

01;03

Капиллярные колебания плоской заряженной поверхности жидкости с конечной проводимостью

© С.О. Ширяева, А.И. Григорьев, В.А. Коромыслов

Ярославский государственный университет,
150000 Ярославль, Россия

(Поступило в Редакцию 10 апреля 1996 г.)

Выведено и проанализировано дисперсионное уравнение для спектра капиллярных движений на заряженной плоской поверхности жидкости с учетом конечности скорости перераспределения заряда при выравнивании потенциала вследствие волновой деформации свободной поверхности. Показано, что при малых проводимостях жидкости неустойчивость сильно заряженной поверхности происходит в результате увеличения амплитуды аperiодических зарядово-релаксационных движений жидкости, а не волновых, как это имеет место для хорошо проводящих сред. Влияние конечности скорости перераспределения заряда на структуру спектра капиллярных движений жидкости и условия реализации неустойчивости ее заряженной поверхности существенно, когда характерное время релаксации заряда сравнимо по величине с характерным временем выравнивания волновых деформаций свободной поверхности жидкости.

Введение

В связи с широким спектром разнообразных приложений в физике, геофизике, технике и технологии много работ посвящено исследованию закономерностей реализации капиллярного волнового движения на заряженной поверхности жидкости [1]. Однако некоторые частные вопросы, связанные с этой темой, изучены не достаточно полно. В частности, сказанное относится к вопросу о влиянии конечности скорости выравнивания потенциала в реальной жидкости на особенности реализации капиллярных движений жидкости и их устойчивость. Незначительное количество теоретических исследований, проведенных с учетом конечности проводимости жидкости (см., например, [2–5]), не внесли полной ясности в специфические особенности реализации феномена. Предварительный анализ обсуждаемой задачи [5] показывает, что учет конечности скорости выравнивания электрического потенциала в реальной жидкости приводит, во-первых, к увеличению порядка дисперсионного уравнения, а во-вторых, к увеличению декрементов затухания всех ветвей. Кроме того, при варьировании физических параметров задачи (поверхностной плотности заряда, диэлектрической проницаемости, удельной электропроводности) происходит деформация и перезамыкание друг на друга различных ветвей дисперсионного уравнения, что свидетельствует об изменении физического смысла реализующихся в новых условиях движений жидкости.

1. Рассмотрим задачу о расчете спектра капиллярных волн на граничащей с вакуумом плоской поверхности бесконечно глубокой жидкости с плотностью ρ , проводимостью γ , вязкостью ν , коэффициентом поверхностного натяжения σ , диэлектрической проницаемостью ϵ , находящейся под воздействием гравитационного поля \mathbf{g} и внешнего электростатического поля, вектор напряженности \mathbf{E}_0 которого направлен перпендикулярно плоской поверхности жидкости ($\mathbf{E}_0 \parallel -\mathbf{g}$). Расположим систему

координат так, чтобы ось z была направлена вертикально вверх, перпендикулярно поверхности, а ось x — по направлению движения плоской капиллярной волны. Пусть функция $\xi(x, t)$ описывает малое возмущение равновесной плоской поверхности жидкости, а $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$ — поле скоростей движения жидкости, вызванного возмущением ξ , имеющие тот же порядок малости.

Система уравнений гидродинамики, определяющая решение сформулированной задачи, линеаризованная по малым величинам \mathbf{U} , ξ , имеет вид [6]

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla P(\mathbf{U}) + \nu \Delta \mathbf{U}; \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0; \quad (2)$$

$$z \rightarrow -\infty: \quad \mathbf{U} \rightarrow 0; \quad (3)$$

$$z = 0: \quad -\frac{\partial \xi(x, t)}{\partial t} + U_z = 0; \quad (4)$$

$$z = 0: \quad (\Pi_\tau^{(2)} - \Pi_\tau^{(1)}) - \rho\nu [\mathbf{n}(\boldsymbol{\tau} \nabla) \mathbf{U} + \boldsymbol{\tau}(\mathbf{n} \nabla) \mathbf{U}] = 0; \quad (5)$$

$$z = 0: \quad -P(\mathbf{U}) + \rho g \xi + 2\rho\nu \mathbf{n}(\mathbf{n} \nabla) \mathbf{U} - P_E(\xi) + P_\sigma(\xi) = 0, \quad (6)$$

где $P(\mathbf{U})$, $P_E(\xi)$, $P_\sigma(\xi)$ — добавки к давлению внутри жидкости при наличии электрического поля, давлению электрических сил и давлению сил поверхностного натяжения, вызванные возмущением поверхности ξ и имеющие первый порядок малости по \mathbf{U} и ξ ; \mathbf{n} , $\boldsymbol{\tau}$ — единичные вектора нормали и касательных к поверхности жидкости; $\Pi_\tau = (\epsilon/4\pi) E_n E_\tau$; E_n , E_τ — нормальная и касательная компоненты напряженности электрического поля; индекс 1 относится к жидкости, а 2 — к внешней среде.

Дополним систему (1)–(6) уравнениями, учитывающими конечность скорости перераспределения электрического заряда при выравнивании потенциала на колеблющейся поверхности жидкости,

$$\operatorname{div} \mathbf{E}_j = 0; \quad \mathbf{E}_j = -\nabla \Phi_j \quad (j = 1, 2); \quad (7)$$

$$z \rightarrow \infty: \quad \mathbf{E}_2 \rightarrow \mathbf{E}_0; \quad z \rightarrow -\infty: \quad \mathbf{E}_1 \rightarrow 0; \quad (8)$$

$$z = \xi: \quad E_{2n} - \varepsilon E_{1n} = 4\pi\kappa; \quad \Phi_1 = \Phi_2; \quad (9)$$

$$z = \xi: \quad -\gamma(\mathbf{nE}_1) + (\mathbf{U}\nabla_\Sigma)\kappa + \frac{\partial\kappa}{\partial t} = 0;$$

$$\nabla_\Sigma \equiv \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{n}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{n}_y. \quad (10)$$

Φ_i — электрический потенциал; $\kappa(x, t)$ — поверхностная плотность заряда (в равновесном состоянии $\kappa(x, t) \equiv \kappa_0 = \text{const}: 4\pi\kappa_0 = E_0$).

