01;12

О преобразовании пучков частиц диа-, пара- и ферромагнетиков магнитным полем линейного тока

 Н.И. Штепа

Черниговский государственный педагогический институт им.Т.Г.Шевченко,
250038 Чернигов, Украина

(Поступило в Редакцию 8 июня 1996 г.)

Исследуются некоторые возможности преобразовния и захвата пучков мелких ($10^{-1}-10^{-4}$ см) частиц диа-, пара- и ферромагнетиков магнитным полем линейного постоянного тока.

Введение

Рассматриваются однородные (до преобразования) пучки мелких ($10^{-1}-10^{-4}$ см) частиц диа-, пара- и ферромагнетиков сферической формы, движущиеся с одинаковыми начальными скоростями ($\mathbf{v}_0 = \text{const}$) в вакууме. Пучки достаточно разрежены, так что взаимодействием между их частицами пренебрегается. Преобразование пучков осуществляется магнитным полем постоянного прямолинейного цилиндрического тока $I = \text{const}$ радиуса a. Движение частиц описывается в цилиндрических координатах (z, φ, z), ось $0z$ которых направлена вдоль оси тока, r — расстояние от этой оси до частицы, φ — угол поворота вокруг $0z$.

Исследование ограничивается двумя случаями: продольного и поперечного преобразования. При продольном преобразовании до преобразования пучок частиц имеет полую цилиндрическую форму соосную с током, ограниченную внутренним радиусом q и внешним Q ($a < q < Q$). Начальные скорости частиц пучка направлены параллельно току с прицельным расстоянием относительно оси тока $r_0 = p$ ($q \leqslant p \leqslant Q$) различными для разных частиц. Траектории частиц в процессе преобразования остаются плоскими, лежащими в плоскостях $\varphi = \text{const}$.

При поперечном преобразовании ленточный пучок частиц до преобразования с большого расстояния $r_0 - l \gg Q$, на котором действием поля тока можно пренебречь, движется в направлении, скрещенном с током, перпендикулярно к нему. Прицельное расстояние частицы (кратчайшее расстояние от направления ее начального движения до оси тока) обозначим p. Прицельные расстояния частиц, ограничивающих ленточный пучок, обозначим q и Q соответственно ($a < q \leqslant p \leqslant Q$), поэтому до преобразования толщина пучка равна $Q-q$.[1] Траектории частиц при этом преобразовании также остаются плоскими, но лежащими в плоскостях $z = \text{const}$. Полярный угол φ представляет угол между полупрямой, проведенной от оси тока антипараллельно начальной скорости $\mathbf{v}_0$ частицы, и полярным радиусом r.

[1] Ширина ленточного пучка произвольна, но такая, чтобы краевые эффекты, обусловленные конечной длиной линейного тока, не сказывались на преобразованиях пучка.

Преобразование пучков диа- и парамагнетиков

В предположении квазистационарности магнитного поля тока напряженности $\mathbf{H}$ на протяжении частицы радиуса R магнитной проницаемости μ магнитный момент [1] частицы

$$\mathbf{M} = R^3 \frac{\mu - 1}{\mu + 2} \mathbf{H}. \tag{1}$$

Действующая на частицу сила $\mathbf{F}$ в первом приближении обычно выражается [2]

$$\mathbf{F} = R^3 \frac{\mu - 1}{\mu + 2} (\mathbf{H}\nabla)\mathbf{H}. \tag{2}$$

Особенность магнитного поля линейного тока

$$\mathbf{H} = \frac{2I}{cr} \mathbf{e}_\varphi \tag{3}$$

($\mathbf{e}_\varphi$ — единичный вектор направления $\mathbf{H}$) такова, что, согласно (2), сила равна нулю, поэтому переходим к следующему приближению:

$$\mathbf{F} = \mathbf{M} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{e}_r, \tag{4}$$

где $\mathbf{e}_r$ — единичный вектор радиального от оси тока направления.

