

01;03;08

САЗЕР (Sound Amplification by Stimulated Emission of Radiation) в нелинейном режиме работы с различными излучателями

© С.Т. Завтрак, И.В. Волков

Научно-исследовательский институт ядерных проблем при Белорусском государственном университете, 220050 Минск, Белоруссия

(Поступило в Редакцию 21 февраля 1996 г.)

Рассмотрена работа сазера (от SASER — Sound Amplification by Stimulated Emission of Radiation) в нелинейном режиме. В качестве активной среды выбрана жидкость с газовыми пузырьками. Накачка осуществляется переменным электрическим полем. Аналитически исследованы процессы усиления полезной моды в плоском резонаторе для случаев однородного и неоднородного распределения пузырьков по размерам.

Введение

Недавно в ряде работ [1–4] была предложена теоретическая схема акустического аналога лазера на свободных электронах — сазера (от англ. SASER — Sound Amplification by Stimulated Emission of Radiation). В качестве активной среды выбран жидкий диэлектрик с равномерно распределенными в нем дисперсными частицами. Такими частицами могут служить газовые пузырьки, полученные, например, путем электролиза. В активной среде, заключенной в резонатор, создается волна накачки с помощью переменного электрического поля [1–3] или механических колебаний стенок резонатора [4]. Первоначально распределение частиц пространственно однородно, их суммарное излучение равно нулю, но затем они начинают группироваться под действием акустических радиационных сил. Это приводит к автосинхронизации колеблющихся частиц и усилению полезной моды.

В работах [1–4] исследовался процесс автофазировки газовых пузырьков на начальном этапе работы сазера и были найдены стартовые условия для начала генерации. Было показано, что для начала генерации необходимо преодолеть потери двух типов [2]. Первый из них связан с диссипацией энергии внутри активной среды, второй тип обусловлен радиационными потерями на торцах резонатора. В работах [1–3] предполагалось, что все пузырьки имеют одинаковый радиус и находятся вдали от области резонанса. В работе [4] был рассмотрен более реалистичный случай неоднородного распределения пузырьков по размерам. Найденные для этого случая стартовые условия оказались аналогичными полученным ранее.

Во всех предыдущих работах предполагалось, что изменение пространственной концентрации пузырьков и полезная мода малы по сравнению с начальным значением концентрации и волной накачки, т.е. рассматривался начальный этап работы сазера. В настоящей работе мы отказываемся от этого предположения и рассмотрим работу сазера в произвольные моменты времени для случаев однородного и неоднородного распределения пузырьков по радиусам. Для простоты будем рассматривать схему сазера с плоским резонатором и электрической накачкой.

Основные уравнения

Схема сазера приведена на рисунке. Активная среда заключена между двумя плоскостями. Излучение происходит вдоль оси z , L — длина резонатора в этом направлении. Активная среда помещена в переменное электрическое поле, которое играет роль накачки [1]. Объемы пузырьков изменяются за счет явления электрострикции. Результирующее давление, действующее на пузырьки, можно представить в виде $P(\mathbf{r}, t) = P_E \exp(i\omega t) + P'(\mathbf{r}, t)$ (статическое давление опущено), где $P_E \exp(i\omega t)$ — давление, связанное с воздействием электрического поля; $P'(\mathbf{r}, t)$ — давление полезной моды.

Динамика газожидкостной среды описывается следующей системой уравнений [1–4]:

$$\Delta P' - \frac{1}{c_l^2} \frac{\partial^2 P'}{\partial t^2} - (\alpha + i\beta)P' = (\alpha + i\beta)P_E \exp(i\omega t), \quad (1)$$

$$\xi \mathbf{U} = (\text{Re} A) \nabla |P|^2 - i(\text{Im} A)(P^* \nabla P - P \nabla P^*), \quad (2)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \text{div}(n\mathbf{U}) = 0. \quad (3)$$

Уравнение (1) представляет собой волновое уравнение для жидкости с пузырьками газа. Здесь c_l — скорость звука в чистой жидкости; величины α и β описываются

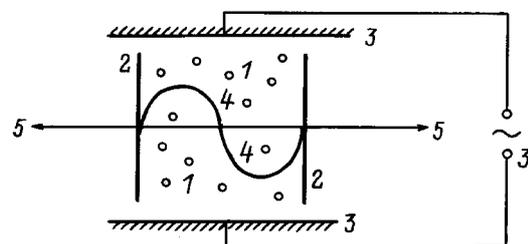


Схема сазера с электрической накачкой: 1 — активная среда; 2 — твердые стенки резонатора; 3 — электромагнитная система, создающая периодическое электрическое поле; 4 — полезная акустическая мода; 5 — звуковое излучение.

