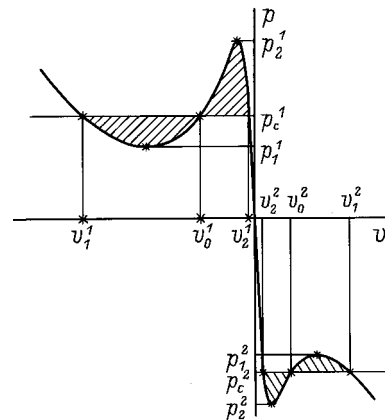


Рис. 2. К определению характерной величины давления p_c^i в насосном ($i = 1$) и генераторном ($i = 2$) режимах. Площади одинаково заштрихованных фигур равны.

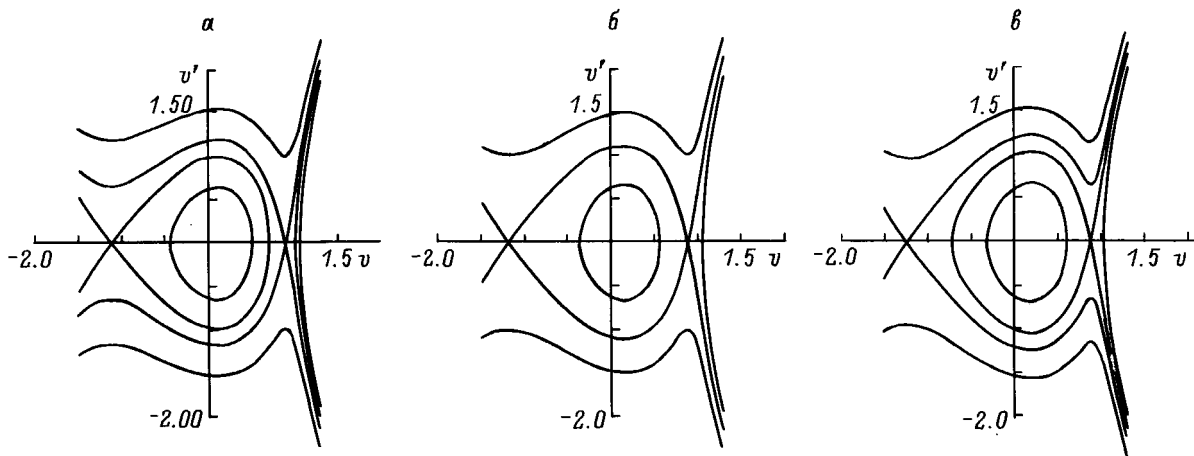


Рис. 3. Образование ячейки на фазовой плоскости системы (3) при $p = p_c$ (наносный режим): $a - p < p_c$; $b - p = p_c$; $v - p > p_c$; $j^2 = 40$; $\varepsilon = 4$.

p_c^i, v_1^i и v_2^i

$$\int_{v_1^i}^{v_2^i} F(v, p_c^i, \varepsilon, j) dv = \frac{|v|v^2}{3} + \frac{j^2 \ln(\sqrt{\varepsilon^2(1-v)^2 + 1})}{\varepsilon^2} + p_c^i v \Big|_{v=v_1^i}^{v=v_2^i} = 0,$$

$$F(v_k^i, p_c^i, \varepsilon, j) = p_c^i - \frac{j^2(1-v_k^i)}{\varepsilon^2(1-v_k^i)^2 + 1} + v_k^i |v_k^i| = p_c^i - P(v_k^i) = 0; \quad k = 1, 2. \quad (4)$$

Система (4) является аналитическим критерием существования ячейки (рис. 3, б) на фазовой плоскости (v, v') системы (3), ограниченной соединяющими седловые точки сепаратрисами. Условия (4) допускают простое геометрическое толкование. Они отражают равенство площадей заштрихованных фигур (рис. 2), ограниченных отрезком $p = p_c$ и внешней характеристикой однородного течения.

