*01;05;12*

# Оценки ошибок модуляционного восстановления функции отклика и ее производных

© *Н.Д. Кузьмичев*

Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарева,
430000 Саранск, Россия

*(Поступило в Редакцию 7 мая 1996 г.)*

Получены формулы для оценки ошибок, возникающих при модуляционном восстановлении функции отклика и ее первой и второй производных в безгистерезисном случае. При помощи примененного алгоритма можно получить формулы для оценки ошибок и в случае гистерезиса. Результаты работы можно использовать для восстановления намагниченности и $I-V$-характеристик высокотемпературных сверхпроводников из спектра амплитуд гармоник сигнала отклика, получаемого при воздействии на образец модулированными магнитным полем и током.

В последнее время при исследовании магнитных свойств, а также $I-V$-характеристик[1] высокотемпературных сверхпроводников (ВТСП) исследуют спектр гармоник сигнала отклика, получаемого при воздействии на образец модулированным магнитным полем или током ([1–6] и др.). При этом сигнал отклика будет периодической функцией времени в силу нелинейности и гистерезисности свойств (например, магнитных) имеет сложную (не синусоидальную) форму. Даже при малых амплитудах модуляции в спектре отклика имеются высшие гармоники. Исследование нелинейности физических параметров во многих задачах экспериментальной физики представляет основной интерес. Таким образом, возникает задача восстановления исходных зависимостей. Эта задача может быть трудно разрешимой, если нелинейная часть исследуемой зависимости проявляется на фоне значительной линейной части. Дополнительная трудность возникает из-за гистерезиса. Восстановленная из спектра амплитуд высших гармоник сигнала отклика исходная зависимость (функция отклика) имеет бóльшую ценность, чем прямо измеренная зависимость. Это связано с тем, что высшие гармоники содержат богатую информацию об аналитических свойствах функции отклика и ее производных.

Широко известная в литературе [7] модуляционная методика во многих случаях позволяет обойти выше сформулированную проблему, но она развита на случай малых амплитуд модуляции и в отсутствии гистерезиса в исследуемой величине. В работах [8–10] сделана попытка обобщить указанную методику на случай произвольных амплитуд модуляции с учетом гистерезиса с помощью рядов Тейлора и Фурье и получены формулы восстановления.

В настоящей работе выполнена оценка ошибок, возникающих при восстановлении функции отклика с использованием модуляционной методики.

Обозначим модулированное воздействие (напряженность магнитного поля, ток и др.) через $x = x_0 + a\cos(\omega t)$. Здесь $x_0$ — статическое или медленно меняющееся воздействие, $a$ — амплитуда модуляции, $\omega$ — циклическая частота и $t$ — время. Исследуемую зависимость (функцию отклика) обозначим как $Y$. Функция отклика будет периодической функцией времени. Ряд Фурье для гистерезисной функции отклика $Y$ будет иметь вид

$$Y(x_0 + a\cos\omega t) = \frac{Y_0'}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[Y_n'\cos(n\omega t) + Y_n''\sin(n\omega t)\right]. \quad (1)$$

Коэффициенты Фурье $Y_n'(x_0,\, a)$ и $Y_n''(x_0,\, a)$ (амплитуды действительных (синфазных) и мнимых (квадратурных) частей гармоник функции отклика) определяются выражениями [8–10]

$$Y_n' = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left\{[Y_-(x_0 + a\cos\omega t) + Y_+(x_0 + a\cos\omega t)]/2\right\}\cos(n\omega t)d(\omega t), \quad (2)$$

$$Y_n'' = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[Y_-(x_0 + a\cos\omega t) - Y_+(x_0 + a\cos\omega t)]\sin(n\omega t)d(\omega t). \quad (3)$$

Здесь $Y_+$ — ветвь функции $Y$ в возрастающем $x$, $Y$ — в убывающем $x$. Для восстановления функции отклика и ее первой и второй производных в работе [10] получены следующие формулы:

$$\bar{Y}(x_0) = \left[Y_-(x_0) + Y_+(x_0)\right]/2 = (Y_0/2) + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n Y_{2n}'(x_0,\, a), \quad (4)$$

$$\Delta Y(x_0) = Y_-(x_0) - Y_+(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n Y_{2n+1}''(x_0,\, a), \quad (5)$$

[1] Зависимость напряжения отклика $V$ от величины заданного тока $I$, т. е. $V(I)$.

$$\frac{d}{dx}\bar{Y}(x_0) = \frac{1}{a}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(2n-1)Y'_{2n-1}(x_0,\,a), \qquad (6)$$

$$\frac{d}{dx}\Delta Y(x_0) = \frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(2n)Y''_{2n}(x_0,\,a), \qquad (7)$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\bar{Y}(x_0) = \frac{1}{a^2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(2n)^2Y'_{2n}(x_0,\,a), \qquad (8)$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\Delta Y(x_0) = \frac{2}{a^2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}(2n-1)^2Y''_{2n-1}(x_0,\,a). \qquad (9)$$

При отсутствии гистерезиса в $Y(x)$ справедливы формулы (4), (6) и (8), так как в этом случае $Y = \bar{Y}$ и $\Delta Y = 0$.