следующими уравнениями:

$$\alpha = \alpha(\mathbf{r}, R_0, t) = -4\pi \int_0^\infty (\operatorname{Re} A)n(\mathbf{r}, R_0, t)dR_0, \quad (4)$$

$$\beta = \beta(\mathbf{r}, R_0, t) = -4\pi \int_0^\infty (\operatorname{Im} A)n(\mathbf{r}, R_0, t)dR_0, \quad (5)$$

где

$$A = \frac{R_0}{\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1 + i\delta} \quad (6)$$

— амплитуда рассеяния звука на пузырьке с радиусом R_0 и резонансной частотой ω_0 ; δ — константа поглощения.

Величина $n(\mathbf{r}, R_0, t)$ является функцией распределения пузырьков. В начальный момент времени предполагается, что все пузырьки распределены пространственно однородно. Уравнение (2) описывает поступательное движение пузырька в звуковом поле. Здесь \mathbf{U} — скорость поступательного движения, коэффициент ξ имеет вид

$$\xi = 4\rho_l\mu_l\omega^2R_0, \quad (7)$$

где ρ_l и μ_l — соответственно плотность и вязкость чистой жидкости.

Уравнение (3) является уравнением баланса числа частиц в элементе фазового объема d^3rdR_0 (мы пренебрегаем коагуляцией частиц).

Будем исследовать одномерные решения системы (1)–(3) (т.е. считать, что все величины изменяются только вдоль оси z). Выделим явно в P' быстроосциллирующий множитель $\exp(i\omega t)$

$$P'(\mathbf{r}, t) = \bar{P}(\mathbf{r}, t) \exp(i\omega t). \quad (8)$$

Подставляя (8) в (1), (2), а затем (2) в (3) и применяя процедуру усреднения Боголюбова–Митропольского [5] по высокочастотной составляющей $\exp(i\omega t)$, получим следующую систему укороченных уравнений:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c_l^2} - \frac{2i\omega}{c_l^2} \frac{\partial}{\partial t} \right] \bar{P} = (\alpha + i\beta)(\bar{P} + P_E), \quad (9)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{A}{\xi} \frac{\partial}{\partial z} \left[n(\bar{P} + P_E) \frac{\partial \bar{P}^*}{\partial z} \right] + \text{к.с.} \quad (10)$$

Анализ уравнений на начальном этапе генерации

Исследуем процесс усиления полезной моды в закрытом резонаторе с абсолютно твердыми отражающими стенками на начальном этапе работы сазера. Введем отклонение $n'(\mathbf{r}, R_0, t)$ от начальной функции распределения $n_0(R_0)$, т.е.

$$n(\mathbf{r}, R_0, t) = n_0(R_0) + n'(\mathbf{r}, R_0, t) \quad (11)$$

и $\alpha = \alpha_0 + \alpha'$, $\beta = \beta_0 + \beta'$.

Полагая $|n'| \ll n_0$ и $|\bar{P}| \ll P_E$, линеаризуем систему (9), (10) по n' и \bar{P}

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c_l^2} - \frac{2i\omega}{c_l^2} \frac{\partial}{\partial t} - \alpha_0 - i\beta_0 \right] \bar{P} = (\alpha' + i\beta')P_E, \quad (12)$$

$$\frac{\partial n'}{\partial t} = -\frac{n_0 P_E}{\xi} \left[A \frac{\partial^2 \bar{P}^*}{\partial z^2} + A^* \frac{\partial^2 \bar{P}}{\partial z^2} \right]. \quad (13)$$

При выводе этих уравнений было учтено, что $|\alpha_0 + i\beta_0| \ll \omega^2/c_l^2$ [1,2]. Будем искать выражение для полезной моды в виде стоячей волны

$$\bar{P}(z, t) = P_0(t) \cos(k_L z), \quad (14)$$

где $k_L = (\pi m)/L$, $m = 1, 2, \dots$

Тогда, подставляя (14) в (13), находим

$$\frac{\partial n'}{\partial t} = \frac{n_0 P_E k_L^2}{\xi} (A P_0^* + A^* P_0) \cos(k_L z). \quad (15)$$