Отметим, что в линейном по малым величинам приближении второй (конвективный) член в (10) пропадет, так как имеет второй порядок малости, поскольку пропорционален произведению $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$ на добавку $\kappa(x, t)$ к поверхностной плотности заряда, возникающую вследствие деформации поверхности жидкости и имеющую величину $\sim \xi$.

2. Используя метод скаляризации, подробно описанный в [7], представим поле скоростей \mathbf{U} в виде суммы трех ортогональных полей

$$\mathbf{U}(\mathbf{r}, t) = \sum_{j=1}^3 \hat{\mathbf{N}}_j \Psi_j(\mathbf{r}, t), \quad (11)$$

где $\Psi_j(\mathbf{r}, t)$ — скалярные функции, определяемые видом поля $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$; $\hat{\mathbf{N}}_j$ — векторные операторы, удовлетворяющие соотношениям ортогональности и условиям коммутативности с оператором Лапласа,

$$\hat{\mathbf{N}}_j \cdot \hat{\mathbf{N}}_k = 0 \quad (\text{при } j \neq k); \quad \Delta \hat{\mathbf{N}}_j = \hat{\mathbf{N}}_j \Delta \quad (j = 1, 2, 3) \quad (12)$$

имеют вид

$$\hat{\mathbf{N}}_1 = \nabla; \quad \hat{\mathbf{N}}_2 = \nabla \times \mathbf{e}_z; \quad \hat{\mathbf{N}}_3 = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{e}_z). \quad (13)$$

Оператор $\hat{\mathbf{N}}_1$ выделяет потенциальную часть движения жидкости, $\hat{\mathbf{N}}_2$ и $\hat{\mathbf{N}}_3$ — его вихревые компоненты.

Подставляя разложение (11) в систему векторных уравнений (1), (2) и приняв, что собственные значения операторов $\hat{\mathbf{N}}_j^+ \cdot \hat{\mathbf{N}}_j$ отличны от нуля, получим эквивалентную (1), (2) систему скалярных уравнений

$$P(\mathbf{U}) = -\rho \frac{\partial \Psi_1}{\partial t}; \quad (14)$$

$$\Delta \Psi_j - (1 - \delta_{1j}) \frac{1}{\nu} \frac{\partial \Psi_j}{\partial t} = 0 \quad (j = 1, 2, 3). \quad (15)$$

Подставив разложение (11) в (3)–(6), преобразуем граничные условия для векторной функции \mathbf{U} в условия

для скалярных функций Ψ_j и после несложных преобразований получим

$$z \rightarrow -\infty: \quad \Psi_1 + \frac{\partial \Psi_3}{\partial z} = 0;$$

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial z} - \frac{\partial^2 \Psi_3}{\partial x^2} = 0; \quad \Psi_2 = 0. \quad (16)$$

Кинематическое граничное условие на свободной поверхности жидкости примет вид

$$z = 0: \quad -\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \Psi_1}{\partial z} - \frac{\partial^2 \Psi_3}{\partial x^2} = 0. \quad (17)$$

Граничное условие (5) для касательных компонент тензора напряжений в связи с возможностью выбора в качестве вектора касательной $\boldsymbol{\tau}$ ортов координатных осей \mathbf{e}_x и \mathbf{e}_y распадется на два

$$z = 0: \quad (\Pi_{\tau(x)}^{(2)} - \Pi_{\tau(x)}^{(1)}) - \rho\nu \frac{\partial}{\partial x} \times \left[2 \frac{\partial \Psi_1}{\partial z} + \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \Psi_3 \right] = 0;$$

$$z = 0: \quad (\Pi_{\tau(y)}^{(2)} - \Pi_{\tau(y)}^{(1)}) + \rho\nu \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial x \partial z} = 0. \quad (18)$$

Граничное условие (6) для нормальной компоненты тензора напряжений с учетом уравнения (14) примет вид

$$z = 0: \quad \rho \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} + \rho g \xi + 2\rho\nu \left\{ \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial \Psi_3}{\partial z} \right\} - p_E(\xi) + P_\sigma(\xi) = 0. \quad (19)$$

Система уравнений (14), (15) с граничными условиями (16)–(19) представляет гидродинамическую часть задачи в скаляризованном виде.

3. Примем, что поле скоростей \mathbf{U} и возмущение свободной поверхности ξ зависят от времени t экспоненциально: $U \sim \exp(\omega t)$; $\xi \sim \exp(\omega t)$, где ω — комплексная частота. Тогда решения системы (15), удовлетворяющие условиям (16), в декартовых координатах можно записать в виде

$$\Psi_1(\mathbf{r}, t) = \int_0^\infty dk B_1 \exp(kz) \exp(ikx) \exp(\omega t);$$

$$\Psi_j(\mathbf{r}, t) = \int_0^\infty dk B_j \exp\left(\sqrt{k^2 + \frac{\omega}{\nu}} z\right) \times \exp(ikx) \exp(\omega t) \quad (j = 2, 3), \quad (20)$$

здесь i — мнимая единица.

Функция $\xi(x, t)$, описывающая возмущение поверхности жидкости, также может быть представлена в виде разложения по плоским волнам

$$\xi(x, t) = \int_0^\infty dk C \exp(ikx) \exp(\omega t). \quad (21)$$

В (20), (21) B_j, C — константы, коэффициенты разложений, связь между которыми определяется граничными условиями (17)–(19).

