

01;12

Динамика скин-эффекта при разряде емкостного накопителя через прямолинейные шины

© М.А. Шакиров, Р.П. Кияткин

Санкт-Петербургский государственный технический университет,
195251 Санкт-Петербург, Россия

(Поступило в Редакцию 18 декабря 1995 г. В окончательной редакции 18 апреля 1996 г.)

Рассматриваются особенности проявления скин-эффекта и общий метод его исследования при переходных процессах в системах с прямолинейными шинами, формы поперечных сечений которых произвольны. Метод позволяет непосредственно наблюдать динамику изменения плотности токов в шинах при любой степени проявления скин-эффекта в двумерных задачах.

Введение

Развитие техники сильных импульсных магнитных полей ставит задачу создания эффективных методов расчета переходных процессов в электромагнитных полях с учетом поверхностного эффекта (скин-эффекта) в массивных проводниках, в том числе в прямолинейных токопроводах. Аналитическое решение этой проблемы (как правило, на основе преобразования Лапласа) возможно лишь для одномерных систем с простейшими формами сечений прямолинейных шинопроводов: с круглыми и кольцевыми сечениями или сечениями в виде полуплоскости [1–4]. Применение методов конечных элементов приводит к большому расходу памяти ЭВМ (так как дискретизации подвергаются не только сечения проводников, но и окружающие их диэлектрики), а аппарат интегральных уравнений находится в стадии разработок и требует новых исследований [5]. Сказанное свидетельствует о незавершенности общей методологии анализа явления скин-эффекта и эффекта близости в импульсных системах.

В настоящей работе рассматривается эффективный и удобный для применения метод анализа динамики поверхностного эффекта в прямолинейных токопроводах с шинами и экранами произвольного поперечного сечения, основанный на применении приближенных схем замещения массивных проводников, получаемых путем расщепления шин и экранов на элементарные проводники при следующих обычно принимаемых допущениях: 1) поля являются плоскопараллельными, двумерными; 2) токи смещения в шинах и экранах пренебрежимо малы по сравнению с токами проводимости, т.е. переходные процессы в токопроводах квазистационарны; 3) магнитные проницаемости шин и экранов равны магнитной постоянной μ_0 , удельные электропроводности проводящих материалов γ являются функциями только координат; 4) число шин и экранов не ограничено, формы их сечений произвольны.

Схемы модели массивных проводников

Рассмотрим построение предлагаемых схем замещения на примере системы (рис. 1, а), состоящей из источника питания $e(t)$ и емкостного накопителя C , включаемых на R, L -нагрузку через шины A, B при наличии экрана S . Шины и экран имеют одинаковую длину l . Разобьем шины и экран на элементарные проводники (ЭП) с весьма малыми сечениями S_k , полагая, что ток $i_k(t)$ в пределах k -го сечения распределяется равномерно и его плотность равна

$$\delta_k(t) = \frac{i_k(t)}{S_k}. \quad (1)$$

Очевидно, чем меньше значения S_k , тем меньше ошибка допущения (1). Активное сопротивление k -го ЭП

$$R_k = \frac{l}{\gamma_k S_k}, \quad (2)$$

где γ_k — удельная электропроводность k -го ЭП.

Из общих физических соображений следует, что если бы система была такой, что в ней заранее можно предугадать нити прямых и обратных токов в шинах и экранах, то ЭП можно было бы попарно объединить в элементарные витки (ЭВ). В этом случае анализ поля свелся бы к расчету переходных процессов в достаточно простой схемной модели с взаимоиндуктивными связями между всеми ЭВ. Трудность состоит в том, что в общем случае таких нитей не существует.

Ключевой является идея о представлении шин и экранов совокупностью ЭВ с одним общим обратным (опорным) ЭА для каждой электрически изолированной подсистемы. В рассматриваемой на рис. 1, а системе имеются две электрически несвязанные подсистемы. Опорный ЭП в подсистеме из шин A, B обозначен O_B . Опорный ЭП экрана S обозначен O_S . Если число ЭП в A -шине равно n_A , а в B -шине — n_B , то число ЭВ в первой подсистеме будет $n_A + (n_B - 1)$. Число ЭВ экрана