При больших значениях j можно получить асимптотику \hat{p}_c^i решения (4). Будем искать \hat{p}_c^i в виде ряда

$$\hat{p}_c^i = c_1^i j^m \ln^n j + c_2^i j^r \ln^l j \ln^s(\ln j) + \dots, \quad r \leq m.$$

Здесь $4/3 \leq m \leq 2$, причем при $m = 2$ $n \leq 0$, а при $m = 4/3$ $n \geq 0$, поскольку только в этом случае при $j \rightarrow \infty$ уравнение $F(v, p, \varepsilon, j) = 0$ может иметь три вещественных корня v_k^i ; $i = 1, 2$; $k = 0, 1, 2$. Тогда последние два уравнения системы (4) дают в главном приближении

$$v_1^i = (-1)^i \sqrt{|p_c^i|} + O(j^2/p_c^i),$$

$$v_2^i = 1 - p_c^i/j^2 + O((p_c^i)^3/j^6).$$

Заметим, что случаи $m = 2, n = 0$ и $m = 4/3, n = 0$, вообще говоря, должны быть рассмотрены

отдельно. Такое рассмотрение показывает, что они не реализуются. Подставляя эти пределы интегрирования в первое уравнение системы (4) и оставляя только члены максимального порядка по j с учетом априорной оценки для m в (5), получим следующее уравнение для определения главных членов асимптотики величины \hat{p}_c^i :

$$\frac{j^2 \ln |\hat{p}_c^i|}{2\varepsilon^2} - \frac{2}{3} |\hat{p}_c^i|^{\frac{3}{2}} + O(j^2) = 0,$$

откуда

$$\hat{p}_c^i = (-1)^{i+1} \left(\frac{j}{\varepsilon}\right)^{4/3} \ln^{2/3} j \left(1 + \frac{\ln(\ln j)}{3 \ln j} + O\left(\frac{1}{\ln j}\right)\right); \quad i = 1, 2. \quad (6)$$

На рис. 4 показана зависимость p_c^1/\hat{p}_c^1 от j для рассматриваемого случая, иллюстрирующая выход численного решения системы (4) на асимптотику (5).

В [10] построена асимптотика решений задач типа (3) при малых значениях параметра сингулярного возмущения ν в окрестности точки бифуркации p_c . Для системы (3) она будет иметь вид

$$v(\varphi) = \begin{cases} v_j^i, & 0 \leq \varphi \leq \frac{2\pi\theta_j}{1+\theta_j}, \\ v_k^i, & \frac{2\pi\theta_j}{1+\theta_j} < \varphi < 2\pi, \end{cases}$$

где

$$i = 1, 2; \quad (j, k) = \begin{cases} (1, 2) & p \geq p_c, \\ (2, 1) & p < p_c. \end{cases}$$

Конкретное значение константы θ_j ($0 < \theta_j \leq \lambda_j/\lambda_k$) определяется связью между параметрами ν и $|p - p_c|$ при их стремлении к нулю [10]. В частности, при $p \equiv p_c$ и $\nu \rightarrow 0$ $\theta_j = \lambda_j/\lambda_k$, где λ_j и λ_k — абсолютные величины характеристических чисел уравнения (3), линеаризованного в окрестности точек v_j и v_k , т. е.

$$\lambda_m = \frac{1}{\sqrt{\nu}} \sqrt{2|v_m| + \frac{j^2(1 - \varepsilon^2(1 - v_m)^2)}{(\varepsilon^2(1 - v_m)^2 + 1)^2}}; \quad m = j, k.$$

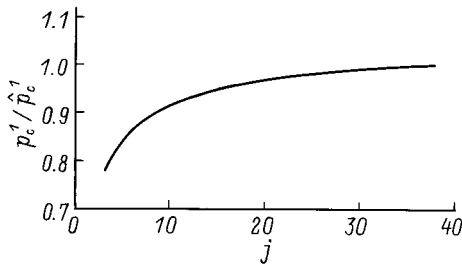


Рис. 4. Выход численного решения системы (4) на асимптотику (5), $\varepsilon = 4$.

