Журнал технической физики, 1997, том 67, № 8

01;04;10

О трансформации радиального профиля интенсивного ионного пучка плазменной линзой

© А.А. Гончаров[1], А.Н. Добровольский[1], В.Ф. Задорожный

[1] Институт кибернетики НАН Украины,
252022 Киев, Украина

(Поступило в Редакцию 28 мая 1996 г.)

Электростатические плазменные линзы (ПЛ), предложенные в [1] как развитие идеи линзы Габора с электронным объемным зарядом [2], на протяжении вот уже многих лет демонстрируют убедительные преимущества в сравнении с традиционными ионно-оптическими системами. Их исследование все чаще переходит из сферы фундаментальной в область приложений.

Особенно интересными преимуществами обладают сильноточные плазменные линзы, т.е. такие линзы, в которых собственный потенциал проходящего пучка существенно превышает максимальное значение внешнего потенциала, прикладываемого к фиксирующим электродам линзы. Как показывают эксперименты [3], такие линзы обладают многими степенями свободы, позволяющими варьировать радиальный профиль электрического потенциала в широких пределах. Это дает возможность устранять сферические аберрации, обеспечивая хорошее качество фокусировки или дефокусировки пучка (такая линза обладает уникальной способностью работать и в рассеивающем режиме [4]), а также использовать сферические аберрации для варьирования радиальным профилем пучка на мишени. Такой эффект был обнаружен в [5], где было показано, что, регулируя сферические аберрации, можно регулировать радиальный профиль пучка, прошедшего плазменную линзу, в частности делать его однородным. Там же на основе метода расчета внутренней структуры неламинарных аксиально-симметричных пучков заряженных частиц с нулевым фазовым объемом, предложенным и развитым на основе последовательного кинетического подхода в [6], получено дифференциальное соотношение, связывающее начальный профиль пучка на входе в тонкую линзу с таким характером аберраций, при которых на данном расстоянии z профиль пучка становится однородным.

Целью данной работы является нахождение самосогласованного электрического профиля плазменной линзы, трансформирующего неоднородный радиальный профиль пучка на входе в линзу в однородный в заданном поперечном сечении за линзой.

Для наглядности изложения уместно повторить основные положения, приводящие к искомому дифференциальному уравнению. Представим радиальный профиль плотности тока пучка $j(r)$ в виде суммы элементарных пучков

$$j(r) = \sum_{n=1}^{N} i_n(r, V_n, z), \quad n \in [1, \dots, N],$$

где V_n — радиальная скорость, приобретаемая $n^{\text{ым}}$ пучком при прохождении линзы; r, z — радиальная и продольная координаты соответственно.

Это выражение справедливо в любой точке фазовой траектории. В силу уравнения непрерывности в форме Лагранжа для каждого из таких пучков справедливо

$$i_n = i_{0n}\big(r_{0n}(r, V_n, z)\big)\,\frac{r_{0n}(r, V_n, z)}{r}\,\frac{\partial r_{0n}}{\partial r}\Big|_{V=V_n}.$$

Представив условие однородности пучка $j(r)$ в произвольном сечении z в виде

$$\frac{\partial j(r)}{\partial r} = \sum_{n=1}^{N} \frac{\partial i_n}{\partial r} = 0$$

и учитывая специфику прохождения пучком тонкой линзы, влияющей только на радиальную составляющую скорости пучка, получим

$$\frac{\partial \ln i_{0n}}{\partial \ln r_{0n}} - \frac{z(V'_{0n} - V_{0n}/r_{0n})/V_b}{1 + V_{0n}z/V_{b_1 0n}} - \frac{zV^{n}_{0n} r_{0n}/V_b}{1 + V'_{0n}z/V_b} = 0, \quad (1)$$

где V_b — сносовая скорость по оси z; V_{0n} — радиальная скорость в точке $(r_0, 0)$, которая порождает скорость $V_n(r)$, $V'_{0n} = \partial V_{0n}/\partial r_{0n}$, $V''_{0n} = \partial^2 V_{0n}/\partial r^2_{0n}$.