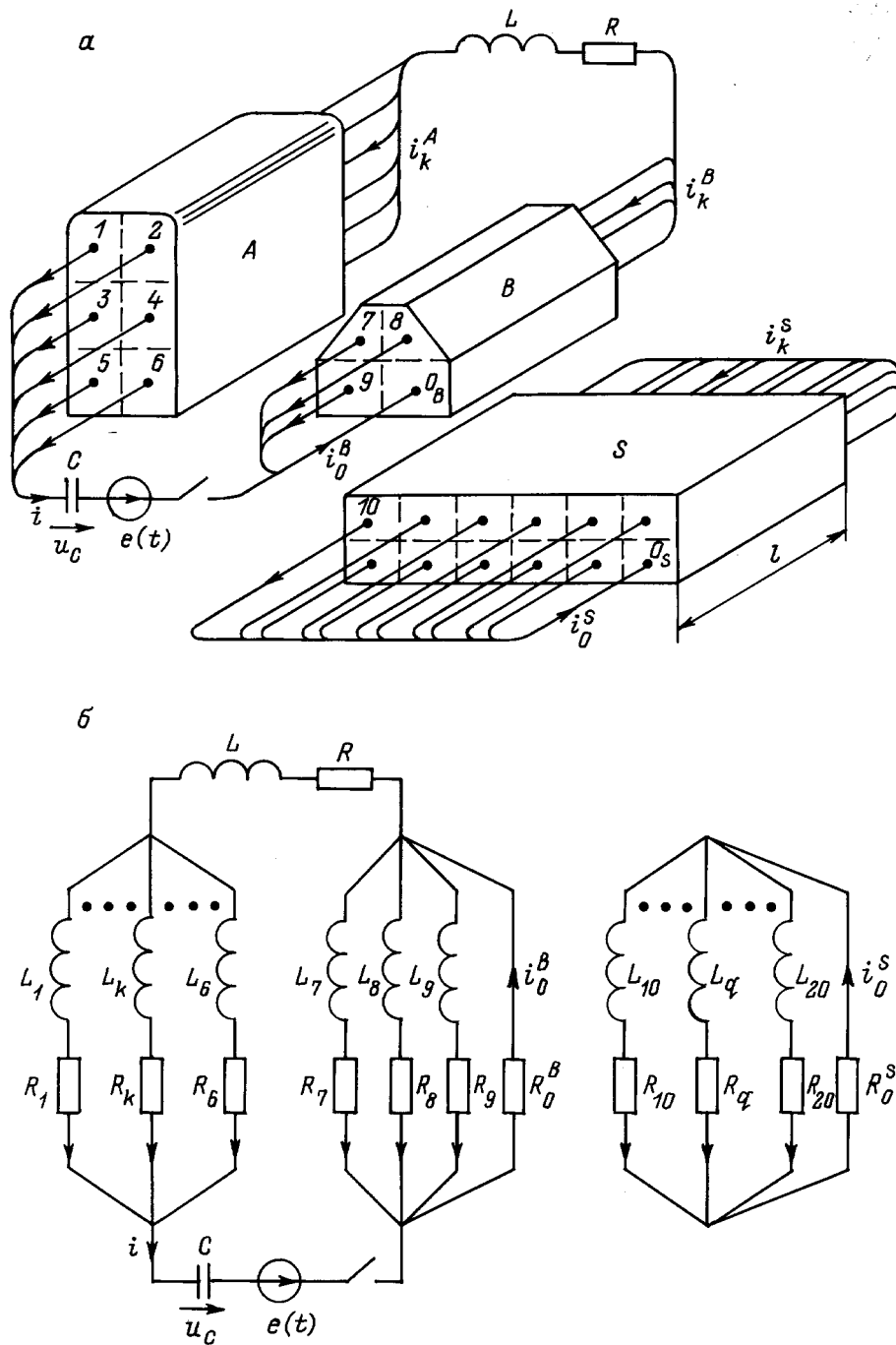


Рис. 1. Дискретизация шин и экрана токопровода (а) и его схема замещения (б) для анализа переходных процессов.

равно $n_S - 1$, где n_S — число ЭП экрана. Между всеми ЭВ имеют место взаимоиндуктивные связи. Общее число ЭВ приближенной модели системы (рис. 1, а) равно

$$n = n_A + n_B + n_S - 2. \quad (3)$$

На рис. 1, а $n_A = 6$, $n_B = 4$ и $n_S = 12$, следовательно $n = 20$. Нумерация ЭВ совпадает с нумерацией ЭП. Совокупности ЭВ соответствует схема замещения (рис. 1, б), все ветви которой индуктивно связаны.