Приведенная численная методика восстановления требует измерений зависимостей амплитуд гармоник $Y_n$ функции отклика от статического воздействия $x_0$ для заданной амплитуды модуляции, что не всегда выполнимо. В некоторых случаях бывает проще выполнить измерения зависимостей $Y_n$ от амплитуды модуляции при $x_0 = 0$. Для этого случая при отсутствии гистерезиса формулы для восстановления следующие:

$$Y(a) = Y_0(a)/2 + \sum_{n=1}^{\infty}Y_n(a),$$

$$dY/da = (1/a)\sum_{n=1}^{\infty}n^2Y_n(a). \qquad (10)$$

На практике при восстановлении функции отклика с помощью формул (4)–(10) приходится вместо рядов пользоваться конечными суммами и необходимо учитывать экспериментальные ошибки измерения, в частности измерительные шумы, определяемые соотношением сигнал/шум. В этом случае для оценки точности восстановления исходной зависимости и ее производных необходимо воспользоваться критерием сходимости ряда [11, с. 426], в частности ряда Фурье (1), и в некоторых случаях большое число членов ряда нет необходимости учитывать (сильная сходимость).

Часто в эксперименте функцией отклика является напряжение $U$ (эдс), возникающее на датчике, которое прямо пропорционально исследуемой зависимости $Y$ или ее производной $dY/dx$, например $I{-}V$-характеристика или дифференциальная магнитная восприимчивость $dM/dH$ ($M$ — намагниченность) соответственно [1–6]. Учитывая сказанное запишем

$$U(x) = CY(x). \qquad (11)$$

Здесь $C$ — аппаратная константа. В случае $I{-}V$-характеристик $C = 1$, а $x \equiv I$ (где $I$ — ток). Учтем, что амплитуды $U_n$ гармоник сигнала отклика прямо пропорциональны $Y_n$ [1,2,4,8,9]. Запишем этот критерий сходимости, например, для ряда (6) при отсутствии гистерезиса в $Y$ т. е. при $Y = \bar{Y}$,

$$\left| a\frac{dU}{dx} - \sum_{n=1}^{N}(-1)^n(2n-1)U_{2n-1}\right| < \delta U, \qquad (12)$$

где $a$ — амплитуда модуляции, $Y$ — истинная исходная зависимость, $\delta U$ — напряжение, определяющее точность восстановления, $N$ — число нечетных экспериментально определенных $U_k$.

Число $N$ ограничено напряжением $U_{\text{ш}}$ или $\Delta u_k$, где $U_{\text{ш}}$ — среднее квадратичное напряжение шумов. Ошибка $\Delta u_k$ измерения напряжения $U_k$ определяется, в частности, $U_{\text{ш}}$. При всех $k \leqslant N$ $U_k > U_{\text{ш}}$ или $\Delta u_k$.

Второй член в левой части неравенства (12) есть

$$Ca\frac{dY^*}{dx} = \sum_{n=1}^{N}(-1)^n(2n-1)U_{2n-1}.$$

Окончательную оценку точности восстановления имеем [10]

$$\left|\frac{dY}{dx} - \frac{dY^*}{dx}\right| \lesssim \frac{\delta U}{|C|a}, \qquad (13)$$

т. е. истинное значение производной заключено в пределах

$$\frac{dY}{dx} = \frac{dY^*}{dx} \pm \frac{\delta U}{|C|a}.$$

Здесь $dY^*/dx$ есть приближенно восстановленная производная. Аналогичные оценки можно получить для (4), (5), (7)–(10). Заметим, что при заданных $U_{\text{ш}}$ или $\Delta u_k$ число $N$ (число наблюдаемых гармоник) пропорционально амплитуде модуляции и степени нелинейности исходной зависимости. Степень нелинейности определяется числом доминирующих членов ряда Тейлора для $Y$. Высокая степень нелинейности и гистерезис обусловливают медленную сходимость ряда (1).