Чтобы удовлетворить динамическим граничным условиям (18), (19), воспользуемся полученными в приложении выражениями для электрических частей касательных компонент тензора напряжений (П15), (П16) и для добавки к давлению электрических сил $P_E(\xi)$ (П14), а также известным выражением для добавки к давлению сил поверхностного натяжения P_σ в линейном по ξ приближении [6]

$$P_\sigma(\xi) \approx -\sigma \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}. \quad (22)$$

Удовлетворяя граничным условиям (17)–(19) с учетом упомянутых соотношений, можно получить дисперсионные уравнения, характеризующие капиллярные движения жидкости. Отметим, что речь идет о двух дисперсионных уравнениях, поскольку задача определения вихревых движений, описываемых функцией $\Psi_2(\mathbf{r}, t)$ полностью автономна, не зависит от функций $\Psi_1(\mathbf{r}, t)$, $\Psi_3(\mathbf{r}, t)$ и $\xi(x, t)$ (т.е. не оказывает влияния на формирование рельефа поверхности жидкости) и приводит к отдельному дисперсионному уравнению. Однако рассмотрим сначала краевую задачу для функций $\Psi_1(\mathbf{r}, t)$, $\Psi_3(\mathbf{r}, t)$ и $\xi(x, t)$.

Подставляя решения (20), (21) в граничные условия (17)–(19), учитывая выписанные выражения (38), (39) и (22), получим однородную систему трех линейных уравнений относительно коэффициентов B_1, B_3, C , которая имеет нетривиальное решение, когда ее определитель обращается в нуль, — это условие и дает одно из дисперсионных уравнений

$$\begin{aligned} & \frac{k}{\rho}(\sigma k^2 + g\rho) + \left[(\omega + 2k^2\nu)^2 - 4(k^2\nu)^{3/2}\sqrt{\omega + \nu k^2} \right] \\ & - \frac{k^2}{\rho} \frac{4\pi\kappa_0^2}{4\pi\gamma + \omega(\varepsilon + 1)} \left\{ (4\pi\gamma + \omega\varepsilon) \right. \\ & \left. + (\omega + 2k^2\nu) - 2(k^2\nu)^{1/2}\sqrt{\omega + \nu k^2} \right\} = 0. \quad (23) \end{aligned}$$

Перейдем к безразмерным переменным в которых $\rho = g = \sigma = 1$. Тогда все величины (за которыми оставим прежние обозначения) будут выражены в долях характерных значений

$$k_* = \left(\frac{\rho g}{\sigma}\right)^{1/2}, \quad \omega_* = \left(\frac{\rho g^3}{\sigma}\right)^{1/4}, \quad \gamma_* = \left(\frac{\rho g^3}{\sigma}\right)^{1/4},$$

$$\kappa_* = (\rho g \sigma)^{1/4}, \quad \nu_* = \left(\frac{\sigma^3}{\rho^3 g}\right)^{1/4}.$$

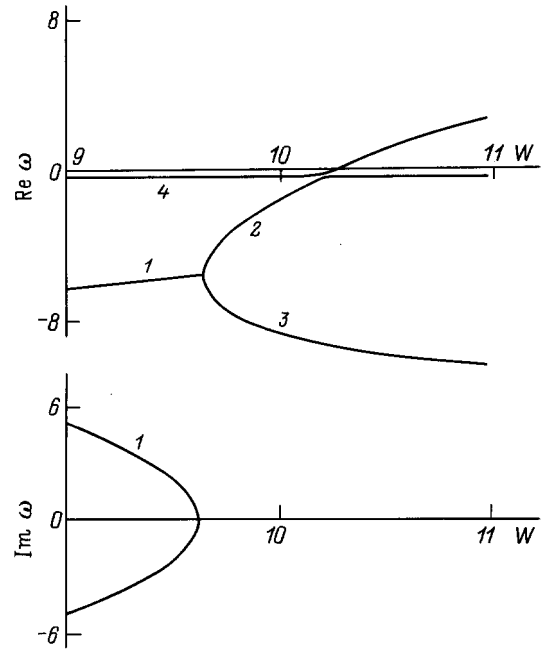


Рис. 1. Зависимости вещественной и мнимой компонент безразмерной частоты ω капиллярных движений жидкости от величины безразмерного параметра W , характеризующего давление электрического поля (плотность поверхностного заряда) на свободную поверхность жидкости, рассчитанные при $\nu = 0.1, \gamma = 0.1$.

Тогда дисперсионное уравнение (23) примет вид

$$\begin{aligned} & k(K^2 + 1) + \left[(\omega + 2k^2\nu)^2 - 4(k^2\nu)^{3/2}\sqrt{\omega + \nu k^2} \right] \\ & - \frac{Wk^2}{4\pi\gamma + \omega(\varepsilon + 1)} \left\{ (4\pi\gamma + \omega\varepsilon) + (\omega + 2k^2\nu) \right. \\ & \left. - 2(k^2\nu)^{1/2}\sqrt{\omega + \nu k^2} \right\} = 0, \quad (24) \\ & W = 4\pi\kappa_0^2. \end{aligned}$$

Несложно заметить, что уравнение (24) имеет более высокий порядок, чем дисперсионное уравнение без учета эффекта релаксации заряда [7–11] (получающееся из (24) при $\gamma \rightarrow \infty$). Кроме ветвей капиллярных волн, обычных для плоской заряженной поверхности идеально проводящей жидкости, появляются ветви затухающих движений жидкости, связанных с перераспределением заряда по поверхности жидкости при ее деформации, которые естественно назвать ветвями зарядово-релаксационных движений.