Тогда выражение для безразмерного расхода в точках p_c^i в первом приближении при $\nu \rightarrow 0$ имеет вид

$$q^i(p_c^i) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(\varphi) d\varphi = \frac{v_1^i \lambda_2^i + v_2^i \lambda_1^i}{\lambda_1^i + \lambda_2^i}.$$

Пользуясь методикой [10], можно также оценить величину производной dp^i/dq на "плато" внешней характеристики машины

$$\frac{dp^i}{dq} = \frac{R^i}{\nu} \exp\left(-\frac{\Lambda^i \delta}{\nu}\right) + o\left(\frac{\exp\left(-\frac{\Lambda^i \delta}{\nu}\right)}{\nu}\right), \quad (7)$$

где

$$i = 1, 2; \quad 0 < \delta \leq 1, \quad \Lambda^i = \frac{\lambda_1^i \lambda_2^i}{\lambda_1^i + \lambda_2^i},$$

R^i — некоторая константа.

Приведенная оценка полностью объясняет причины возможной работы индукционных МГД машин в режиме идеального источника давления. Действительно, согласно (7), в окрестности точки $p = p_c$ наклон внешней характеристики — экспоненциально малая величина в широком диапазоне изменения расхода q .

Отсутствие взаимодействия между струями

Будем теперь считать первым по порядку предельный переход $\nu \rightarrow 0$. Тогда в главном приближении получаем следующую задачу:

$$\begin{aligned} \kappa x_1'' &= x_1 + \varepsilon x_2 - \varepsilon x_2 |j^2 x_1 / \varepsilon - p|^{0.5} \text{sign}(j^2 x_1 / \varepsilon - p) \\ &= f_1(x_1, x_2, \nu, p, \varepsilon, j), \\ \kappa x_2'' &= x_2 - \varepsilon x_1 + \varepsilon x_1 |j^2 x_1 / \varepsilon - p|^{0.5} \text{sign}(j^2 x_1 / \varepsilon - p) + 1 \\ &= f_2(x_1, x_2, \nu, p, \varepsilon, j), \\ x_i(0) &= x_i(2\pi), \quad x_i'(0) = x_i'(2\pi), \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь "бифуркационный сценарий" разворачивается уже не на плоскости, а в четырехмерном фазовом пространстве. Тем не менее, система (8) в соответствующих

диапазонах изменения p также имеет три точки покоя (x_{1k}^i, x_{2k}^i) , $k = 0, 1, 2$; $i = 1, 2$, две из которых — гиперболические ($k = 1, 2$), при $p = p_c^i$ соединены гетероклинической траекторией. По-прежнему будем искать асимптотику величины p_c в форме (5) с теми же ограничениями на значения m и n . В общем случае здесь уже не удастся записать нелинейную систему, аналогичную (4), однако при больших значениях j все-таки можно получить асимптотику для величины p_c^i . Структура системы такова, что при $j \rightarrow \infty$ искомая гетероклиническая траектория в главном приближении расположена на поверхности $f_1(x_1, x_2, p, \varepsilon, j) = 0$. Это можно показать, сделав нелинейную замену переменных и перейдя от переменной x_1 к $\Phi = f_1(x_1, x_2, p, \varepsilon, j)$. После такой замены первое уравнение системы (8) в главном приближении при $j \rightarrow \infty$ примет вид $\Phi = 0$ везде, за исключением малой окрестности прямой $x_2 = 0$ радиусом порядка $1/j$. Тогда гетероклиническая траектория при $j \rightarrow \infty$ приближенно описывается системой второго порядка

$$\begin{aligned} \kappa x_2'' &= x_2 - \varepsilon x_1(x_2) + \varepsilon x_1(x_2) |j^2 x_1(x_2) / \varepsilon - p|^{0.5} \\ &\quad \times \text{sign}(j^2 x_1 / \varepsilon - p) + 1 = F(x_2, p, \varepsilon, j), \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$x_1 = \varepsilon x_2$$

$$\times \begin{cases} j^2 x_2 / 2 + \sqrt{j^4 x_2^2 / 4 - p - j^2 x_2 - 1}, & x_2 \leq -p / j^2, \\ -[j^2 x_2 / 2 + \sqrt{j^4 x_2^2 / 4 + p + j^2 x_2 + 1}], & x_2 > -p / j^2 \end{cases}$$

для насосного режима и

$$x_1 = -\varepsilon x_2 \left[j^2 x_2 / 2 + \sqrt{j^4 x_2^2 / 4 + p + j^2 x_2 + 1} \right]$$