Для записи уравнений схемной модели (рис. 1, б) введем следующие обозначения: \mathbf{i}_A — столбец (размером n_A) токов ЭП А-шины; \mathbf{i}_B — столбец $(n_B - 1)$ токов ЭП В-шины; \mathbf{i}_S — столбец $(n_S - 1)$ токов ЭП экрана S; \mathbf{R}_A — диагональная $(n_A \cdot n_A)$ матрица активных сопротивлений всех ЭП А-шины; \mathbf{R}_B — диагональная $((n_B - 1) \cdot (n_B - 1))$ матрица активных сопротивлений всех ЭП В-шины, кроме опорного; \mathbf{R}_S — диагональная $((n_S - 1) \cdot (n_S - 1))$ матрица активных сопротивлений всех ЭП экрана, кроме

опорного; \mathbf{R}_0^B — столбец (размером $n_A + n_B - 1$), все элементы которого равны сопротивлению R_0^B опорного ЭП в B -шине; \mathbf{R}_0^S — столбец ($n_S - 1$), все элементы которого равны сопротивлению R_0^S опорного ЭП экрана; $\mathbf{1}$ — столбец (n_A), все элементы которого равны единице. По схеме рис. 1, б можно составить следующую систему уравнений Кирхгофа относительно переменных состояния $\mathbf{i}_A, \mathbf{i}_B, \mathbf{i}_S, u_C$ и "алгебраических" переменных i, i_0^B, i_0^S (i — ток через C -элемент, совпадающий с током нагрузки; i_0^B, i_0^S — токи опорных ЭП шин и экрана)

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} \mathbf{M}'_A & \mathbf{M}_{AB} & \mathbf{M}_{AS} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_{BA} & \mathbf{M}_B & \mathbf{M}_{BS} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_{SA} & \mathbf{M}_{SB} & \mathbf{M}_S & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & C \end{bmatrix} \cdot \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_A \\ \mathbf{i}_B \\ \mathbf{i}_S \\ u_C \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -\mathbf{R}'_A & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{R}_B & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{R}_0^B \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{R}_S & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{i}_A \\ \mathbf{i}_B \\ \mathbf{i}_S \\ u_C \\ i \\ i_0^B \\ i_0^S \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot e(t). \tag{4}
 \end{aligned}$$

В выражении (4) \mathbf{R}'_A — полностью заполненная матрица, образованная из матрицы \mathbf{R}_A путем добавления ко всем ее элементам сопротивления нагрузки R , что символически можно представить в виде

$$\mathbf{R}'_A = \mathbf{R}_A + R. \tag{5}$$

Матрица \mathbf{M}'_A образована из матрицы \mathbf{M}_A путем добавления к каждому ее элементу индуктивности нагрузки L ($\mathbf{M}'_A = \mathbf{M}_A + L$). Алгебраические переменные в правой части системы (4) легко выражаются через переменные состояния

$$i = \sum_{k=1}^{n_A} i_k^A, \quad i_0^B = \sum_{k=1}^{n_A} i_k^A + \sum_{k=1}^{n_B-1} i_k^B, \quad i_0^S = \sum_{k=1}^{n_S-1} i_k^S. \tag{6}$$

Используя соотношения (6), нетрудно (4) привести к системе уравнений относительно только переменных состояния

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} \mathbf{M}'_A & \mathbf{M}_{AB} & \mathbf{M}_{AS} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_{BA} & \mathbf{M}_B & \mathbf{M}_{BS} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_{SA} & \mathbf{M}_{SB} & \mathbf{M}_S & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & C \end{bmatrix} \cdot \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_A \\ \mathbf{i}_B \\ \mathbf{i}_S \\ u_C \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -\mathbf{R}' & \mathbf{0} & -\mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{R}'_S \\ \mathbf{1}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{i}_A \\ \mathbf{i}_B \\ \mathbf{i}_S \\ u_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot e(t), \tag{7}
 \end{aligned}$$

где (по аналогии с символической записью (5))

$$\mathbf{R}' = \begin{bmatrix} \mathbf{R}'_A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}'_B \end{bmatrix} + R_0^B, \quad \mathbf{R}'_S = \mathbf{R}_S + R_0^S.$$

Результаты расчета, найденные при некоторой дискретизации поперечных сечений шин и экрана, необходимо сопоставить с решением задачи при разбиении шин и экрана на большее число ЭП и т.д. до удовлетворительного совпадения нового решения с результатами предыдущего варианта расчета.

Формирование системы уравнений (7) является центральной частью рассматриваемого алгоритма, поскольку в результате ее решения в заданном интервале времени можно найти все характеристики переходного процесса, включая изменение во времени плотности тока в шинах и экране, тока нагрузки, магнитных потоков, силовых взаимодействий между шинами и экраном и т.д. Быстрота и надежность расчетов существенно зависит от корректности первого варианта дискретизации поперечных сечений шин и экрана, что требует использования приближенных оценок характера проникновения поля или тока в проводники.