Это соотношение, снесенное в сечение $z = 0$, где находится тонкая линза определяет условия, при которых пучок с заданным начальным радиальным профилем на входе в нее в произвольном заданном сечении z может стать однородным. В частности, представляя радиальный профиль входящего в линзу пучка в виде гауссовского распределения $i_{0n} = i_0 \exp\{-r^2_{0n}/\theta^2\}$ и пренебрегая величинами $V_{0n}z/V_b r_{0n}$, $V'_{0n}z/V_b$, что справедливо, когда $z \ll F$ — фокусного расстояния, причем (1) к виду

$$d\left(-\frac{r^2_{0n}}{\theta^2}\right) = \frac{z}{V_b}\left(V''_{0n} + \frac{1}{r}V'_{0n} - \frac{1}{r^2}V_{0n}\right). \quad (2)$$

Решение уравнения (2), ограниченное на оси, имеет вид

$$V_{0n}(r_{0n}) = -\frac{1}{2}C_0 r_{0n} - \frac{1}{4}\frac{V_b r^3_{0n}}{z\theta^2}. \quad (3)$$

Учитывая закон сохранения энергии в тонкой плазменной линзе в виде $V^2_{0n} = 2e\varphi(r_{0n})/M$ и граничное условие $\varphi(r)\big|_R = \varphi_{\text{л}}$ получаем искомое распределение потенциала

$$\varphi(x) = \left[\left(\sqrt{\varphi_{\text{л}}} - \frac{V_b}{4z}\frac{R^3}{\theta^2}\right)x + \frac{V_b}{4z}\frac{R^3}{\theta^2}x^3\right]^2, \quad x = r/R. \quad (4)$$

На рис. 1 представлена зависимость радиального распределения потенциала для различных значений θ. Видно, что с уменьшением θ ход потенциальной кривой существенно отличается от параболического. На рис. 2 приведена зависимость $\varphi(x)$ для сечений, отстоящих на разные расстояния z от плоскости линзы.

При решении уравнения (1) мы пренебрегали слагаемыми в знаменателе второго и третьего членов. При этом фундаментальное решение r_{0n}^{-1}, которое мы нашли для упрощенной системы, удовлетворяет полному однородному уравнению

$$\frac{(y' - r_{0n}^{-1}y)}{1 + \varepsilon r_{0n}^{-1}y} + \frac{y^n r_{0n}}{1 - \varepsilon y'} = 0, \qquad (5)$$

в чем легко убедиться непосредственной проверкой. И так как общее решение уравнения (1) состоит из общего решения однородного уравнения (5) и частного решения уравнения с правой частью, то общее решение полного уравнения будет выражаться формулой (3). При этом заметим следующее: итерационные процессы, как правило, приводят к бесконечным рядам. В нашем случае уравнение (5) обладает замечательным свойством — второе и последующие приближения $o(\varepsilon^2)$, $o(\varepsilon^3)$ и т. д. равны нулю. Эта конечность рядов чрезвычайно важна для нахождения точного решения.

Воспользуемся этим замечанием для нахождения точного решения уравнения (1) для начальных распределений параболического вида $i_{0n} = i_{00}(1 - r_{0n}^2/a^2)$, где a —

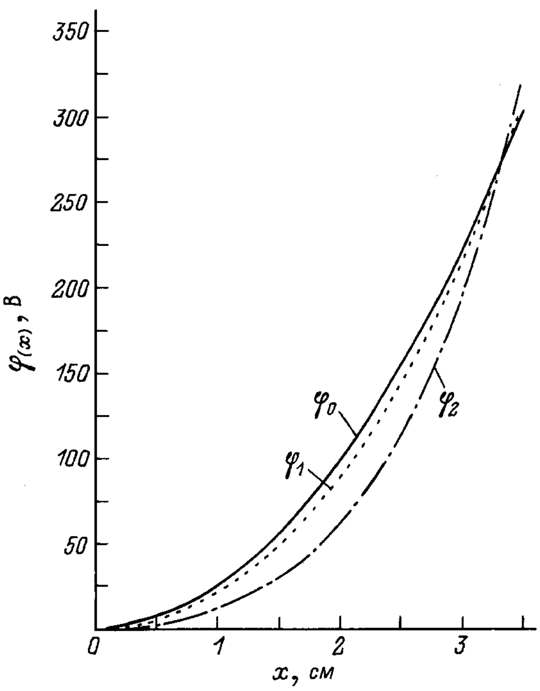

Рис. 1. Зависимости потенциала $\varphi(x)$ для разных значений параметра θ. φ_0 — кривая без учета слагаемого с x^3; φ_1 — с учетом x^3 для $\theta = 2$, φ_2 — с учетом x^3 для $\theta = 1$; $\varphi_л = 300$ В, энергия пучка 20 кВ, $z = 10$ см.