Дифференцируя уравнение (12) по t и подставляя в него выражения (14) и (15), получим уравнение, определяющее $P_0(t)$,

$$\left[\frac{\omega^2}{c_l^2} - k_L^2 - \alpha_0 - i\beta_0 - \frac{2i\omega}{c_l^2} \frac{d}{dt} \right] \frac{dP_0}{dt} = -4\pi P_E^2 k_L^2 (I_1 P_0^* + I_2 P_0), \quad (16)$$

где

$$I_1 = \int_0^\infty \frac{n_0 A^2}{\xi} dR_0, \quad I_2 = \int_0^\infty \frac{n_0 A A^*}{\xi} dR_0. \quad (17)$$

Для вычисления величин α_0 , β_0 и интегралов (17) необходимо знать явный вид функции распределения в начальный момент времени $n_0(R_0)$. Рассмотрим случаи однородного и неоднородного начального распределения пузырьков по радиусам.

О д н о р о д н о е р а с п р е д е л е н и е. В этом случае все пузырьки имеют одинаковый радиус R_0 , т.е. $n_0(R_0) = N_0 \delta(R_0 - R_0)$. Тогда уравнение (16) принимает следующий вид:

$$\left[\frac{\omega^2}{c_l^2} - k_L^2 - \alpha_0 - i\beta_0 - \frac{2i\omega}{c_l^2} \frac{d}{dt} \right] \frac{dP_0}{dt} = -\frac{P_E^2 k_L^2 \alpha_0^2}{4\pi N_0 \xi} (P_0^* + P_0), \quad (18)$$

где $\alpha_0 + i\beta_0 = -4\pi A N_0$.

При выводе уравнения (18) предполагалось, что пузырьки лежат вдали от области резонанса и диссипация энергии в активной среде мала, т.е. $|\beta_0| \ll |\alpha_0|$. Будем искать решение этого уравнения в виде

$$P_0(t) = A^+ \exp(i\omega' t) + A^- \exp(-i\omega'^* t). \quad (19)$$

Тогда при условии $|A^-| \ll |A^+|$ нетрудно получить

$$\operatorname{Re}(\omega') \approx -\frac{c_l^2}{2\omega} \left(\frac{\omega^2}{c_l^2} - \alpha_0 - k_L^2 \right) \equiv -\frac{\delta_L \omega}{2}, \quad (20)$$

$$\operatorname{Im}(\omega') \approx \frac{c_l^2}{2\omega} \left(\beta_0 + \frac{\alpha_0^2 k_L^2 P_E^2}{4\pi N_0 \xi \operatorname{Re}(\omega')} \right). \quad (21)$$

Реальная часть ω' (20) определяет отстройку круговой частоты накачки ω от резонансной частоты резонатора $\omega_L = c_l \sqrt{k_L^2 + \alpha_0}$, мнимая часть ω' (21) — инкремент усиления полезной моды [2,4]. Поскольку $\beta_0/\alpha_0 \sim \delta$, то из (21) легко получить, что для начала генерации необходимо, чтобы выполнялись условия $\delta_L > 0$ и

$$P_E > P_{st} = \frac{1}{k_L} \sqrt{4\rho_l \mu_l \omega^2 \delta |\operatorname{Re}(\omega')|}. \quad (22)$$

Величина P_{st} является стартовым (пороговым) давлением накачки [2,4].

Неоднородное распределение. Как правило, экспериментально наблюдаемое распределение пузырьков по радиусам характеризуется следующей зависимостью:

$$n_0(R_0) \approx a R_0^{-3}, \quad (23)$$

где константа a определяет локальное газосодержание жидкости.

В предыдущей работе [4] было показано, что в случае неоднородного распределения пузырьков по радиусам основную роль будут играть пузырьки с резонансными частотами, близкими к частоте накачки ω . Действительно, поскольку диссипация энергии в среде мала, т.е. $\delta \ll 1$, то подынтегральные выражения в (4), (5) и (17) будут иметь резкий максимум при $\omega = \omega_0$. С учетом этого несложно вычислить асимптотики этих интегралов при $\delta \rightarrow 0$ [4]. В результате имеем

$$\alpha_0 \approx 0, \quad \beta_0 \approx 2\pi^2 / R_\omega^3 n_0(R_\omega), \quad (24)$$

$$I_1 \approx 0, \quad I_2 \approx \frac{\pi n_0(R_\omega) R_\omega^3}{2\xi(R_\omega)\delta}, \quad (25)$$

где R_ω — радиус пузырька с резонансной частотой ω .