Иллюстрация применения методики на модельной задаче

Для иллюстрации достоверности и точности рассматриваемых схемных моделей применим их к решению одномерных задач с известными ответами в аналитической форме. Одна из них показана на рис. 2. Емкостной накопитель C с начальным напряжением V_0 разряжается на короткозамкнутую систему из двух медных шин длиной l . Положим для определенности $C = 1 \text{ Ф}$, $U_0 = 1 \text{ В}$, $D_A = D_B = D = 0.02 \text{ м}$, $D_0 = 0$, $h = 0.01 \text{ м}$, $l = 1 \text{ м}$, $\gamma = 5.6 \cdot 10^7 \text{ См/м}$. Перед выполнением основных расчетов полезно хотя бы приближенно оценить временные характеристики переходного процесса. Это легче всего сделать для случая резко выраженного скин-эффекта и в предположении о колебательном, "почти синусоидально затухающем" характере процесса. Пусть T_0 — приближенный "общий период" колебаний разрядного тока, а $\omega_0 = 2\pi/T_0$ — его круговая частота. Тогда активное сопротивление одной шины r_0 можно вычислить как сопротивление постоянному току, проходящему по поверхностному слою шины толщиной [6, с. 385]

$$\Delta_0 = \sqrt{\frac{2}{\omega_0 \mu_0 \gamma}} = \sqrt{\frac{T_0}{\pi \mu_0 \gamma}}.$$

Следовательно,

$$r_0 = \frac{l}{\gamma h \Delta_0} = \frac{l}{h} \sqrt{\frac{\pi \mu_0}{\gamma T_0}}$$

и внутренняя индуктивность каждой шины (в предположении о резком поверхностном эффекте) равна

$$L_0 = \frac{r_0}{\omega_0} = \frac{T_0}{2\pi} r_0,$$

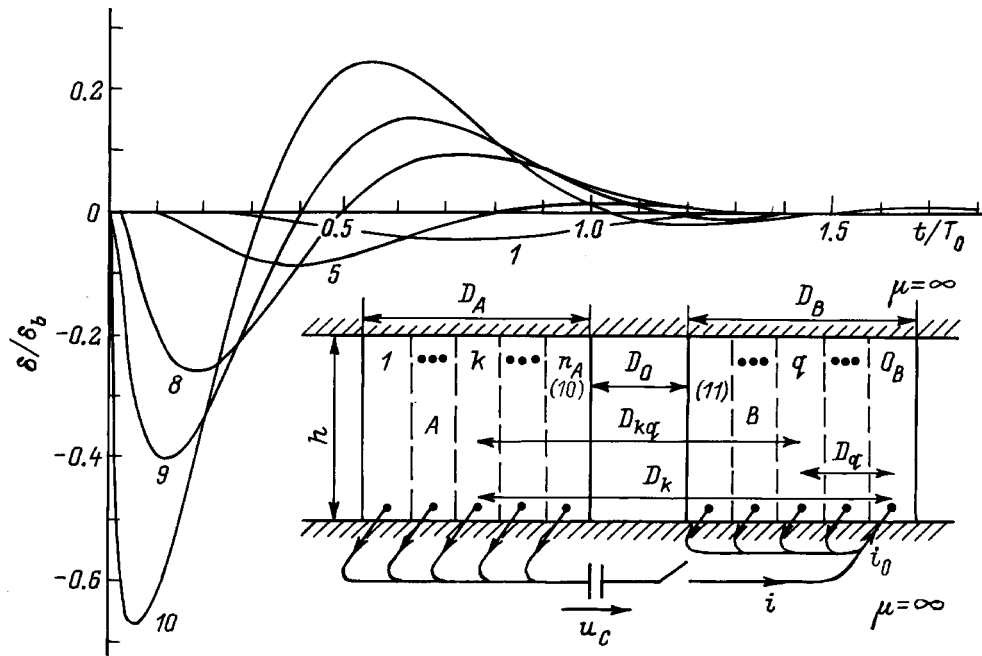


Рис. 2. Изменение плотности тока в шине A токопровода, закороченного на конце. $h = 0.01$ м, $D_A = D_B = 0.02$ м, $D_0 = 0$, каждая шина разбита на $n_A = n_B = 10$ ЭП (числа у кривых соответствуют номерам ЭП, номер опорного ЭП $n = 20$).