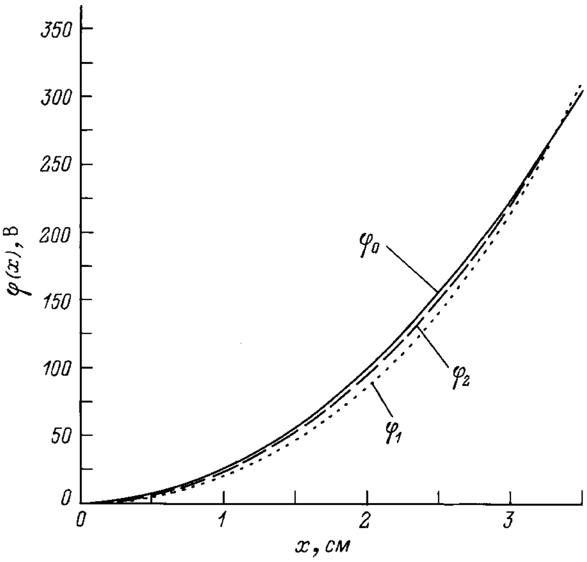

Рис. 2. Зависимости потенциала $\varphi(x)$ для разных значений параметра z. φ_0 — кривая без учета слагаемого с x^3; φ_1 — с учетом x^3 для $z = 10$ см, φ_2 — с учетом x^3 для $z = 20$ см; $\varphi_л = 300$ В, энергия пучка 20 кВ, $\theta = 2$.

некоторая постоянная, тогда

$$\partial \ln\left[i_{00}\left(1 - \frac{r_{0n}^2}{a^2}\right)\right] = y'' + \frac{1}{r_{0n}}y' - \frac{1}{r_{0n}^2}y,$$

следовательно,

$$y(r_{0n}) = \frac{\ln i_{00} r_{0n}}{2} + \frac{C_1 r_{0n}}{2} - \frac{a^2}{2}\frac{1}{r_{0n}}$$

$$\times\left[\left(1 - \frac{r_{0n}^2}{a^2}\right)\ln\left(1 - \frac{r_{0n}^2}{a^2}\right) - \left(1 - \frac{r_{0n}^2}{a^2}\right)\right] + C_0.$$

Если оставить те же предположения относительно постоянных интегрирования и взять первый член ряда Тейлора $\ln(1 - r_{0n}^2/a^2)$, то при $a = \theta$ получим для V_{0n} формулу (3).

Теперь можем рассмотреть второй случай. Пусть поле φ в линзе настолько большое, что в точке r_0 имеется N частиц с разными скоростями, тогда результаты первого случая не имеют места. Будем решать задачу получения однородного пучка в сечении z следующим образом.

Усредним сумму $\sum_1^N i_{0n} r_{0n} \partial r_{0n}/r \partial r$ по r_{0n} и получим $j_0 \partial r_0^2/2r\partial r$, здесь $r_0^2 = \sum_1^N r_{0n}^2$, $j_0 = (r_0^2/2r)^{-1} \times \sum_1^N j_{0n} r_{0n} \partial r_{0n}/r\partial r$. Теперь $r = r_0 + V_0 z/V_b$, где V_0 — средняя скорость в точке r_0, которую и нужно определить из условия

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[j_0 \frac{1}{2r}\frac{\partial}{\partial r} r_0^2\right] = 0.$$

Если учесть, что $\partial r/\partial z = V_0(r_0)/V_b$, $V_0 z/V_b = \varepsilon x$, $V_0' z/V_b = \varepsilon x'$, $x' = \partial x/\partial r$, то мы опять перейдем к уравнению вида (1)

$$\frac{\partial \ln i_0}{\partial \ln r_0} = \left(V_0' - \frac{V_0}{r_0}\right) - V_0^n r_0. \qquad (6)$$

Однако здесь переменные $i_0 V_0$ в точке (r_0, V_0) имеют другой смысл. Они характеризуют движение в этой точке как смесь потоков с разными скоростями.