Результаты численных расчетов по (24) для $k = 10$ при $\varepsilon = 100$ и различных значениях вязкости ν и проводимости γ проиллюстрированы рис. 1–4 в виде зависимостей вещественной и мнимой компонент безразмерной частоты от безразмерного давления электрического поля на невозмущенную поверхность жидкости. Несложно заметить, что кроме ветвей капиллярных

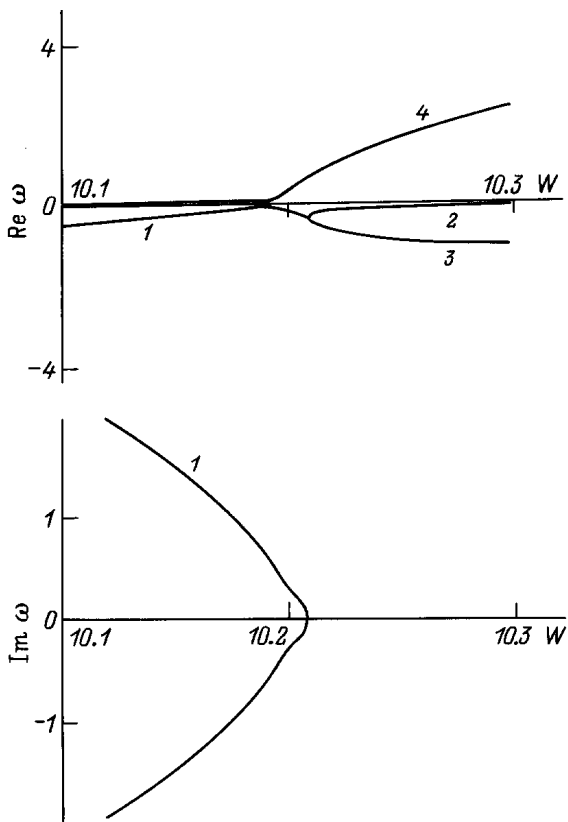


Рис. 2. То же, что и на рис. 1, при $\nu = 0.01$, $\gamma = 0.1$.

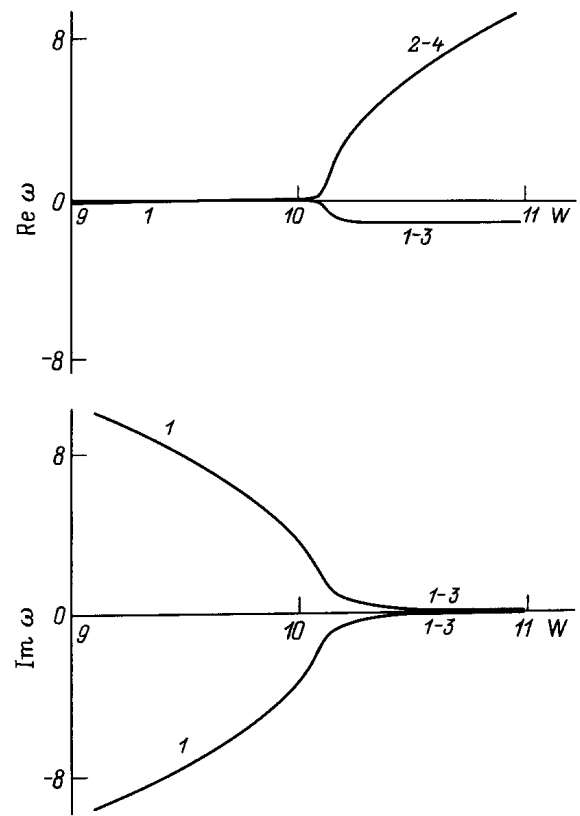


Рис. 4. То же, что и на рис. 1, при $\nu = 0.001$, $\gamma = 10$.

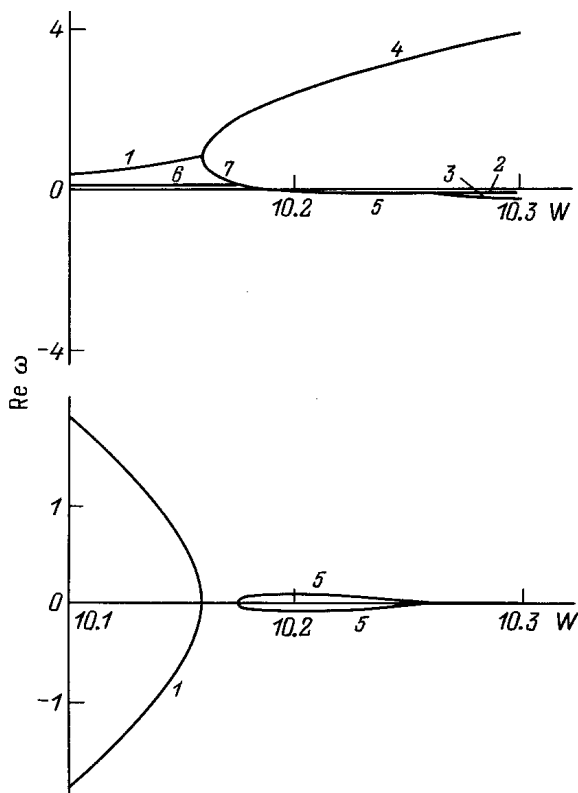


Рис. 3. То же, что и на рис. 1, при $\nu = 0.001$, $\gamma = 0.1$.

движений жидкости, обычных для плоской заряженной поверхности (ветви 1–3), появляется ряд ветвей 4–7 движений жидкости, связанных с перераспределением заряда по поверхности жидкости при ее деформации. Ветви дисперсионного уравнения, лежащие на нижнем листе двулистной римановой поверхности, на которой определено дисперсионное уравнение (24), и, следовательно, не реализующиеся на практике, на рисунках приводятся лишь в порядке исключения, когда это облегчает понимание смысла новых ветвей. На рис. 1–4 зависимости $\text{Re } \omega(W)$ приведены для диапазона значений W , содержащего точку перехода капиллярной ветви моды с $k = 10$ к неустойчивому состоянию.

