Журнал технической физики, 1997, том 67, № 7

01

К теории одномерной и квазиодномерной теплопроводности

© С.О. Гладков

Институт химической физики им. Н.Н. Семенова РАН,
117977 Москва, Россия

(Поступило в Редакцию 26 февраля 1996 г.)

Показано, что в движущемся со скоростью **V** одномерном потоке жидкости, находящейся в постоянном температурном поле, процесс теплопроводности идет не по "обычному" экспоненциальному закону, а по значительно более сложному. Доказано, что в квазиодномерном случае процесс теплопроводности в абстрактном пространстве размерности $1+\varepsilon$, где ε меняется от нуля до единицы, описывается модифицированным уравнением Фурье. Найдено его решение для бесконечного пространства.

Задачи, связанные с исследованием физических свойств структур дробной размерности, в последнее время стали весьма актуальными. Интерес к ним проявился в основном после того, как были заложены основы теории фрахталей, теории протекания и ренормгруппового анализа [1–5]. Наиболее распространенным примером квазиодномерной структуры служит, например, морская береговая линия. Ее размерность есть $1+\varepsilon$, где число ε значительно меньше единицы. Еще одним примером, но уже чисто технического характера являются одномерные хаотически расположенные в некоторой плоскости и соединенные друг с другом произвольным образом водопроводные трубы. Такая квазиодномерная структура и будет предметом исследования нашей работы. Суть задачи заключается в том, чтобы изучить особенности процесса теплопроводности в системах с размерностью $1+\varepsilon$, когда жидкость (или газ) движутся со скоростью **V** вдоль некоторого выделенного направления x. Граничные условия при этом ставятся следующим образом. На границе контакта жидкости и внешней среды считается, что внешняя среда играет роль термостата с постоянной температурой T_0. В начальный момент времени $(t=0)$ температура жидкости есть $T(x)$. При задании настоящих начальных и граничных условий решение квазиодномерной задачи можно осуществить только в том случае, если известно решение одномерной задачи. Поэтому в начале мы изучим процесс теплопроводности для одномерного потока жидкости (газа) с температурой T_1, движущегося сквозь другую жидкость (или газ) с температурой T_2.

Обычно считается [6], что учет скорости движения потока можно осуществить вводя ее в граничные условия. Представим себе следующую картину. Пусть в начальный момент времени жидкостной поток втекает в другую жидкость, заключенную в очень узком, но конечном цилиндрическом резервуаре радиуса r. Причем длина канала L значительно превышает этот радиус $(L \gg r)$. Система связанных уравнений, учитывающая теплообмен между обеими средами, может быть записана в следующем наиболее общем виде (см., например, работу [7]):

$$\partial T_1/\partial t + V\partial T_1/\partial x = \chi_1 \partial^2 T_1/\partial x^2 + \alpha_{12}(T_2 - T_1), \quad (1)$$

$$\partial T_2/\partial t = \chi_2 \partial^2 T_2/\partial x^2 + \alpha_{21}(T_1 - T_2), \quad (2)$$

где T_1 — температура жидкости, χ_1 — ее коэффициент температуропроводности, α_{12} — коэффициент теплоотдачи от жидкости к окружающей ее оболочке, χ_2 — температуропроводность оболочки, α_{21} — коэффициент теплоотдачи от оболочки к жидкости.

Надо заметить, что учет скорости движения **V** приводит к тому, что последнее слагаемое в уравнении (1) необходимо. В самом деле, так как характерные интервалы изменения температуры есть $\delta x \gg l$, где l — длина свободного пробега молекул, то условие того, что второй член в левой части уравнения (1) меньше последнего слагаемого в правой части, может быть записано в виде следующего неравенства: $V/\delta x \ll \alpha_{12}$. Отсюда следует, что $\delta x \gg V\tau_{12} = Vl/v_T$ и при всех $V < v_T$ данное условие всегда выполняется. Последнее приводит к необходимости обязательного учета теплоотдачи в правой части уравнения теплопроводности при условии гидродинамического движения жидкости. Еще раз подчеркнем, что если жидкость неподвижна, то последнее слагаемое в уравнении (1) отсутствует.