Оценим теперь величину $\delta U$. Допустим, что ошибка измерения напряжения для всех гармоник имеет одинаковую величину $\Delta u$. Для суммы в (12) ошибка равна [12, с. 598]:

$$\sqrt{\sum_{n=1}^{N}(2n-1)^2\Delta u^2} = \Delta u\sqrt{N(2N-1)(2N+1)/3}.$$

Значит, точное значение суммы в (12) находится в пределах $Ca(dY^*/dx) \pm \Delta u\sqrt{N(2N-1)(2N+1)/3}$. Не учтенным остается остаточный член $R_N$ ряда (6), который по модулю меньше, чем $U_0/N$, т. е.

$$|R_N| < U_0/N. \qquad (14)$$

Здесь $U_0$ — некоторое положительное значение напряжения, оценку которому дадим ниже. Действительно, так как для абсолютной сходимости остатка $\sum_{n=N+1}^{\infty}(-1)^n(2n-1)U^t_{2n-1}$ необходимо, чтобы истинные $U^t_{2n-1}$ (не путать с экспериментальными

$U_{2n-1}$) имели оценку (в предположении существования $d^2U/dx^2$, удовлетворяющей условиям Дирихле) $|U^t_{2n-1}| < U_0/(2n-1)^3$ [13, с.505; 14, с.495], то получаем

$$|R_N| = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} (-1)^n (2n-1) U^t_{2n-1} \right|$$
$$< U_0 \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} < U_0 \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \frac{U_0}{N}.$$

За величину $U_0$ можно взять, например, максимальное по модулю значение из множества экспериментальных амплитуд гармоник $U_{2n-1}$, т.е. $U_0 = \max|U_{2n-1}|$. Здесь $n = 1, 2, 3, \ldots$. Тогда точность восстановления будет равна

$$\delta U = \sqrt{[N(2N-1)(2N+1)/3]\Delta u^2 + (U_0/N)^2}. \quad (15)$$

Величина $\delta U(N)$ имеет минимум и величина $N_{\text{opt}}$, при которой $\delta U$ принимает минимальное значение, определяется из решения алгебраического уравнения пятой степени

$$(4N^2 - 1/3)\Delta u^2 = 2U_0^2/N^3$$

или, пренебрегая $1/3$ в левой части уравнения, получим

$$N_{\text{opt}} \approx 2^{-1/5}[U_0/(\Delta u)]^{2/5} \approx 0.87(U_0/\Delta u)^{2/5}. \quad (16)$$

Например, при $U_0/\Delta u = 10$ (10%-ная точность измерения) получаем $N \approx 2.18$, т.е. $N_{\text{opt}} = 2$. Значит, необходимо взять амплитуды первой и третьей гармоник.

Погрешность восстановления производной функции отклика определяется по формуле

$$\delta(dY/dx) = \frac{\delta U}{|C|a}$$
$$= \sqrt{[N(2N-1)(2N+1)/3]\Delta u^2 + (U_0/N)^2}. \quad (17)$$

При восстановлении самой функции отклика $Y$ получаются следующие оценки:

$$CY^* = U_0/2 + \sum_{n=1}^{N} (-1)^n U_{2n},$$

$$\sqrt{\sum_{n=0}^{N} \Delta u^2} = \Delta u \sqrt{N+1}.$$

$$\delta u = \sqrt{(N+1)\Delta u^2 + [U_0/(2N)]^2}, \quad (18)$$

$$N_{\text{opt}} = 2^{-1/3}(U_0/\Delta u)^{2/3} \approx 0.8(U_0/\Delta u)^{2/3}. \quad (19)$$

Здесь $U_0 = \max|U_{2n}|$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

При восстановлении второй производной функции отклика $d^2Y/dx^2$ получаются следующие оценки:

$$a^2C(d^2Y^*/dx^2) = \sum_{n=1}^{N} (-1)^{n+1}(2n)^2 U_{2n},$$

$$\sqrt{\sum_{n=1}^{N} (2n)^4 \Delta u^2} = \frac{4\Delta u}{(30)^{1/2}}$$
$$\times \sqrt{N(N+1)(2N+1)(3N^2+3N-1)},$$
$$\delta U = \sqrt{\begin{array}{r}(8/15)N(N+1)(2N+1)(3N^2+3N-1)\Delta u^2 \\ +[U_0/(2N)]^2.\end{array}} \quad (20)$$

Величина $N_{\text{opt}}$ определяется из решения алгебраического уравнения седьмой степени. Приближенно $N_{\text{opt}}$ можно оценить по формуле

$$N_{\text{opt}} \approx (32)^{-1/7} \left(\frac{U_0}{\Delta u}\right)^{2/7} \approx 0.61(U_0/\Delta u)^{2/7}. \quad (21)$$

Отметим, что при восстановлении функции отклика предполагалось существование ее производной, а при восстановлении второй производной функции отклика предполагалось существование третьей производной, удовлетворяющих условиям Дирихле соответственно.