Подставляя (24), (25) в уравнение (16) и ища решение (16), как и в случае однородного распределения, в виде (19), получим выражения, аналогичные (20) и (21),

$$\operatorname{Re}(\omega') \approx -\frac{c_l^2}{2\omega} \left(\frac{\omega^2}{c_l^2} - k_L^2 \right) \equiv -\frac{\delta_L \omega}{2}, \quad (26)$$

$$\operatorname{Im}(\omega') \approx \frac{c_l^2}{2\omega} \left(\beta_0 + \frac{2\pi^2 P_E^2 k_L^2 n_0(R_\omega) R_\omega^3}{\xi(R_\omega)\delta \operatorname{Re}(\omega')} \right). \quad (27)$$

Легко убедиться в том, что стартовые условия, следующие из (26) и (27), совпадают с полученными в предыдущем случае.

Нелинейный режим работы сазера

Рассмотрим теперь работу сазера в произвольные моменты времени. Зависимость давления от времени и координат по-прежнему будем искать в виде (14). Умножая уравнение (9) на $\cos k_L z$ и усредняя по пространственной

координате, получаем

$$\left[\frac{\omega^2}{c_l^2} - k_L^2 - \frac{2i\omega}{c_l^2} \frac{d}{dt} \right] P_0(t) = -8\pi P_0 \int_0^\infty A n_2 dR_0 - 8\pi P_E \int_0^\infty A n_1 dR_0, \quad (28)$$

где

$$n_1 = n_1(t) = \langle n(z, t) \cos k_L z \rangle,$$

$$n_2 = n_1(t) = \langle n(z, t) \cos^2 k_L z \rangle,$$

...

$$n_i = n_i(t) = \langle n(z, t) \cos^i k_L z \rangle.$$

Подставляя (14) в (10) и умножая уравнение (10) последовательно на $\cos k_L z$, $\cos^2 k_L z$... и т.д., после усреднения по z получаем бесконечную цепочку уравнений (типа цепочки Боголюбова–Борна–Грина–Кирквуда–Ивона в статистической физике [6])

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} = \frac{k_L^2}{\xi} [(A^* P_0 + A P_0^*) P_E (n_0 - n_2) + (A + A^*) P_0 P_0^* (n_1 - n_3)], \quad (29)$$

$$\frac{\partial n_2}{\partial t} = \frac{2k_L^2}{\xi} [(A^* P_0 + A P_0^*) P_E (n_1 - n_3) + (A + A^*) P_0 P_0^* (n_2 - n_4)]. \quad (30)$$

Для того чтобы проанализировать эту бесконечную систему уравнений, необходимо сделать ряд допущений (обычно эту цепочку обрывают на каком-либо номере). Заменим приближенно в выражениях для n_2 , n_3 величину $\cos^2 k_L z$ на $1/2$, тогда $n_2 \approx n_0/2$, $n_3 \approx n_1/2$. В результате вместо (29) приближенно имеем

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} - \frac{k_L^2 (A + A^*)}{2\xi} P_0 P_0^* n_1 \approx \frac{k_L^2 P_E n_0}{2\xi} (A^* P_0 + A P_0^*). \quad (31)$$

Выделим из $P_0(t)$ осциллирующий множитель

$$P_0(t) = \exp(i\omega' t) \Phi_0(t), \quad (32)$$

где ω' — смещение частоты, которое будет определено ниже.

Подставляя (32) в (31) и усредняя (31) по фазе $\phi = \omega' t$, находим

$$n_1 = a \exp(i\omega' t) + a^* \exp(-i\omega' t), \quad (33)$$

где

$$a = \frac{k_L^2 n_0 \Phi_0 P_E A^*}{2i\xi \omega' \left(1 + \frac{ik_L^2 (A + A^*)}{2\xi \omega'} |\Phi_0|^2 \right)}. \quad (34)$$

Функция n_1 характеризует неоднородность плотности пространственного распределения пузырьков. Выражение (33) показывает, что эта плотность осциллирует с круговой частотой, равной сдвигу частоты накачки ω' .