Итак, приведенная система уравнений адекватно описывает процесс установления температуры в одномерном движущемся вдоль оси x потоке жидкости при учете обоюдного влияния друг на друга как одной, так и другой жидкости. Надо заметить, что в данной постановке задача в известных нам публикациях не решалась. В связи с этим решение системы уравнений (1) и (2) будет представлять собой самостоятельный интерес не только с чисто познавательной точки зрения, но и с методической.

Начальные условия выберем в следующем виде:

$$T_1(t=0,\, x) = T_0\big(1 - \mathrm{th}(x/d)\big), \quad (3)$$

$$\lim T_1(t,x) = T_0, \qquad t \to \infty, \quad (4)$$

где d — некоторое характерное расстояние, на которое проникает жидкость в начальный момент времени; T_0 — постоянная в начальный момент температура движущейся жидкости.

Решение системы дифференциальных уравнений (1), (2) можно в этом случае искать при помощи разложения Лапласа. Условие этого заключается в том, чтобы интервал времени был задан в диапазоне от 0 до $+\infty$, а область пространственных изменений температуры определялась также полубесконечным интервалом.

Выражая из уравнения (1) T_2 и подставляя ее в уравнение (2), находим следующее довольно громоздкое уравнение:

$$(1+\alpha_{21}/\alpha_{12})\partial T_1/\partial t+\alpha_{12}^{-1}\partial^2 T_1/\partial t^2+V\alpha_{12}^{-1}\partial^2 T_1/\partial t\partial x$$
$$-\chi_2 V\alpha_{12}^{-1}\partial^3 T_1/\partial x^3+\chi_1\chi_2\alpha_{12}^{-1}\partial^4 T_1/\partial x^4$$
$$+\alpha_{21}\alpha_{12}^{-1}\big(V\partial T_1/\partial x-\chi_1\partial^2 T_1/\partial x^2\big)=0. \quad (5)$$

Разлагая далее функцию $T_1(t,x)$ в интеграл Лапласа с помощью преобразований

$$T_1(t,x)=\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{qx}T_{1q}(t)dq/2\pi i,$$

$$T_{1q}(t)=\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-qx}T_1(t,x)dx,$$

находим уравнение, описывающее временнýю эволюцию температуры,

$$d^2T_{1q}/dt^2+\varphi_{1q}dT_{1q}/dt+T_{1q}\varphi_2=0, \quad (6)$$

где функции

$$\varphi_{1q}=\alpha_{12}+\alpha_{21}+Vq-(\chi_1+\chi_2)q^2,$$
$$\varphi_{2q}=\chi_1\chi_2q^4-V\chi_2q^3-\alpha_{21}\chi_1q^2+Vq\alpha_{21}. \quad (7)$$

Рассмотрим случай, когда теплоотдача от внешней жидкости к движущейся мала по сравнению с теплоотдачей от движущейся жидкости к внешней, т. е. $\alpha_{12}\ll\alpha_{21}$. В этом приближении корни характеристического уравнения, соответствующего уравнению (6), таковы:

$$k_{1,2}(q)=0.5\left[(\chi_1+\chi_2)q^2-\alpha_{21}-Vq\right]$$
$$\pm\Big\{\left[\big(\alpha_{21}-(\chi_2-\chi_1)q^2\big)/2\right]^4$$
$$-V^2q^2(0.5\alpha_{21}-\chi_2q^2)^2\Big\}^{1/4}e^{0.5iz(q)}, \quad (8)$$

где

$$z(q)=\operatorname{arctg}\left[4iqV\big(0.5\alpha_{21}-\chi_2q^2\big)/\big(\alpha_{21}-(\chi_2-\chi_1)q^2\big)\right].$$

Как легко понять, физический смысл имеет только корень k_1 (радикал со знаком $+$). И в этом случае решение уравнения есть

$$T_{1q}(t)=C_{1q}e^{k_1(q)t},$$

где C_{1q} — константа интегрирования.