Как видно, например, из выражения (17), величина $\delta(dY/dx)$ (обозначим ее $\delta_1 = \delta(dY/dx)$) зависит также и от амплитуды модуляции, обратно пропорционально и через величину $U_0$. С ростом амплитуды модуляции первый член в подкоренном выражении (17) уменьшается, а второй растет. Скорость роста $(U_0/N)^2$ определяется величиной $U_0$. Таким образом, имеется оптимальное значение амплитуды модуляции $a_{\text{opt}}$. Величина $a_{\text{ext}}$ (экстремальное значение) можно определить из решения приближенного уравнения

$$a \approx 8U_0/[3(dU_0/da)]. \quad (22)$$

Для того чтобы найти минимум, необходимо дополнительно исследовать $\delta_1$ на минимум. При восстановлении функции отклика $Ya_{\text{ext}}$ находится из решения уравнения

$$U_0(dU_0/dx) \approx 0. \quad (23)$$

Уравнениями (22) и (23) можно пользоваться в случае когда, например, амплитуда $k$-й гармоники $U_0$ остается максимальной при изменении амплитуды модуляции и аналитический или численный вид $U_0(a)$ определен.

В том случае, если при изменении амплитуды модуляции изменяются номера максимальных амплитуд гармоник, то тогда уравнения (22) и (23) также справедливы, но аналитический вид $U_0(a)$ в разных областях изменения амплитуды является различным.

При условии, когда наблюдается небольшое число гармоник, например $N$ порядка 3–5, тогда ошибка восстановления будет в основном определяться первым членом подкоренного выражения (17), т.е. членом, связанным с $\Delta u$. Причина этого кроется в быстрой сходимости ряда (6), остаточный член которого (14) много меньше, чем $U_0/N$, т.е. $|R_N| \ll U_0/N$. В общем случае остаток ряда будет оцениваться $|R_N| \propto U_0/N^m$. Здесь показатель $m$ может быть порядка 10 и более. Аналогичные оценки, с помощью приведенного алгоритма, можно получить и для формул (5), (7), (9), (10).

Таким образом, мы получили, что с помощью модуляционной методики измерения и восстановления можно определить численный вид функции отклика и ее производных (по крайней мере первой и второй). Кроме того, можно определить ошибку восстановления указанной функции и ее производных.

## Список литературы


[1] *Jeffries C., Lam Q., Kim Y.* et al. // Phys. Rev. B. 1988. Vol. 37. N 16. P. 9840–9843.

[2] *Sun J., Scharen M., Bourne L.* et al. // Phys. Rev. B. 1991. Vol. 44. N 10. P. 5375–5279.

[3] *Xing W., Heinrich B., Chrzanowski J.* et al. // Physica C. 1993. Vol. 205. N 3/4. P. 311–322.

[4] *Васютин М.А., Кузьмичев Н.Д.* // Письма в ЖТФ. 1992. Т. 18. Вып. 23. С. 5–9.

[5] *Головашкин А.И., Кузьмичев Н.Д., Левченко И.С.* и др. // ФТТ. 1989. Т. 31. Вып. 4. С. 233-235.

[6] *Кузьмичев Н.Д., Васютин М.А.* // СФХТ. 1994. Т. 7. № 1. С. 93–99.

[7] *Солимар Л.* Туннельный эффект в сверхпроводниках и его применение. М. Мир, 1974. 432 с.

[8] *Кузьмичев Н.Д.* // Письма в ЖТФ. 1991. Т. 17. Вып. 7. С. 56-60.

[9] *Кузьмичев Н.Д.* // ЖТФ. 1994. Т. 64. Вып. 12. С. 63–74.

[10] *Кузьмичев Н.Д.* // Письма в ЖТФ. 1994. Т. 20. Вып. 22. С. 39–43.

[11] *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. 3 т. М.: Наука, 1970. Т. 2. 800 с.

[12] *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981. 800 с.

[13] *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Наука, 1970. Т. 3. 656 с.

[14] *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. М.: Наука, 1974. Т.2. 656 с.