Если подставить (32)–(34) в уравнение (28) и усреднить его по медленной фазе $\phi = \omega't$, то получим уравнение для смещения частоты

$$\frac{\omega^2}{c_l^2} + \frac{2\omega\omega'}{c_l^2} - k_L^2 - \alpha_0 = \frac{2\pi P_E^2 k_L^4 |\Phi_0|^2}{\omega'^2} F_1 \quad (35)$$

и для нарастания полезной моды

$$\frac{d\Phi_0}{dt} = -\frac{\beta_0 c_l^2}{2\omega} \left(1 + \frac{4\pi P_E^2 k_L^2}{\omega' \beta_0} F_2 \right) \Phi_0, \quad (36)$$

где

$$F_1 = \int_0^\infty \frac{n_0 |A|^2 (A + A^*)}{\xi^2 \left(1 + \left(\frac{k_L^2 (A + A^*)}{2\xi\omega'} |\Phi_0|^2 \right)^2 \right)} dR_0, \quad (37)$$

$$F_2 = \int_0^\infty \frac{n_0 |A|^2}{\xi \left(1 + \left(\frac{k_L^2 (A + A^*)}{2\xi\omega'} |\Phi_0|^2 \right)^2 \right)} dR_0. \quad (38)$$

На начальном этапе генерации, когда Φ_0 мало, уравнения (35) и (36) дают ($F_2 \approx I_2$)

$$\omega' = -\delta_L \omega / 2, \quad (39)$$

$$\frac{d\Phi_0}{dt} = -\frac{\beta_0 c_l^2}{2\omega} \left(1 - \frac{P_E^2}{P_{st}^2} \right) \Phi_0. \quad (40)$$

Полученные выражения (39), (40) справедливы на начальном этапе работы сазера как для случая однородного, так и для случая неоднородного распределения пузырьков по радиусам. Формула (39) ясно показывает, что в начале генерации результирующая круговая частота ($\omega + \omega'$) излучения сазера определяется собственным волновым числом резонатора. В более поздние моменты времени более существенную роль начинают играть нелинейные члены (правая часть уравнения (35)), что приводит к дополнительному сдвигу ω' .

Как уже отмечалось выше, если в начальный момент времени $P_E > P_{st}$, то уравнение (36) описывает возрастание амплитуды полезной моды вплоть до значений, при которых правая часть (36) обращается в нуль. Это позволяет оценить максимальное значение амплитуды давления полезной моды.

В случае однородного распределения пузырьков по радиусам имеем

$$|P_{0\max}| = P_E \left(\frac{P_E^2}{P_{st}^2} - 1 \right)^{1/4} \left(\frac{|\alpha_0|}{\beta_0} \right)^{1/2}. \quad (41)$$

Поскольку $\frac{|\alpha_0|}{\beta_0} \sim \frac{1}{\delta}$, то из (41) следует

$$|P_{0\max}| = P_E \left(\frac{P_E^2}{P_{st}^2} - 1 \right)^{1/4} \delta^{-1/2}. \quad (42)$$

В случае неоднородного распределения пузырьков по радиусам несложно вычислить асимптотики интегралов

(37), (38) при $\delta \rightarrow 0$

$$F_1 \approx 0, \quad F_2 \approx \frac{\pi n_0 (R_\omega) R_\omega^3}{\delta \xi (R_\omega) \sqrt{\left| \frac{\Phi_0}{P_{st}} \right|^4 + 4}}. \quad (43)$$

С учетом этого имеем

$$|P_{0\max}| = \sqrt{2} P_E \left(\left(\frac{P_E}{P_{st}} \right)^4 - 1 \right)^{1/4}. \quad (44)$$

Заключение

Таким образом, в процессе работы сазер выходит в режим насыщения. Этот эффект аналогичен насыщению в теории лазеров на свободных электронах.

Список литературы

- [1] *Zavtrak S.T.* // Phys. Rev. E. 1995. Vol. 51. P. 2480–2484.
- [2] *Zavtrak S.T.* // Phys. Rev. E. 1995. Vol. 51. P. 3767–3769.
- [3] *Завтрак С.Т.* // ЖТФ. 1995. Т. 65. Вып. 6. С. 123–132.
- [4] *Завтрак С.Т., Волков И.В.* // ЖТФ. 1997. Т. 67. Вып. 4. С. 92–100.
- [5] *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: ГИФМЛ, 1958. 354 с.
- [6] *Исихара А.* Статистическая физика. Пер. с англ. М.: Мир, 1973. 472 с.