Согласно обратному преобразованию Лапласа, имеем

$$T_1(t,x)=\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{qx+k_1(q)t}dq/2\pi i,$$

с учетом начального условия (3) находим

$$T_1(t,x)=\int\limits_0^{\infty}T_1(0,y)dy\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}e^{k_1(q)t-q(x-y)}dq/2\pi i, \quad (9)$$

где $T_1(0,x)$ дается выражением (3).

Интеграл (9) имеет, к сожалению, довольно сложный вид, и, чтобы его вычислить, следует рассмотреть какие-либо предельные физические случаи. Для начала рассмотрим случай, когда скорость потока V мала. Более конкретно, как это следует из выражения (8), она должна удовлетворять неравенству

$$V\ll\alpha_{21}^{1/2}(\chi_2-\chi_1)^{3/2}(3\chi_2-\chi_1). \quad (10)$$

Это условие соответствует, в частности, малости подкоренного выражения функции $k_1(q)$. В результате k_1 оказывается равным

$$k_1(q)\cong 0.5qV+\chi_1q^2$$
$$+\big(2qV(0.5\alpha_{21}-\chi_2q^2)\big)/\big(\alpha_{21}-(\chi_2-\chi_1)q^2\big). \quad (11)$$

Подставляя это выражение в интеграл (9), после замены $q\Rightarrow -1q$ получаем формулу, описывающую эволюцию температуры одномерного потока ламинарно движущейся жидкости (малые числа Рейнольдса),

$$T_1(t,x)=\int\limits_0^{\infty}T_1(0,y)dy\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{i\varphi(q)t+iq(x-y)-\chi_1q^2t}dq, \quad (12)$$

где

$$\varphi(q)=qV\big(0.5+(\alpha_{21}+2\chi_2q^2)\big)/\big(\alpha_{21}+(\chi_2-\chi_1)q^2\big). \quad (13)$$

Если поток неподвижен ($V=0$), то выражение (12) автоматически переходит в известное выражение [6].

Чтобы найти распределение температуры в потоке при $V\neq 0$, следует оценить показатель экспоненты и выделить точку перевала. Как видно из выражения (13), функция $\varphi(q)$ меняется в довольно узких пределах от значения $1.5qV$ до значения $\big(0.5+2\chi_2/(\chi_2-\chi_1)\big)$. Поскольку наибольшего значения подынтегральная функция достигает при $q\Rightarrow 0$ ($q\Rightarrow 1/L$, где L — линейный размер системы), то $\varphi(q)$ может быть заменена на значение $1.5qV$. В таком случае

$$T_1(t,x)=T_0+\int\limits_0^{\infty}T_1(0,y)dy\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{iq(x-y)+1.5qVt-\chi_1q^2t}dq/2\pi$$
$$=T_0+\int\limits_0^{\infty}T_1(0,y)e^{-(x-y+1.5Vt)^2/4\chi_1t}dy. \quad (14)$$

Во втором предельном случае, когда скорость V велика и удовлетворяет условию

$$V\gg\alpha_{21}^{1/2}(\chi_2-\chi_1)^{3/2}/(3\chi_2-\chi_1), \quad (15)$$

функция k_1 (после замены $q \Rightarrow iq$) может быть представлена в виде

$$k_1 q = 0.5\left[iVq - (\chi_1 + \chi_2)q^2 - \alpha_{21}\right] + \left\{Vq(0.5\alpha_{21} + \chi_2 q^2)\right\}^{1/2}. \quad (16)$$