Как показывают расчеты (и очевидно из физического смысла), эффект конечности скорости выравнивания потенциала вдоль поверхности жидкости существен при малых проводимостях γ . Из рис. 1–3 видно также, что существенную роль в структурировании зарядово-релаксационных движений жидкости, играет вязкость жидкости, и что с увеличением вязкости структура ветвей этих движений заметно усложняется.

Отметим, что для идеальной, но реальнопроводящей жидкости невозможен корректный учет конечности скорости перераспределения заряда при капиллярных движениях жидкости, ввиду того что зарядово-релаксационные движения порождаются тангенциальными напряжениями на поверхности жидкости, которые

в идеальной жидкости не учитываются (на свободной поверхности идеальной жидкости отсутствуют граничные условия для тангенциальной компоненты тензора напряжений).

На рис. 1 бросается в глаза, что по мере увеличения W неустойчивость претерпевает зарядово-релаксационное движение 4, а не ветвь 2 капиллярных движений, как это имеет место для ситуации идеальнопроводящей жидкости. Из рис. 1 и 2 видно, что с увеличением вязкости жидкости при прочих равных условиях ветви 1–3 капиллярных движений поднимаются к оси абсцисс. Интересно, что в интервале $10.1 < W \leq 10.2$ инкремент неустойчивости зарядово-релаксационных волн сразу после перехода при $W = 10.1$ ветви 4 из области отрицательных значений $\text{Re } \omega$ в область положительных при увеличении W до $W \approx 10.2$ практически не изменяется по величине, оставаясь весьма малым, и быстрое увеличение инкремента с ростом W начинается при $W \approx 10.2$.

Дальнейшее увеличение вязкости (рис. 3) приводит к существенному усложнению структуры зарядово-релаксационных и капиллярных движений жидкости, связанному с перемещением и перезамыканием различных ветвей дисперсионного уравнения и появлением новых ветвей. Так ветвь 1 частично поднимается в область $\text{Re } \omega > 0$ и замыкается на ветвь 4. Часть ветви 4 в области $\text{Re } \omega > 0$ при $10.1 \leq W \leq 10.2$ оказывается при этом лежащей ниже ветви 1 и перенумеруется как ветвь 6. Кривая 7, связывающая точку пересечения кривых 1 и 4 с точкой пересечения кривых 6 и 4, описывает инкремент аперриодической неустойчивости, уменьшающийся по величине с ростом поверхностной плотности заряда (с увеличением W). Правее точки пересечения ветвей 4 и 6 начинается ветвь 5, переходящая из области $\text{Re } \omega > 0$ в область $\text{Re } \omega < 0$ и имеющая мнимую компоненту, т.е. описывающая периодическое волновое движение: нарастающее со временем в левой части ветви 5 в диапазоне $10.175 \leq W \leq 10.195$ и затухающее в правой части в диапазоне $10.195 \leq W \leq 10.257$. В точке окончания вещественной части ветви 5 порождаются два аперриодически затухающих движения 2 и 3.

Часть ветви 1, лежащая в области $\text{Re } \omega > 0$, уходит в область $\text{Re } \omega < 0$ при $W = 9.91$. В диапазоне же $9.91 \leq W \leq 10.15$ ветвь 1 описывает колебательную неустойчивость капиллярных волн. При $W < 9.91$ ветвь 1 описывает затухающие капиллярные волны.

На рис. 4 обсуждаемые зависимости приведены для жидкости с существенно большей проводимостью $\gamma = 10$. Зависимости $\text{Re } \omega \approx \text{Re } \omega(W)$ и $\text{Im } \omega = \text{Im } \omega(W)$ в этом случае приближаются к соответствующим зависимостям для идеально проводящей жидкости: ветвь 1 описывает затухающие капиллярные волны. Ветвь 2–4 дает инкремент неустойчивости Тонкса–Френкеля. Ветвь 1–3 является непосредственным продолжением ветви 1 и описывает затухающие капиллярные волны. Однако движение, определяемое ветвью 1–3, в реальности является аперриодическим, поскольку частоты этого движения

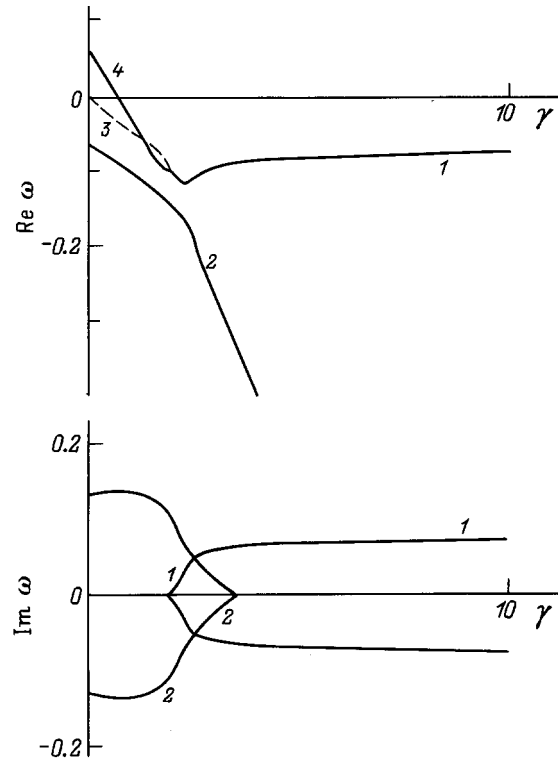


Рис. 5. Зависимости вещественной и мнимой компонент безразмерной частоты ω капиллярных движений жидкости, от величины безразмерного параметра γ , характеризующего проводимость жидкости, рассчитанные при $\varepsilon = 100$, $W = 1.98$, $\nu = 0.1$.

