01

О разложении произвольной функции по произведениям сферических функций

© И.П. Скальская, И.Н. Златина, И.Б. Суслова

Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН,
194021 Санкт-Петербург, Россия

(Поступило в Редакцию 22 марта 1996 г.)

Показана формула разложения произвольной функции, определенной на промежутке $(0, 1)$, в ряд по произведениям сферических функций Лежандра первого и второго рода. Приведены примеры разложений данного типа.

В работе [1] показано, что функция, определенная на промежутке $(0, 1)$, может быть разложена в ряд по квадратам полиномов Лежандра

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\int\limits_x^1 \frac{f(y)dy}{\sqrt{1-y^2}} = 2\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)P_n^2(x)\int\limits_0^1 f(y)P_n(y)Q_n(y)dy, \quad (1)$$

$P_n(x)$ и $Q_n(x)$ — сферические функции Лежандра первого и второго рода.

Установлены условия, достаточные для справедливости данного разложения, и рассмотрен ряд примеров частного вида, представляющих интерес для теории специальных функций. Цель настоящей работы заключается в исследовании разложения, которое в известной мере можно рассматривать как симметричное по отношению к (1), а именно

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\int\limits_0^x \frac{f(y)dy}{\sqrt{1-y^2}} = 2\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)P_n(x)Q_n(x)\int\limits_0^1 f(y)P_n^2(y)dy. \quad (2)$$

В ходе исследования используются некоторые результаты, установленные в работе [1]. Для доказательства равенства (2) предположим, что $f(x) \in L(0, 1)$, и рассмотрим сумму

$$F_N(x) = 2\sum_{n=0}^{N}(2n+1)P_n(x)Q_n(x)\int\limits_0^1 f(y)P_n^2(y)dy, \quad (3)$$

$$0 < x < 1, \quad N = 0, 1, 2, \dots .$$

Так как $|f(y)P_n^2(y)| \leqslant |f(y)|$ для $0 < y < 1$, то интеграл в (3) абсолютно сходится и выражение (3) имеет смысл. Рассматриваемая сумма может быть записана

$$F_N(x) = \int\limits_0^1 f(y)S_n(x, y)dy, \quad (4)$$

где

$$S_N(x, y) = 2\sum_{n=0}^{N}(2n+1)P_n(x)Q_n(x)P_n^2(y)$$

$$0 < x < 1. \quad (5)$$

Согласно [1, формула (32)], сумма $S_N(x, y)$ сходится при $N \to \infty$ к конечному пределу

$$\lim_{N\to\infty} S_N(x, y) = 2\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)P_n(x)Q_n(x)P_n^2(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}}, & y < x, \\ 0, & y > x. \end{cases} \quad (6)$$

Если предположить возможность предельного перехода под знаком интеграла в равенстве (4), то получим

$$\lim_{N\to\infty} F_N(x) = \int\limits_0^1 f(y)\lim_{N\to\infty} S_N(x, y)dy = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\int\limits_0^x \frac{f(y)dy}{\sqrt{1-y^2}}$$

или, по определению (3),

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\int\limits_0^x \frac{f(y)dy}{\sqrt{1-y^2}} = 2\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)P_n(x)Q_n(x)\int\limits_0^1 f(y)P_n^2(y)dy. \quad (7)$$

Таким образом, для завершения доказательства теоремы достаточно обосновать законность упомянутого предельного перехода. С этой целью воспользуемся асимптотическими формулами для сферических функций, полученными в работе [1],

$$P_n(\cos\theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi(n+1/2)\sin\theta}}\sin\Big[(n+1/2)\theta + \pi/4\Big] + \frac{O(1)}{(n+1/2)^{9/10}(\sin\theta)^{9/10}},$$

$$Q_n(\cos\theta) = \sqrt{\frac{\pi}{2(n+1/2)\sin\theta}}\cos\Big[(n+1/2)\theta+\pi/4\Big] + \frac{O(1)}{(n+1/2)^{9/10}(\sin\theta)^{9/10}}\ln\frac{2}{1-\cos\theta}, \quad (8)$$

$0 < \theta \leqslant \pi/2$, $n = 0,\ 1,\ 2, \ldots$; $O(1)$ не зависит от n и θ.