Максимум этого выражения находится при значениях

$$q_0 = (V\alpha_{21})^{1/3}/2^{5/3}(\chi_1 + \chi_2)^{2/3}. \quad (17)$$

Разлагая показатель экспоненты вблизи точки $q = q_0$, получаем, что при больших скоростях

$$T_1(t,x) = T_0 + e^{-0.5\alpha_{21}t + iq_0 x} \times \int\limits_0^{+\infty} T_1(0,y) e^{-iq_0 y - (x-y)^2/4(\chi_1+\chi_2)t} dy. \quad (18)$$

Надо заметить, что выражение (18) справедливо при условии, что $T_1(t,x) > T_0$. Из соотношения (18) следует вывод о том, что при больших скоростях потока теплообмен идет значительно более интенсивно, поскольку время установления некоторой равновесной температуры определяется не теплопроводностью, а чисто теплообменом и по порядку величины соответствует значению $2/\alpha_{21}$.

В рамках поставленной задачи о выяснении характера установления температуры в потоке движущейся сквозь другую жидкость жидкости (или газа) возникает вопрос об анализе процесса теплопроводности в системах с дробной размерностью. К таким структурам может быть отнесена, например, система расположенных в одной плоскости трубопроводов с хаотическим распределением труб. Ее размерность есть $1 + \varepsilon$. Ясно, что при $\varepsilon = 0$ система становится просто одномерной, а при $\varepsilon = 1$ — двухмерной. Промежуточный случай произвольного ε представляет собой интересный с чисто методической стороны случай, который и будет ниже проанализирован.

Надо заметить, что описание характера теплопроводности в квазиодномерной системе имеет принципиальное значение с точки зрения моделирования сложных разветвленных структур для адекватного ответа на вопрос, как в таких структурах идет установление теплового равновесия и каким образом происходит установление температуры. Важно подчеркнуть, что параметр ε является единственным произвольным параметром, задаваясь которым можно попытаться описать эти сложные в макроскопическом плане системы.

Прежде чем приступить к решению уравнения теплопроводности в квазиодномерном случае, необходимо понять, что в данном случае предствляет собой оператор градиента. Зададим некоторый оператор A, действующий в гильбертовом пространстве размерности $1 + \varepsilon$, в виде следующего разложения Фурье:

$$Af(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} ik^{1+\varepsilon} e^{ikx} dk/2\pi. \quad (19)$$

При $\varepsilon = 0$ получается обычный результат, который с очевидностью указывает на то, что оператор A является просто оператором дифференцирования по координате x. Надо заметить, что переход к чисто двухмерному случаю должен быть осуществлен не с помощью (19), а благодаря двухмерному разложению, т.е.

$$Af(x,y) = \lim_{\eta \Rightarrow 0} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} ik^{2-\eta} e^{i\mathbf{kx}} d\mathbf{k}/(2\pi)^2, \quad (20)$$

где $\eta > 0$.

Определив действие оператора A в виде разложения (19), можно, таким образом, ввести понятие квазиодномерного потока тепла. А именно, полагая, что

$$q = -\varkappa AT(x,t), \quad (21)$$

находим искомое уравнение Фурье в квазиодномерном случае

$$\partial T/\partial t = -\chi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} k^{2(1+\varepsilon)} e^{ikx} T_k(t) dk/2\pi, \quad (22)$$

где χ — коэффициент температуропроводности в пространстве размерности $1 + \varepsilon$.

Надо заметить, что уравнение (22) "работает" для бесконечного пространства. Переход к конечной области пространства требует модификации этого уравнения и иного определения оператора A. Эту задачу в настоящей работе мы рассматривать не будем.

Зададим далее свойства оператора A следующим образом: 1) действие этого оператора на функцию $f(x)$ обладает вполне конкретными собственными значениями λ, т.е. $Af(x) = \lambda f(x)$; 2) оператор A есть ограниченный самосопряженный оператор, т.е. $A = A^*$ [9].