оказываются существенно меньше декрементов их затухания. За один период колебания амплитуда такой волны падает более чем на порядок. Дальнейшее увеличение проводимости γ приводит к тому, что мнимая часть ветви 1–3 исчезает при значении W , соответствующем точке пересечения кривых 1 и 2, а ее вещественная часть с номером 3 описывает чисто аперриодически затухающее движение. Таким образом, область физических характеристик жидкостей, для которых существенно влияние конечности скорости перераспределения заряда на спектр реализующихся капиллярных движений, ограничена средами с малыми проводимостями.

На рис. 5–7 приведены зависимости вещественной и мнимой компонент безразмерной частоты от проводимости жидкости γ при фиксированных W , ε , ν . На рис. 5 приведены расчеты капиллярных движений, связанные с модой $k = 1$ при $\nu = 0.1$ и докритической плотности заряда (при $W = 1.98$). Ветвь 1 описывает затухающее капиллярное волновое движение. Ветвь 2 описывает затухающее волновое зарядово-релаксационное движение. На правом конце вещественной и мнимой компонент ветви 2 эта ветвь уходит на нижний лист римановой поверхности. Ветвь 3 лежит на нижнем листе римановой поверхности и ненаблюдаема. Ветвь 4 имеет зарядово-релаксационную природу, причем часть этой ветви в

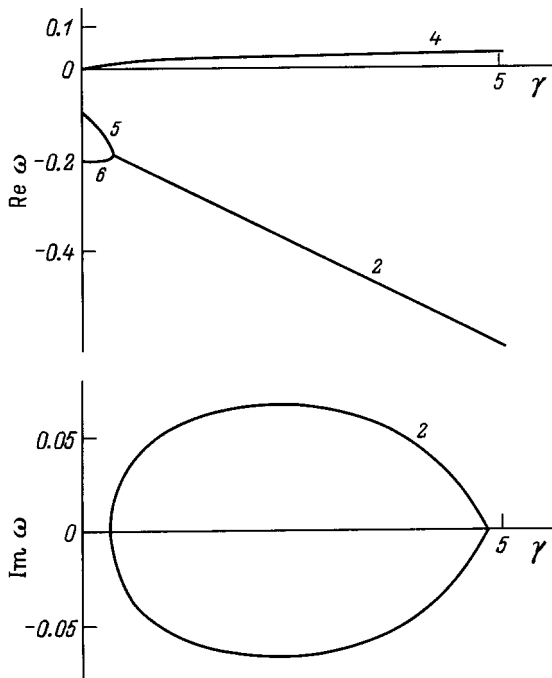


Рис. 6. То же, что и на рис. 5, при $W = 2.06$, $\nu = 0.1$.

области $Re \omega > 0$ описывает аperiodическую неустойчивость, которая реализуется в узком диапазоне проводимостей γ и характеризуется малыми инкрементами (как это видно из рис. 5).

На рис. 6 приведены результаты расчета капиллярных движений моды с $k = 1$, $\nu = 0.1$ при закритическом значении поверхностной плотности заряда (при $W = 2.05$). Инкремент неустойчивости определяется ветвью 4. Ветвь 2 определяет затухающие зарядово-релаксационные волны. Ветви 5 и 6 определяют затухающие аperiodические движения.

На рис. 7 приведены те же зависимости, что и на рис. 6, но при существенно большей вязкости $\nu = 1$. Ветвь 7 лежит на нижнем листе римановой поверхности. Несложно видеть, что величина инкремента неустойчивой ветви 4 с увеличением вязкости существенно снизилась, а область существования зарядово-релаксационных волн сместилась в область больших значений проводимости.

Отметим, что сами зарядово-релаксационные движения порождаются отставанием по фазе между капиллярными движениями жидкости, деформирующими поверхность, и связанными с ними токами перераспределяющегося заряда, диссипирующими энергию на джоулево тепловыделение.

Из физического смысла разбираемого эффекта ясно, что описанное изменение структуры капиллярных движений жидкости реализуется лишь для тех длин волн в плохо проводящих жидкостях, для которых характерное время релаксации электрического заряда $\tau_\epsilon = \epsilon/\gamma$ больше или сравнимо по величине с периодом T_k капил-

лярного волнового движения

$$T_k = 2\pi(\rho/(\sigma k^2 + g\rho - 4\pi\epsilon_0^2 k))^{1/2}.$$

Условие $\tau > T$ не является слишком жестким и может выполняться для высоких волновых чисел капиллярных движений даже такой распространенной в практике электродиспергирования жидкости, не считающейся плохим проводником, как вода.

Интересно отметить, что частоты капиллярных и релаксационных волн качественно различно зависят от вязкости: у капиллярных волн она уменьшается с увеличением вязкости, а у релаксационных увеличивается. По-видимому, это связано с тем, что капиллярное волновое движение генерируется изменением давления на свободной поверхности (с математической точки зрения оно порождается динамическим граничным условием для нормальных компонент тензора напряжений), а появление релаксационных волн связано с возникновением касательных напряжений у поверхности жидкости (с изменением вида динамического граничного условия для касательных компонент тензора напряжений). Связь же частоты и вязкости в динамических граничных условиях для нормальной и касательной компонент тензора напряжений противоположна.