Составим произведение

$$\begin{aligned}
&4(n+1/2)P_n(\cos\theta)Q_n(\cos\theta)P_n^2(\cos\phi) = 4(n+1/2)\\
&\times\left\{\frac{\cos 2(n+1/2)\theta}{2(n+1/2)\sin\theta} + \frac{O(1)}{(n+1/2)^{7/5}(\sin\theta)^{9/5}}\ln\frac{2}{1-\cos\theta}\right\}\\
&\times\left\{\frac{1+\sin 2(n+1/2)\phi}{\pi(n+1/2)\sin\phi} + \frac{O(1)}{(n+1/2)^{7/5}(\sin\phi)^{9/5}}\right\}\\
&= 4(n+1/2)\times\left\{\frac{\cos 2(n+1/2)\theta}{2\pi(n+1/2)^2\sin\theta\sin\phi} + \frac{2(n+1/2)\phi\cos 2(n+1/2)\theta}{2\pi(n+1/2)^2\sin\theta\sin\phi}\right.\\
&+ \frac{O(1)\Big[1+\sin 2(n+1/2)\phi\Big]}{\pi(n+1/2)^{12/5}(\sin\theta)^{9/5}\sin\phi}\ln\frac{2}{1-\cos\theta} + \frac{O(1)\cos 2(n+1/2)\theta}{2(n+1/2)^{12/5}\sin\theta(\sin\phi)^{9/5}}\\
&\left.+ \frac{O(1)}{(n+1/2)^{14/5}(\sin\theta)^{9/5}(\sin\phi)^{9/5}}\ln\frac{2}{1-\cos\theta}\right\}\\
&= \frac{2\cos 2(n+1/2)\theta}{\pi(n+1/2)\sin\theta\sin\phi} + \frac{\sin 2(n+1/2)(\phi+\theta)+\sin 2(n+1/2)(\phi-\theta)}{\pi(n+1/2)\sin\theta\sin\phi}\\
&+ \frac{O(1)\Big[1+\sin 2(n+1/2)\phi\Big]}{(n+1/2)^{7/5}(\sin\theta)^{9/5}\sin\phi}\ln\frac{2}{1-\cos\theta} + \frac{O(1)\cos 2(n+1/2)\theta}{(n+1/2)^{7/5}\sin\theta(\sin\phi)^{9/5}}\\
&+ \frac{O(1)}{(n+1/2)^{9/5}(\sin\theta)^{9/5}(\sin\phi)^{9/5}}\ln\frac{2}{1-\cos\theta}\\
&= \frac{2\cos 2(n+1/2)\theta}{\pi(n+1/2)\sin\theta\sin\phi} + \frac{\sin 2(n+1/2)(\phi+\theta)+\sin 2(n+1/2)(\phi-\theta)}{\pi(n+1/2)\sin\theta\sin\phi}\\
&+ \frac{O(1)}{(n+1/2)^{7/5}(\sin\theta)^{9/5}(\sin\phi)^{9/5}}\\
&\times\left\{(\sin\phi)^{4/5}\Big[1+\sin 2(n+1/2)\phi\Big]\ln\frac{2}{1-\cos\theta}\right.\\
&\left.+ (\sin\theta)^{4/5}\cos 2(n+1/2)\theta + \frac{1}{(n+1/2)^{2/5}}\ln\frac{2}{1-\cos\theta}\right\}\\
&= \frac{2\cos 2(n+1/2)\theta}{\pi(n+1/2)\sin\theta\sin\phi} + \frac{\sin 2(n+1/2)(\phi+\theta)+\sin 2(n+1/2)(\phi-\theta)}{\pi(n+1/2)\sin\theta\sin\phi}\\
&+ \frac{O(1)}{(n+1/2)^{7/5}(\sin\theta)^{9/5}(\sin\phi)^{9/5}}, \qquad (9)
\end{aligned}$$