Согласно уравнению (22), для Фурье-преобразования температуры получаем

$$\partial T_k(t)/\partial t = -\chi k^{2(1+\varepsilon)} T_k(t). \quad (23)$$

Решая полученное уравнение и совершая обратное преобразование Фурье, находим

$$T(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} T(\xi,0) e^{-\chi t k^{2(1+\varepsilon)} + ik(x-\xi)} dk d\xi/(2\pi)^2. \quad (24)$$

Вычислим интегралы по k. Воспользовавшись для этой цели методом перевала, находим, что седловая точка лежит при значении

$$k = k_0 = \left[(iy)^{1/(1+2\varepsilon)}\right] / \left[2(1+\varepsilon)\chi t\right]^{1/(1+2\varepsilon)}, \quad (25)$$

где $y = x - \xi$.

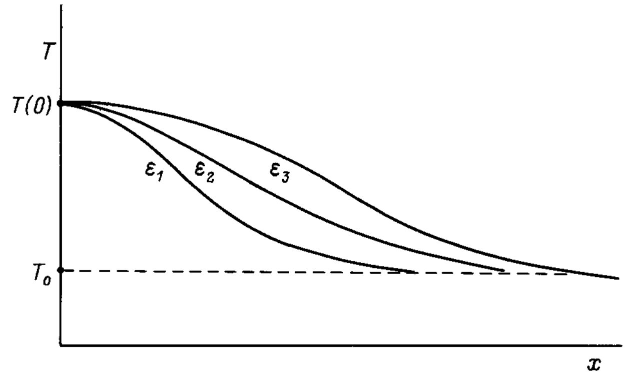

Рис. 1. Зависимость распределения температуры от координаты x при различных значениях $\varepsilon(\varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \varepsilon_3)$.

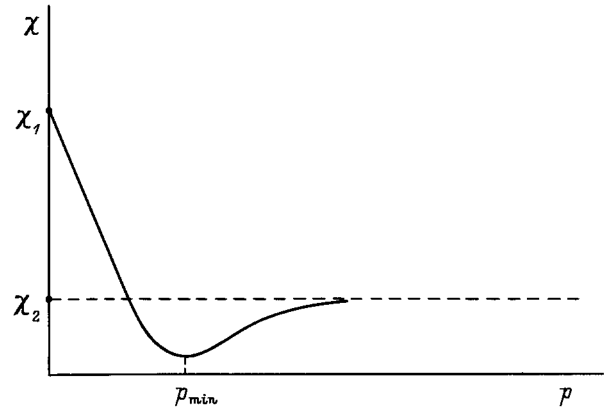

Рис. 2. Зависимость коэффициента температуропроводности двухфазной структуры от концентрации примесной фазы p.

Подставляя это значение в подынтегральное выражение (24) и вычисляя получающийся при этом гауссовский интеграл, находим следующее выражение для распределения температуры в квазиодномерном пространстве:

$$T(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} T(\xi,0)e^{Y(\varepsilon)} \cos\big(Z(\varepsilon)\big)d\xi/2\big(\pi X(\varepsilon)\big)^{1/2}, \tag{26}$$

где функции

$$X(\varepsilon) = \Big\{u^{\varepsilon/(1+2\varepsilon)}\chi t(1+\varepsilon)(1+2\varepsilon)$$
$$\times \cos\big[\pi\varepsilon/(1+2\varepsilon)\big]\Big\}/(1+\varepsilon)^{2\varepsilon/(1+2\varepsilon)},$$
$$Y(\varepsilon) = (1+2\varepsilon)\cos\big[\pi(1+\varepsilon)/(1+2\varepsilon)\big]$$
$$\times u^{(1+\varepsilon)\big/(1+2\varepsilon)}/2(1+\varepsilon)\big[(1+\varepsilon)\big]^{1/1+2\varepsilon},$$
$$Z(\varepsilon) = \operatorname{tg}\big(\pi\varepsilon/(1+2\varepsilon)\big) - \varepsilon u^{(1+\varepsilon)/(1+2\varepsilon)}$$
$$\times (1+2\varepsilon)/2(1+\varepsilon)\big[(1+\varepsilon)\big]^{1/(1+2\varepsilon)},$$
$$u = (x-\xi)^2/2\chi t. \tag{27}$$

В предельном случае, а именно когда размерность становится одномерной, т. е. при ε, стремящемся к нулю, мы получаем естественное выражение для коэффициента теплопроводности [6]. Анализ зависимости (26) при различных значениях ε проиллюстрирован на рис. 1.