4. Обратимся теперь к краевой задаче для функции $\Psi_2(\mathbf{r}, t)$. Из второго граничного условия (18) для Ψ_2 с учетом решения (20) и выражения (П16), избавляясь на основе фурье-преобразования от интегрирования по k , получим

$$B_2 \left(k \sqrt{k^2 + \frac{\omega}{\nu}} \right) = 0. \tag{25}$$

Этому условию можно удовлетворить двумя способами: 1) потребовать обращения в нуль всех коэффициентов B_2 , что равносильно занулению всей функции

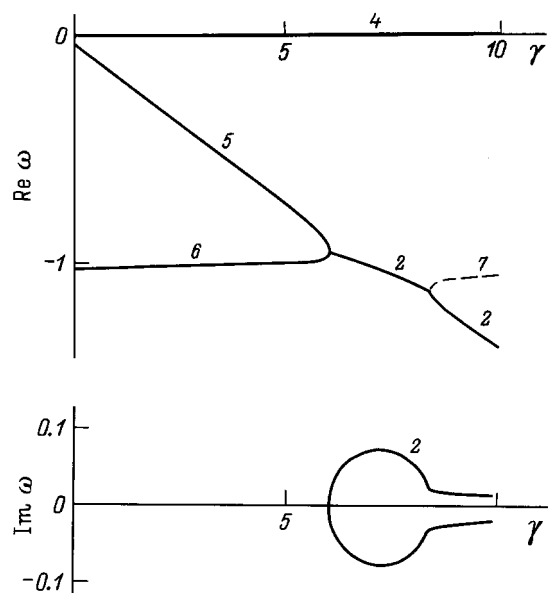


Рис. 7. То же, что и на рис. 5, при $W = 2.05$, $\nu = 1$.

$\Psi_2(\mathbf{r}, t) = 0$; 2) предположить, что функция $\Psi_2(\mathbf{r}, t) \neq 0$, в этом случае дисперсионное уравнение для вихревых движений жидкости, определяемых функцией $\Psi_2(\mathbf{r}, t)$, получится приравнением нулю выражения, стоящего в (25) в круглых скобках. Это дисперсионное уравнение имеет решение $\omega = -\nu k^2$, т.е. соответствующие движения жидкости являются аperiодически затухающими с декрементом $\sim k^2$.

Несложно видеть, что движения этого типа не зависят от конечности скорости перераспределения заряда, как, собственно говоря, и должно быть из общезначимого смысла.

Заключение

Эффект релаксации электрического заряда заметно усложняет структуру спектра капиллярных движений жидкости, приводя к появлению новых капиллярных волновых и аperiодических движений. Для плохопроводящих жидкостей эффект релаксации заряда приводит к появлению периодической неустойчивости, реализующейся при напряженности электрического поля у поверхности жидкости меньшей критической для проявления неустойчивости Тонкса–Френкеля, которая по своей сути является аperiодической неустойчивостью. Условия существенности влияния эффекта релаксации вязкости сводятся к требованию, чтобы характерное время релаксации заряда τ_ϵ было порядка либо больше характерного времени выравнивания деформаций свободной поверхности жидкости или характерного времени вязкой релаксации [12,13]. Последнее требование означает, что обсуждаемый эффект существен для жидкостей, относящихся к вязким в смысле электродиспергирования с мениска на торце капилляра, по которому жидкость подается в разрядную систему [12,13]. Типичными примерами таких жидкостей являются, например, глицерин и циклогексанол.

Приложение

Будем решать задачу (7)–(10), что позволит нам получить выражения для электрической части касательных компонент тензора напряжений ($\Pi_\tau^{(2)} - \Pi_\tau^{(1)}$) и добавки к давлению электрических сил $P_E(\xi)$ с учетом эффекта релаксации электрического заряда, действованные в динамических граничных условиях (18), (19).

Система уравнений (7)–(10) позволяет сформулировать краевую задачу для электрических потенциалов Φ_j

$$\Delta \Phi_j = 0 \quad (j = 1, 2), \quad (\text{П1})$$

$$z \rightarrow -\infty: \Phi_1 \text{ ограничен; } \Phi_2 \rightarrow \Phi_0 = -4\pi \varkappa_0 z;$$

$$z = \xi: \varkappa = \frac{1}{4\pi} \left(\varepsilon \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} \right); \quad \Phi_1 = \Phi_2; \quad (\text{П2})$$

$$z = \xi: \gamma \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} + (\mathbf{U} \nabla_\Sigma) \varkappa + \frac{\partial \varkappa}{\partial t} = 0. \quad (\text{П3})$$

Представим потенциалы Φ_j в виде разложений

$$\Phi_j = \Phi_j^{(0)} + \delta \Phi_j \quad (j = 1, 2), \quad (\text{П4})$$

где $\Phi_j^{(0)}$ — потенциалы при равновесном состоянии системы; $\delta \Phi_j$ — добавки, вызванные возмущением поверхности жидкости ξ , являющиеся малыми того же порядка.

Подставляя (П4) в систему (П1)–(П3), выпишем отдельно краевые задачи для $\Phi_j^{(0)}$ и $\delta \Phi_j$

$$\Delta(\Phi_j^{(0)}) = 0 \quad (j = 1, 2); \quad (\text{П5})$$

$$z \rightarrow -\infty: \Phi_1^{(0)} = \text{const};$$

$$z \rightarrow +\infty: \Phi_2^{(0)} \rightarrow -4\pi \varkappa_0 z;$$

$$z = 0: \Phi_1^{(0)} = \Phi_2^{(0)};$$

$$\Delta(\delta \Phi_j) = 0 \quad (j = 1, 2); \quad (\text{П6})$$

$$z \rightarrow -\infty: \delta \Phi_1 \rightarrow 0; \quad z \rightarrow +\infty: \delta \Phi_2 \rightarrow 0; \quad (\text{П7})$$

$$z = 0: \delta \Phi_1 + \frac{\partial \Phi_1^{(0)}}{\partial z} \xi = \delta \Phi_2 + \frac{\partial \Phi_2^{(0)}}{\partial z} \xi; \quad (\text{П8})$$

$$z = 0: \sigma \frac{\partial(\delta \Phi_1)}{\partial z} + \frac{\omega}{4\pi} \left[\varepsilon \frac{\partial(\delta \Phi_1)}{\partial z} - \frac{\partial(\delta \Phi_2)}{\partial z} \right] = 0. \quad (\text{П9})$$

Краевая задача (П5) для потенциалов $\Phi_j^{(0)}$ не представляет трудностей и ее решение легко выписывается

$$\Phi_1^{(0)} = 0; \quad \Phi_2^{(0)} = -4\pi \varkappa_0 z. \quad (\text{П10})$$

Решения уравнений (П6), удовлетворяющие условиям (П7), естественно искать в виде разложений по плоским волнам

$$\delta \Phi_1(\mathbf{r}, t) = \int_0^\infty dk N_1 \exp(ikx) \exp(kz) \exp(\omega t);$$

$$\delta \Phi_2(\mathbf{r}, t) = \int_0^\infty dk N_2 \exp(ikx) \exp(-kz) \exp(\omega t), \quad (\text{П11})$$

где N_1 и N_2 — константы, коэффициенты разложения.