что позволяет приближенно представить систему из двух шин и емкостного накопителя RLC-цепью с сопротивлением $2r_0$ и индуктивностью $2L_0$, причем

$$2r_0 = \frac{2l}{h} \sqrt{\frac{\pi\mu_0}{\gamma T_0}}, \quad 2L_0 = \frac{l}{h} \sqrt{\frac{\mu_0 T_0}{\gamma\pi}}.$$

Период затухающих колебаний в такой цепи равен

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{1}{C(2L_0)} - \frac{(2r_0)^2}{4(2L_0)^2}}$$

$$= 2\pi \sqrt{1 / \left(C \frac{l}{h} \cdot \sqrt{\frac{\mu_0 T_0}{\gamma\pi}} \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{2\pi}{T_0} \right)^2},$$

откуда вытекает следующая приближенная оценка общего периода колебаний в системе при резко выраженном поверхностном эффекте в шинах

$$T_0 = \pi \sqrt[3]{\frac{25C^2 l^2 \mu_0}{h^2 \gamma}} = 0.0056 \text{ с.} \quad (8)$$

При этом эквивалентная глубина проникновения тока (толщина скин-слоя) получается приблизительно равной

$$\Delta_0 = \sqrt{\frac{T_0}{\pi\mu_0\gamma}} = 0.005 \text{ м.}$$

Поскольку в данном примере $D_A = D_B = 4\Delta_0$, то можно считать, что рассматривается случай весьма резкого

проявления поверхностного эффекта, аналитическое решение для которого известно [1,4] и его можно использовать для оценки точности предлагаемого численного метода.

Знание величины Δ_0 позволяет выполнить корректную дискретизацию сечений шин на начальном этапе расчетов. Разбиение шин на ЭП (для численного решения), показанное на рис. 2 штриховкой, выполнено с учетом одномерности задачи. Для начала выберем ширину a_k каждого ЭП, примерно равной половине эквивалентной глубины проникновения, разбив шины на $n_A = n_B = 10$ одинаковых ЭП

$$a_k = \frac{D_A}{n_A} = \frac{D_B}{n_B} = 0.002 \text{ м.}$$

Таким образом, $a_k = 0.4\Delta_0$. Площади сечений S_k , сопротивления R_k всех ЭП, включая опорный, одинаковы

$$S_k = a_k h = 2 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2,$$

$$R_k = R_0 = \frac{l}{\gamma S_k} = 8.9286 \cdot 10^{-4} \text{ Ом.}$$

Общее число ЭВ равно

$$n = n_A + n_B - 1 = 19.$$

Собственные и взаимные индуктивные ЭВ шин определяем по формулам ($k, q = \overline{1, n}$)

$$M_{kk} \equiv L_k = \frac{\mu_0}{h} \left(D_k - \frac{a_k}{3} \right), \quad (9)$$

$$M_{kq} = \frac{\mu_0}{2h} \left(D_k + D_q - D_{kq} - \frac{a_k}{3} \right), \quad (k \neq q). \quad (10)$$

При $k, q = \overline{1, n_A}$ элементы M_{kk} и M_{kq} образуют симметричную матрицу \mathbf{M}_A размером $n_A \times n_A = 10 \times 10$

$$\mathbf{M}_A = \frac{2\pi a_k}{3 \cdot 10^5} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & & 9 & 10 \\ 112 & 107 & \dots & 65 & 59 \\ & 106 & \dots & 65 & 59 \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ \text{Симметрично} & & & 64 & 59 \\ & & & & 58 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \\ 9 \\ 10 \end{matrix}$$

Собственные и взаимные индуктивности ЭВ B -шины получаем по формулам (9), (10) при $k, q = \overline{(n_A + 1), n}$. В рассматриваемом случае матрица \mathbf{M}_B имеет размер $(n_B - 1) \times (n_B - 1) = 9 \times 9$

$$\mathbf{M}_B = \frac{2\pi a_k}{3 \cdot 10^5} \cdot \begin{bmatrix} 11 & 12 & & 18 & 19 \\ 52 & 47 & \dots & 11 & 5 \\ & 46 & \dots & 11 & 5 \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ \text{Симметрично} & & & 10 & 5 \\ & & & & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} 11 \\ 12 \\ \\ 18 \\ 19 \end{matrix}$$

Матрица взаимных индуктивностей между ЭВ A -шины и ЭВ B -шины, имеющая размерность $n_A \times (n_B - 1) = 10 \times 9$, равна

$$\mathbf{M}_{AB} = \frac{2\pi a_k}{3 \cdot 10^5} \cdot \begin{bmatrix} 11 & 12 & & 18 & 19 \\ 53 & 47 & \dots & 11 & 5 \\ 53 & 46 & \dots & 11 & 5 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 53 & 47 & \dots & 11 & 5 \\ 53 & 47 & \dots & 11 & 5 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \\ 9 \\ 10 \end{matrix}$$

Схемная модель получается из схемы рис. 1, б путем устранения в ней источника $e(t)$, элементов нагрузки R и L , а также подосхемы, соответствующей экрану. Исходя из системы (7), уравнения состояния для этой модели можно представить в виде