$x = \cos\theta$, $0 \leqslant x < 1$, $0 < \theta \leqslant \pi/2$, θ — фиксировано,

$$\ln\frac{2}{1-\cos\theta} = O(1).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
&4(n+1/2)P_n(\cos\theta)Q_n(\cos\theta)P_n^2(\cos\phi)\\
&= \frac{2\cos 2(n+1/2)\theta}{\pi(n+1/2)\sin\theta\sin\phi} + \frac{\sin 2(n+1/2)(\phi+\theta)+\sin 2(n+1/2)(\phi-\theta)}{\pi(n+1/2)\sin\theta\sin\phi}\\
&+ \frac{O(1)}{(n+1/2)^{7/5}(\sin\theta)^{9/5}(\sin\phi)^{9/5}}, \qquad (10)
\end{aligned}$$

$n = 0,\ 1,\ 2, \ldots$; $0 < \theta \leqslant \pi/2$; $0 < \phi \leqslant \pi/2$; символ O не зависит от θ, ϕ и n.

Рассмотрим суммы вида ($x = \cos\theta$, $y = \cos\phi$)

$$S_N(x,\ y) = 2\sum_{n=0}^{N}(2n+1)P_n(\cos\theta)Q_n(\cos\theta)P_n^2(\cos\phi). \qquad (11)$$

Из (10) следует

$$\begin{aligned}
S_N(x,\ y) &= \frac{4}{\pi\sin\theta\sin\phi}\sum_{n=0}^{N}\frac{\cos(2n+1)\theta}{2n+1} + \frac{2}{\pi\sin\theta\sin\phi}\sum_{n=0}^{N}\frac{\sin(2n+1)(\phi+\theta)}{2n+1}\\
&+ \frac{2}{\pi\sin\theta\sin\phi}\sum_{n=0}^{N}\frac{\sin(2n+1)(\phi-\theta)}{2n+1} + \frac{O(1)}{(\sin\theta)^{9/5}(\sin\phi)^{9/5}}\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{(2n+1)^{7/5}}
\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
S_N(x,\ y) &= \frac{4}{\pi\sin\theta\sin\phi}\sum_{n=0}^{N}\frac{\cos(2n+1)\theta}{2n+1}\\
&+ \frac{2}{\pi\sin\theta\sin\phi}\sum_{n=0}^{N}\frac{\sin(2n+1)(\phi+\theta)}{2n+1}
\end{aligned}$$

$$+\frac{2}{\pi\sin\theta\sin\phi}\sum_{n=0}^{N}\frac{\sin(2n+1)(\phi-\theta)}{2n+1}$$
$$+\frac{O(1)}{(\sin\theta)^{9/5}(\sin\phi)^{9/5}}, \qquad (12)$$

$0<\theta\leqslant\pi/2$, $0<\phi\leqslant\pi/2$.

Из ранее полученных оценок

$$\sum_{n=0}^{N}\frac{\cos(2n+1)\theta}{2n+1}=O(1)\ln\frac{2}{1-\cos\theta}=O(1), \qquad (13)$$

$$\sum_{n=0}^{N}\frac{\sin(2n+1)(\phi+\theta)}{2n+1}=O(1)$$
$$\text{для всех}\quad 0<\phi\leqslant\pi/2, \qquad (14)$$

$$\sum_{n=0}^{N}\frac{\sin(2n+1)(\phi-\theta)}{2n+1}=O(1)$$
$$\text{для всех}\quad 0<\phi\leqslant\pi/2, \qquad (15)$$

Из (12)–(15) следует

$$S_N(x,y)=\frac{4}{\pi\sin\theta\sin\phi}O(1)+\frac{O(1)}{\sin\theta\sin\phi}+\frac{O(1)}{\sin\theta\sin\phi}$$
$$+\frac{O(1)}{(\sin\theta)^{9/5}(\sin\phi)^{9/5}}=\frac{O(1)}{\sin\phi}+\frac{O(1)}{(\sin\phi)^{9/5}}$$
$$=\frac{O(1)}{(\sin\phi)^{9/5}}\left[1+(\sin\phi)^{4/5}\right]=\frac{O(1)}{(\sin\phi)^{9/5}},$$
$$0<\phi\leqslant\pi/2 \qquad (16)$$

или

$$S_N(x,y)=\frac{O(1)}{(1-y)^{9/10}},\quad 0\leqslant y<1, \qquad (17)$$

x — фиксированное число, $0<x<1$.