для генераторного. Эта система оказывается принадлежащей к тому же исследованному в [10] классу, что и (3). Для нее условие существования ячейки на фазовой плоскости — система уравнений для определения p_c , аналогичная (4), имеет вид

$$\begin{aligned} \int_{x_{21}^i}^{x_{22}^i} F(x_2, p_c^i, \varepsilon, j) dx_2 &= 0; \quad F(x_{2k}^i) = 0, \\ k &= 1, 2; \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (10)$$

Строго говоря, поскольку в главном приближении один из корней попадает в малую окрестность нуля ($x_{22}^i = -1/\varepsilon^2 p$), то вместо x_{22}^i на верхнем пределе интеграла в (10) нужно поставить c/j , где c — некоторая константа. Это вызвано тем, что после попадания в окрестность $x_2 = 0$ радиуса порядка $1/j$ движение по гетероклинической траектории уже не будет описываться системой (9). Однако, это уточнение не влияет на окончательный результат — значение p_c^i в главном приближении.

Для анализа удобно переписать систему (10) в терминах скорости, используя справедливые для рассматриваемого случая соотношения

$$x_1 = \frac{(p + v|v|)\varepsilon}{j^2}; \quad x_2 = \frac{p + v|v|}{(v - 1)j^2}.$$

После замены переменных будем иметь

$$\int_{v_1^i}^{v_2^i} (P(v) - p) \frac{\varepsilon^2(v - 1)^2 + 1}{j^4(1 - v)^3} [(v - 2)|v| - p] dv = 0. \quad (11)$$

Далее, как и для рассмотренного выше случая бесконечно широких каналов, подставим (5) в (11) и приравняем нулю члены максимального порядка по j . После соответствующих выкладок при $j \rightarrow \infty$ для насосного и генераторного режимов получим

$$p_c^i = (-1)^{i+1} \frac{j^2}{\sqrt{2}\varepsilon\sqrt{\ln j}} + o\left(\frac{j^2}{\sqrt{\ln j}}\right). \quad (12)$$

Таким образом, получены две асимптотические формулы, пригодные для оценки характерной величины давления, создаваемого МГД машиной после потери устойчивости однородного течения при больших токах электропитания: формула (6), справедливая для широких каналов, и (12), пригодная в случае малой приведенной вязкости. Следует подчеркнуть, что проведенный анализ раскрывает главную причину появления горизонтального "плато" на ответвляющихся внешних характеристиках МГД машин — малость величин \varkappa и ν . Структура исходной системы (2) такова, что единственным дополнительным требованием для возможности возникновения режима идеального источника давления является значение параметра $\varepsilon > 1$. Если это условие выполнено, то при достаточно малых \varkappa и ν будут наблюдаться все рассмотренные выше эффекты, связанные с образованием вторичных течений.

Список литературы

- [1] Клавиня А.П., Лиелаусис О.А., Риекстиньш В.В. // VIII Рижское совещание по магнитной гидродинамике. Тез. докл. Рига, 1975. Т. 2. С. 79–81.
- [2] Гайлитис А.К., Лиелаусис О.А. // Магнитная гидродинамика. 1975. № 1. С. 106–111.
- [3] Половко Ю.А., Тропп Э.А. // Магнитная гидродинамика. 1986. № 4. С. 106–113.
- [4] Половко Ю.А. // Магнитная гидродинамика. 1989. № 3. С. 81–88.
- [5] Половко Ю.А., Романова Е.П., Тропп Э.А. // ЖТФ. 1996. Т. 6. Вып. 4. С. 36–44.
- [6] Валдмане Р.А., Кириллов И.Р., Огородников А.П. и др. // Магнитная гидродинамика. 1982. № 3. С. 98–104.
- [7] Кришберг Р.Р. // Магнитная гидродинамика. 1981. № 2. С. 140–141.
- [8] Лиелаусис О.А., Лиелттер Я.Я., Пукус М.В. // X Рижское совещание по магнитной гидродинамике. Тез. докл. Рига, 1981. Т. 2. С. 16–17.

- [9] Polovko Yu.A., Tropp E.A. // Proc. Intern. Conf. on Energy Transfer in Magneto-Hydrodynamic Flows. Pami. Cadarache (France), 1991. P. 73–78.
- [10] Бакалейников Л.А., Половко Ю.А. // Дифференциальные уравнения. 1989. Т. 25. № 5. С. 903–906.