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_A & \mathbf{M}_{AB} & \mathbf{O} \\ \mathbf{M}_{BA} & \mathbf{M}_B & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & C \end{bmatrix} \cdot \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_A \\ \mathbf{i}_B \\ u_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{R}' & -\mathbf{1} \\ & \mathbf{O} \\ \mathbf{1}^T & \mathbf{O} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{i}_A \\ \mathbf{i}_B \\ u_C \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{i}_A(+0) = \mathbf{O}, \quad \mathbf{i}_B(+0) = \mathbf{O}, \quad u_C(+0) = U_0. \quad (11)$$

Порядок системы (11) равен $n + 1 = 19 + 1 = 20$. Решив ее каким-либо численным методом, нетрудно,

согласно (1), найти и построить график зависимости от времени плотности тока в средней части k -го ЭП, а также тока через конденсатор по формуле (6).

По результатам этих расчетов на рис. 2 построены зависимости относительных плотностей тока для середин нескольких ЭП A -шины с номерами 1, 5, 8, 9 и 10. В качестве базисной принята величина $\delta_b = \gamma U_0 / 2l$. Как и следовало ожидать, плотности тока в серединах ЭП с номерами 11, 12, 13 и 16 шины B совпадают с плотностями тока 10, 9, 8 и 5-го ЭП шины A . На рис. 3 кривой 1 показана зависимость тока $i(t) = i(t)/i_b$ (принято $i_b = U_0 / (2l / \gamma h \Delta_0) = \delta_b h \Delta_0$), причем ток $i(t)$ рассчитан по формуле (6). Примечательно, что, несмотря на весьма грубую предварительную дискретизацию, приведенная кривая практически совпала с кривыми тока, полученными при разбиении каждой шины на вдвое и четверо большее число ЭП.

Из кривых рис. 2 следует, что максимальное значение плотности тока в 1-м ЭП существенно, почти в 15 раз, меньше плотности тока в ЭП с номером 10. Поэтому можно считать, что поле практически не доходит до внешних граней шин и имеет место случай резкого поверхностного эффекта, что позволяет оценить точность полученного решения путем сопоставления с данными [1, с. 382], приведенными в таблице. Рассчитанная по формулам [1] кривая тока для рассматриваемой системы практически совпала с кривой 1 на рис. 3.

Результаты расчета тока разряда конденсатора i (в амперах) на идеальный бифиляр из короткозамкнутых шин (рис. 2) толщиной $D_A = D_B = D = 4\Delta_0 = 0.02$ м для различных значений времени t при $n = 20$ и выборе в качестве опорного (O_B) ЭП с номером n_0 ($u_C(0) = 1$ В)

t, c	t/T_0	Расчет численным методом			Точное значение при $D = \infty$ [1, с. 382]
		$n_0 = 20$	$n_0 = 15$	$n_0 = 11$	
0	0	0	0	0	0
0.001	0.179	-733.87	-733.88	-733.78	-725.38
0.002	0.358	-330.54	-330.55	-330.48	-325.40
0.003	0.537	41.49	41.50	41.45	39.27
0.004	0.716	158.49	158.51	158.40	153.54
0.005	0.896	107.80	107.81	107.74	105.05
0.006	1.074	26.89	26.89	26.89	26.62

Для отличия от величины T_0 обозначим действительный интервал первого колебания тока (с отрицательной и положительной полуволнами кривой) через T . Из кривой 1 на рис. 3 видно, что $T/T_0 = 1.17$ и, следовательно, ошибка оценочной формулы (8) в данном случае составляет $(T_0 - T)/T \cdot 100\% = -15\%$. Отметим, что, как и ожидалось, результаты расчетов практически не зависят от того, какой из ЭП выбран в качестве опорного (см. таблицу).