Если предположить, что $f(y)(1-y)^{-9/10}\in L(0,1)$, то последовательность $f(y)S_N(x,y)$, $N=0,1,2,\dots$ будет мажорированной и предельный переход под знаком интеграла законен. Ранее наложенное условие $f(y)\in L(0,1)$, при этом выполняется. Таким образом, доказана следующая теорема. Пусть $f(x)(1-x)^{-9/10}\in L(0,1)$, тогда

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\int_0^x\frac{f(y)dy}{\sqrt{1-y^2}}$$
$$=2\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\underset{0<x<1}{P_n(x)Q_n(x)}\int_0^1 f(y)P_n^2(y)dy. \qquad (18)$$

Примерами разложения данного типа могут служить

$$x=-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{P_n(x)Q_n(x)}{(2n-1)(2n+3)},\quad 0<x<1, \qquad (19)$$

$$x^3=-2\cdot3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n^2+2n-3}{(2n-1)(2n-3)(2n+3)(2n+5)}P_n(x)Q_n(x),$$
$$0<x<1, \qquad (20)$$

$$\underset{0<x<1}{xF(-m,1,3/2,x^2)}$$
$$=\sum_{n=0}^{N}\frac{2n+1}{n+m+3/2}\cdot\frac{(-m-1/2)_n}{(m+3/2)_n}P_n(x)Q_n(x). \qquad (21)$$

Справедлива и более общая формула

$$xF(1/2-\nu,1,3/2,x^2)$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{n+\nu+1}\,\frac{(-\nu)_n}{(1+\nu)_n}P_n(x)Q_n(x), \qquad (22)$$

$\nu>-1$, $0<x<1$; $F(a,b,c,x)$ — гипергеометрическая функция;

$$1=-\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1){}_3F_2(-n,n+1,1/2;1,2,1)P_n(x)Q_n(x),$$
$$0<x<1, \qquad (23)$$

${}_3F_2(a,b,c;e,f,x)$ — обобщенная гипергеометрическая функция,

$$x^2=1/2-1/\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(4n+1)\Gamma^2(n+1/2)}{(2n-1)(2n+2)(n!)^2}P_{2n}(x)Q_{2n}(x),$$
$$0<x<1 \qquad (24)$$

$$-\ln(1-x^2)=P_0(x)Q_0(x)+1/\pi\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4n+3}{(n+1)(2n+1)}$$
$$\times{}_3F_2(n+1,-n-1/2,1/2;1,3/2,1)$$
$$\times P_{2n+1}(x)Q_{2n+1}(x),\quad 0<x<1, \qquad (25)$$

$$\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}=2\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)Q_n(x),\quad 0<x<1, \qquad (26)$$

$$K(x)=2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nP_n(x)Q_n(x),\quad 0<x<1, \qquad (27)$$

$$E(x)=4\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n^2+2n-1}{(2n-1)(2n+3)}P_n(x)Q_n(x),$$
$$0<x<1, \qquad (28)$$

$K(x)$, $E(x)$ — полные эллиптические интегралы 1-го и 2-го родов.

Справедлива и более общая формула

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{\Gamma(1+\nu)}{\Gamma(3/2+\nu)}x^{2\nu+1}F(1/2,1+\nu,3/2+\nu,x^2)$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{n+\nu+1}\,\frac{(-\nu)_n}{(1+\nu)_n}P_n(x)Q_n(x),$$
$$\nu>-1,\quad 0<x<1. \qquad (29)$$

При вычислении коэффициентов этих разложений используется интегральное представление [1, формула (22)]

$$P_n^2(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{2x^2-1}^{1} \frac{P_n(t)dt}{\sqrt{(t-2x^2+1)(1-t)}},$$

$$-1 < x < 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \qquad (30)$$

а также известные разложения функции по полиномам Лежандра. Некоторые из формул остаются справедливыми и для концов рассматриваемого интервала.

Список литературы

[1] *Лебедев Н.Н., Скальская И.П.* // Дифференциальные уравнения. 1992. Т. 28. N 2. С. 262–270.