З а м е ч а н и е 1. При дифференцировании скорости V_0 по радиусу r мы предполагали, что такая операция всегда выполнима. Однако от этого предположения можно отказаться, если рассматривать обобщенные потоки. Неламинарные и, более того, турбулентные потоки, как известно, удовлетворяют только слабому условию дифференцированности. Как показал Л. Янг [7], именно слабые пределы являются хорошей математической моделью турбулентных движений.

З а м е ч а н и е 2. В настоящей работе постулировалась функция распределения I_{0n}, однако можно поступить подругому. Как отметил А.И. Морозов, задача формирования пучка при последовательной формулировке должна быть вариационной [8, с. 300], более того, это должна быть задача оптимального управления, если учесть замечание 1.

Если обозначить $\ln i_{0n}$ через u, то вышеприведенную задачу можно сформулировать так. Найти такое управление u, что

$$y' + \frac{1}{r_{0n}} y = u, \quad |u| \le 1$$

и при этом некоторый функционал $F(y, u)$, характеризующий качество процесса (расход энергии, диаметр пучка, плотность тока в сечении z и т.д.), достигал минимума (максимума).

Таким образом, в работе показана возможность нахождения аналитическими методами радиального профиля электрического потенциала тонкой плазменной линзы, трансформирующего неоднородный поперечный профиль пучка в однородный на мишени, находящейся на заданном расстоянии от средней плоскости линзы.

Несколько слов о практической применимости результатов. Фундаментальный принцип эквипотенциализации магнитных силовых линий обеспечивает в статической плазмооптике взаимооднозначную связь электрического потенциала в объеме системы с функцией магнитного потока Ψ. Эта связь уникальна и проста $\varphi = k\Psi(r, z)$, где k — константа, а линии $\Psi(r, z) = \text{const}$ — силовые линии H-поля. Использование только этой связи позволяет достаточно точно предсказать необходимое для устранения сферических аберраций, т.е. получения в объеме зависимости $\varphi(0, r) = Ar^2$, распределение $\varphi(z, r)$ по фиксирующим электродам. В то же время прямого рецепта для получения любого наперед заданного распределения $\varphi(0, r)$ плазмооптика в существующем виде не дает. Вместе с тем, как убедительно свидетельствуют эксперименты [5,9], варьирование параметрами системы (током проходящего пучка, конфигурацией силовых линий, распределением внешнего потенциала) позволяет эмпирически подбирать необходимые распределения $\varphi(0, r)$.

Данная работа была поддержана Международным научным фондом (фондом Сороса) (гранты № UBK200 и № UBK000), частично поддержана Международной соросовской программой поддержки образования в области точных наук (ISSEP) (грант № PSU052041) и Фондом фундаментальных исследований при ГКНТ Украины (грант № 2.3/108).

Список литературы

[1] *Лебедев С.В., Морозов А.И.* // ЖТФ. 1966. Т. 36. Вып. 5. С. 960–964.
[2] *Gabor D.* // Nature. 1947. Vol. 160. P. 89–90.
[3] *Гончаров А.А., Проценко И.М.* // УФЖ. 1991. Т. 36. № 11. С. 1659–1683.
[4] *Гончаров А.А., Затяган А.В., Проценко И.М.* // Письма в ЖТФ. 1989. Т. 15. Вып. 6. С. 1–4.
[5] *Goncharov A.A., Zatuagan A.V., Protsenko I.M.* // IEEE Trans. on Plasma Sci. 1993. Vol. 21. N 5. P. 578–581.
[6] *Кузнецов В.С., Богданова В.И., Комаров О.Л.* // РиЭ. 1971. Т. 16. № 8. С. 1476–1483.
[7] *Young L.G.* // Lectures on the Calculus of Variations and optimal control theory. Philadelphia; London; Toronto: W. Saunders company, 1969. 378 p.
[8] Вопросы теории плазмы. Сб. ст. / Под ред. М.А. Леонтовича. Вып. 8. М.: Атомиздат, 1974. 384 с.
[9] *Goncharov A.A., Dobrovolsky A.N., Zatuagan A.V., Protsenko I.M.* // IEEE Trans. On Plasma Sci. 1993. Vol. 21. N 5. P. 573–577.