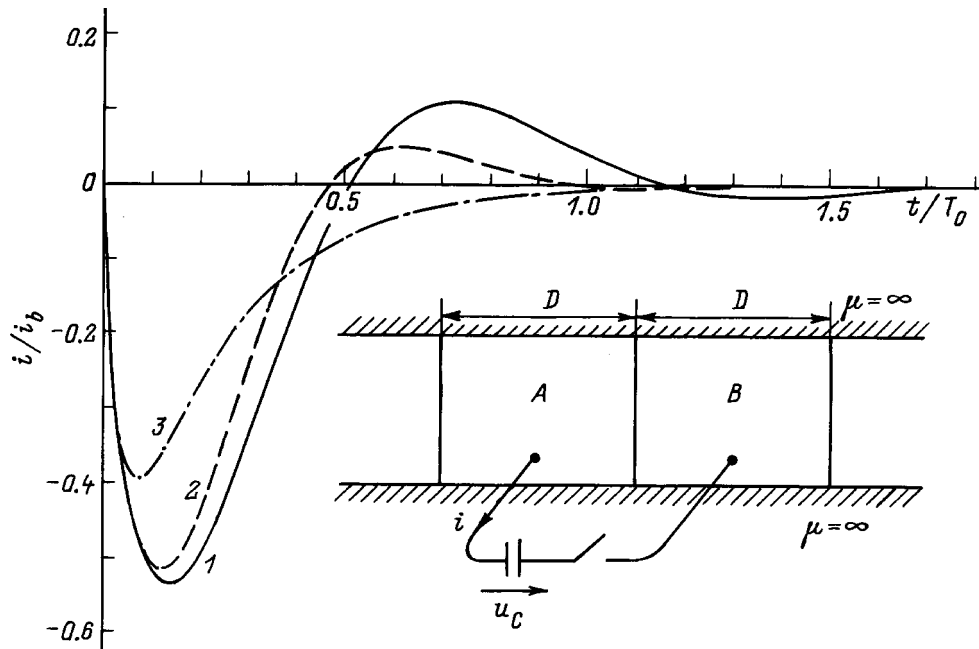


Рис. 3. Зависимость разрядного тока в одномерной задаче (рис. 2) от времени. 1 — $D_A = D_B = D = 4\Delta_0 = 0.02$ м, 2 — $D = \Delta_0 = 0.005$ м, 3 — $D = \Delta_0/2 = 0.0025$ м.

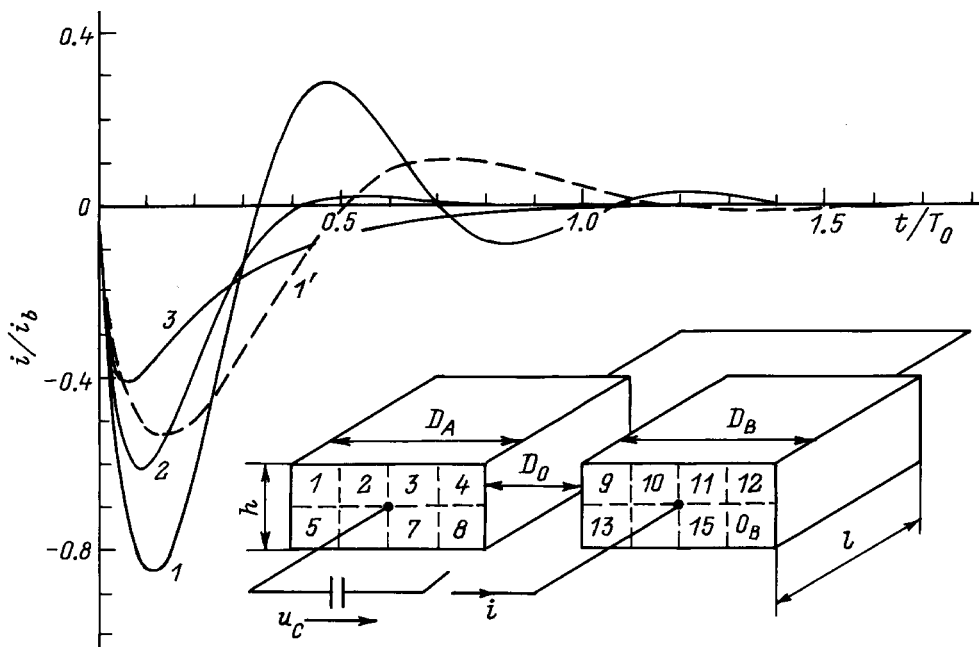


Рис. 4. Зависимость разрядного тока от времени в двумерной задаче. $h = 0.01$ м, $D_0 = 0$, 1 — $D_A = D_B = D = 4\Delta_0 = 0.02$ м, 2 — $D = \Delta_0 = 0.005$ м, 3 — $D = \Delta_0/2 = 0.0025$ м.

Анализ динамики скин-эффекта

Для случая, когда в системе (рис. 2) толщины шин соизмеримы с оценочной глубиной проникновения волны ($D_A = D_B = D \leq \Delta_0$), аналитического решения в литературе не имеется. Результаты численного решения этой задачи по предлагаемой методике приведены в виде кривых 2 и 3 на рис. 3. При $D = \Delta_0$ оказалось

достаточным разбить шины на пять ЭП. Из кривой 2 следует, что в этом случае $T = T_0$. При $D = \Delta_0/2$ разряд конденсатора носит уже аperiодический характер, причем достаточным было представление каждой шины тремя ЭП.