Удовлетворяя с помощью решений (П10) и (П11) условиям (П8), (П9), получим в первом порядке малости уравнения, связывающие константы N_1 и N_2 с коэффициентом C в разложении (21) возмущения $\xi(x, t)$ по плоским волнам,

$$N_1 = -4\pi \varkappa_0 \frac{\omega}{4\pi\gamma + \omega(\varepsilon + 1)} C;$$

$$N_2 = 4\pi \varkappa_0 \frac{4\pi\gamma + \omega\varepsilon}{4\pi\gamma + \omega(\varepsilon + 1)} C. \quad (\text{П12})$$

Теперь можно выписать нормальные и касательные компоненты вектора напряженности электрического поля с точностью до величин первого порядка малости

$$\begin{aligned} E_n^{(2)} &\approx 4\pi\kappa_0 - \frac{\partial(\delta\Phi_2)}{\partial z}; & E_n^{(1)} &\approx -\frac{\partial(\delta\Phi_1)}{\partial z}; \\ E_{\tau(x)}^{(2)} &\approx -\frac{\partial\Phi_2^{(0)}}{\partial z} \frac{\partial\xi}{\partial x} - \frac{\partial(\delta\Phi_2)}{\partial x}; & E_{\tau(x)}^{(1)} &\approx -\frac{\partial(\delta\Phi_1)}{\partial x}; \\ E_{\tau(y)}^{(2)} &\approx 0; & E_{\tau(y)}^{(1)} &\approx 0. \end{aligned} \quad (\text{П13})$$

Общее выражение для давления электрического поля на поверхность жидкости, граничащей с вакуумом, имеет вид [11]

$$P_E = \frac{1}{8\pi} \left[(E_n^{(2)})^2 - \varepsilon (E_n^{(1)})^2 \right] + (\varepsilon - 1) \frac{E_\tau^{(2)^2}}{8\pi}.$$

Отсюда с учетом (П13) в линейном приближении найдем

$$\begin{aligned} P_E &\approx P_E^{(0)} + P_E(\xi), & P_E^{(0)} &\approx 2\pi\kappa_0^2 = \frac{E_0^2}{8\pi}; \\ P_E(\xi) &= 4\pi\kappa_0^2 \frac{4\pi\gamma + \omega\varepsilon}{4\pi\gamma + \omega(\varepsilon + 1)} \\ &\times \int_0^\infty dk Ck \exp(ikx) \exp(\omega t). \end{aligned} \quad (\text{П14})$$

Электрические части касательных компонент тензора напряжений в первом порядке малости с учетом выражений (П11)–(П13), (21) и определения $\Pi_\tau = (\varepsilon/4\pi)E_n E_\tau$ могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} z = 0: & \quad \Pi_{\tau(x)}^{(2)} - \Pi_{\tau(x)}^{(1)} \approx -\kappa_0 \frac{\partial(\delta\Phi_1)}{\partial x} \\ &= 4\pi\kappa_0^2 \frac{\omega}{4\pi\gamma + \omega(\varepsilon + 1)} \frac{\partial\xi}{\partial x}, \end{aligned} \quad (\text{П15})$$

$$z = 0: \quad \Pi_{\tau(y)}^{(2)} - \Pi_{\tau(y)}^{(1)} = 0. \quad (\text{П16})$$

Список литературы

- [1] Григорьев А.И., Ширяева С.О. // МЖГ. 1994. № 4. С. 3–22.
- [2] Melcher J.R., Schwarz W.J. // Phys. Fluids. 1968. Vol. 11. N 12. P. 2604–2616.
- [3] Melcher J.R., Smith C.V. // Phys. Fluids. 1969. Vol. 12. N 4. P. 778–790.
- [4] Новоселец М.К., Николаев В.С. // УФЖ. 1987. Т. 32. № 5. С. 713–718.
- [5] Ширяева С.О., Григорьев А.И., Коромыслов В.А. // Письма в ЖТФ. 1995. Т. 21. Вып. 19. С. 77–81.
- [6] Левич В.Г. Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматгиз, 1959. 699 с.
- [7] Ширяева С.О., Лазаряни А.Э. и др. Препринт ИМРАН. Ярославль, 1994. № 27. 126 с.
- [8] Алиев И.Н., Филиппов А.В. // Магнитная гидродинамика. 1989. № 4. С. 94–98.
- [9] Григорьев А.И., Григорьев О.А., Ширяева С.О. // ЖТФ. 1992. Т. 62. Вып. 9. С. 12–21.
- [10] Zeleny J. // Phys. Rev. 1917. Vol. 10. N 1. P. 1–6.
- [11] Ландау Л.Д., Лифшиц Е. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1992. 664 с.
- [12] Ширяева С.О., Григорьев А.И., Святченко А.А. Препринт ИМРАН. Ярославль, 1993. № 25. 118 с.
- [13] Shiryayeva S.O., Grigor'ev A.I. // J. Electrostatics. 1995. Vol. 34. N 1. P. 51–59.