Следует заметить, что, когда речь заходит о двухфазных структурах (например, двухкомпонентный композит или структура типа жидкость + газ), коэффициент температуропроводности может быть представлен в следующем приближенном виде [8]:

$$\chi(p) = \big[p^2\varkappa_1 + (1-p)^2\varkappa_2\big] \,/\, \big[pc_{1v} + (1-p)c_{2v}\big],$$

где концентрация $p = V_1/V_0$, V_1 — объем примесной фазы; $\varkappa_{1,2}$ — теплопроводности соответственно первой и второй фаз; $c_{1,2v}$ — их изохорические теплоемкости, отнесенные к единице объема; знаменатель получается из условия аддитивности энтропии обеих фаз.

Конкретно, поскольку энтропия всей структуры есть $S = pS_1 + (1-p)S_2$, то, дифференцируя его по температуре, мы получим искомый знаменатель.

Кроме того, приведенное соотношение для $\chi(p)$ справедливо в предположении слабого взаимодействия между обеими фазами, когда слагаемое, пропорциональное произведению $p(1-p)$, мало́. В работе [8] было показано, что такое условие довольно часто реализуется.

Минимум функции $\chi(p)$ лежит при значениях концентраций

$$p_{\min} = c_{2v}/(c_{2v} - c_{1v}) + |c_{1v} - c_{2v}|^{-1}$$
$$\times \big\{(c_{2v}^2\varkappa_1 + c_{1v}^2\varkappa_2)/(\varkappa_1 + \varkappa_2)\big\}^{1/2}.$$

Соответствующее значение коэффициента температуропроводности есть

$$\chi_{\min} = 2(c_{1v} - c_{2v})^{-2}$$
$$\times \big[(c_{2v}^2\varkappa_1 + c_{1v}^2\varkappa_2)(\varkappa_1 + \varkappa_2) - c_{1v}\varkappa_2 - c_{2v}\varkappa_1\big]^{1/2}.$$

Зависимость $\chi(p)$ показана на рис. 2.

Важно отметить, что минимум коэффициента температуропроводности достигается только в двухфазных структурах. В "обычных" (однофазных) веществах температуропроводность зависит только от температуры, а не от концентрации. Это позволяет сделать вполне однозначный вывод о том, что процесс выравнивания температуры в двухфазных структурах в области концентрации $p = p_{\min}$ идет значительно дольше, чем в любых однофазных веществах (независимо от их размерности), а следовательно, охлаждение сильно замедляется. Последнее может оказаться очень важным с практической точки зрения.

Список литературы

[1] *Wilson K., Kogut G.* // Phys. Rep. 1974. Vol. 12. P. 75–110.
[2] *Паташинский А.З., Покровский В.Л.* Флуктуационная теория фазовых переходов. М.: Наука, 1982. 234 с.
[3] *Шкловский Б.Л., Эфрос А.И.* Теория перколяций. М.: Наука, 1982. 278 с.
[4] *Изюмов Ю.А., Скрябин Ю.Н.* Статистическая механика магнито-упорядоченных систем. М.: Наука, 1987. 264 с.
[5] *Gladkov S.O.* // Phys. Lett. A. 1995. Vol. 198. P. 151–157.
[6] *Карслоу Г., Егер Д.* Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964. 487 с.
[7] *Gladkov S.O.* // Sol. St. Commun. 1995. Vol. 94. N 9. P. 787–791.
[8] *Gladkov S.O.* // Phys. B. 1990. Vol. 167. P. 159–174.
[9] *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. Т. 5. М., 1959. 655 с.