В отличие от рассмотренных выше одномерных задач на рис. 4 представлена система, в которой разрядный ток создает двумерное электромагнитное поле. Емкост-

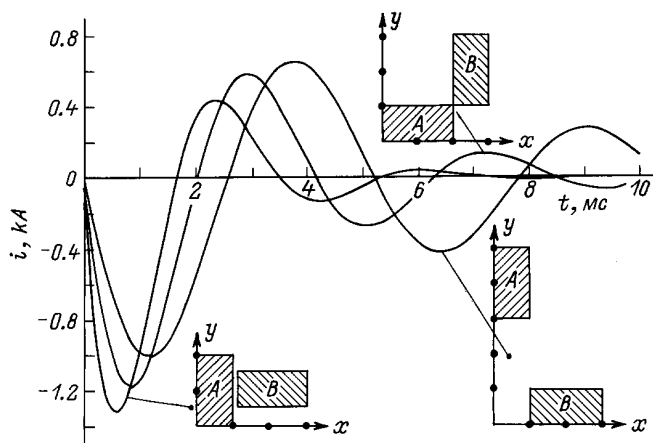


Рис. 5. Разрядный ток конденсатора через короткозамкнутые шины A и B одинакового сечения (0.01×0.02 м) при различных вариантах их расположения.

ной накопитель разряжается на короткозамкнутую систему шин прямоугольного профиля с той же высотой $h = 0.01$ м, что и в системах (рис. 2, 3). Шины одинаковы ($D_A = D_B = D$), зазор между шинами исчезающе мал ($D_0 = 0$). Основные этапы решения этой задачи и схемная модель не отличаются от процедуры и схемы, приведенных выше для одномерных задач. Если шины разбить на ЭП с сечениями прямоугольной формы (со сторонами a_k и b_k), как показано на рис. 4, то формулы для расчета собственных и взаимных индуктивностей ЭВ примут вид

$$M_{kk} \equiv L_k = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{D_{k0}^2}{g_k g_0},$$

$$M_{kq} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{D_{k0} D_{q0}}{D_{kq} g_0},$$

где D_{k0} — расстояние между центрами сечений k -го и опорного ЭП, $g_k = 0.2236(a_k + b_k)$ — среднее геометрическое расстояние площади прямоугольного сечения k -го ЭП от самой себя.

Результаты расчетов для трех различных размеров D шин приведены на рис. 4. При дискретизации шин стороны прямоугольных элементарных сечений не превышали значения $\Delta_0/2$. Кривая I' на рис. 4 повторяет кривую I на рис. 3. Сравнение кривых I' и I (рис. 4), полученных для шин с одинаковыми профилями ($D = 4\Delta_0 = 0.02$ м, $h = 0.01$ м, $D_0 = 0$), показывает, что пренебрежение двумерностью задачи приводит к существенным погрешностям.

Кривая 3 на рис. 4 получена при $h/D = 0.01/0.0025 = 4$ (что соответствует ленточной линии) и поэтому практически совпадает с кривой 3 на рис. 3 для одномерной задачи.

На рис. 5 с целью дополнительной иллюстрации возможностей изложенного в работе метода расчета построены зависимости тока разряда конденсатора на закороченный токопровод при некоторых других (в том числе и несимметричных) взаимных расположениях шин.

В заключение отметим, что точность получаемых решений зависит от степени дискретизации сечений токопроводящих элементов, форм и размеров сечений элементарных проводников, а также от точности соотношений, используемых для расчета собственных и взаимных индуктивностей элементарных витков. Эти вопросы требуют отдельных исследований и в настоящей работе не рассматриваются.

Выводы

Рассмотренный подход применим для исследования переходных процессов при любой степени проявления скин-эффекта в двумерных задачах. Достоверность методологии подтверждена практически полным совпадением результатов, полученных на ее основе, с решениями для одномерных задач, имеющих ответы в аналитической форме. Благодаря ясной физической основе метода его нетрудно приспособить для учета эффекта близости при анализе переходных процессов в системах шин, проходящих вблизи не только реальных, но и идеальных экранов.

Список литературы

- [1] Шнейерсон Г.А. Поля и переходные процессы в аппаратуре сверхсильных токов. М.: Энергоатомиздат, 1992. 416 с.
- [2] Мосани С.И. // IEEE Trans. PAS. 1972. Vol. 91. N 3. P. 844–852.
- [3] Витков М.Г. // ЖТФ. 1965. Т. 35. Вып. 3. С. 410–413.
- [4] Юрченко В.И. // ЖТФ. 1973. Т. 43. Вып. 9. С. 1866–1873.
- [5] Михайлов В.М. Импульсные электромагнитные поля. Харьков: Вища школа, 1979. 140 с.
- [6] Смайт В. Электростатика и электродинамика. М.: ИЛ, 1954. 604 с.