Из (1), (2) и (4) получаем

$$\mathbf{F} = -\frac{4\pi R^3 I^2}{c^2} \frac{\mu - 1}{\mu + 2} r^{-3} \mathbf{e}_r. \tag{5}$$

а) П р о д о л ь н о е п р е о б р а з о в а н и е. При таком преобразовании пучка движение частицы плотности ρ в плоскости ее движения ($\varphi = \text{const}$) описывается дифференциальным уравнением

$$\ddot{r} = -\alpha r^{-3}, \tag{6}$$

где

$$\alpha = \frac{3I^2}{\pi c^2 \rho} \frac{\mu - 1}{\mu + 2} \tag{7}$$

и

$$z = v_0 t, \tag{8}$$

$\alpha < 0$ для диамагнетиков, $\alpha > 0$ для парамагнетиков.

Проинтегрировав (6) с начальными условиями $t_0 = 0$, $r_o = p$, $\dot{r}_0 = 0$ и исключив посредством (8) t, находим уравнение траектории частицы

$$r^2 = p^2 - \frac{\alpha}{p^2 v_0^2} z^2. \tag{9}$$

Траектории парамагнетиков, согласно (9), искривляются к току, в результате частицы пучка захватываются током — достигают поверхности тока ($r = a$). Захват осуществляется по z в интервале $z_q \leqslant z \leqslant z_Q$, граничные значения z_q и z_Q которого определяются согласно

$$z_\gamma = \gamma a \sqrt{\frac{\gamma^2 - a^2}{\alpha}} \tag{10}$$

при подстановке в (10) вместо γ соответственно q и Q. Время T захвата частицы с прицельным расстоянием p выражается

$$T = p\sqrt{\frac{p^2 - a^2}{\alpha}}. \tag{11}$$

Плотность $\eta(z)$ захваченных частиц уменьшается с ростом z

$$\eta(z) = \eta(z_q)\,\frac{z\sqrt{\dfrac{a^2}{2} + \sqrt{\dfrac{a^4}{4} + \dfrac{\alpha}{v_0^2} z_q^2}}\sqrt{\dfrac{a^4}{4} + \dfrac{\alpha}{v_0^2} z_q^2}}{z_q\sqrt{\dfrac{a^2}{2} + \sqrt{\dfrac{a^4}{4} + \dfrac{\alpha}{v_0^2} z^2}}\sqrt{\dfrac{a^4}{4} + \dfrac{\alpha}{v_0^2} z^2}}. \tag{12}$$

Траектории диамагнетиков искривляются от оси тока — рассеиваются, и на больших расстояниях $\left(z \gg \frac{Q^2 v_0^2}{\sqrt{|\alpha|}}\right)$ преобразуются в полый расходящийся пучок, ограниченный углами ψ_Q и ψ_q ($\psi_Q \leqslant \psi \leqslant \psi_q$), где

$$\psi_\gamma = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{|\alpha|}}{\gamma v_0} \tag{13}$$

определяет эти углы при подстановке вместо γ соответственно Q и q. Преобразуясь, пучок становится "вывернутым", внутренние и внешние от оси траектории пучка при этом меняются местами. Однородный пучок после преобразования становится неоднородным, уменьшаясь по плотности $\eta(\psi)$ с возрастанием угла рассеяния ψ. На больших расстояниях

$$\eta(\psi) \approx \eta(\psi_Q)\,\frac{\sin^2\psi_Q}{\sin^2\psi}\,\frac{p}{Q}. \tag{14}$$

б) П о п е р е ч н о е п р е о б р а з о в а н и е. При этом преобразовании движение частицы в полярных координатах (r, φ) в плоскости движения ($r = \mathrm{const}$) под действием силы (5) описывается дифференциальными уравнениями

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -\alpha r^{-3} \tag{15}$$

и

$$r^2\dot{\varphi} = p v_0. \tag{16}$$

Исключив t из них, получаем дифференциальное уравнение траекторий частиц

$$\frac{d^2\left(\dfrac{1}{r}\right)}{d\varphi^2} + \left(1 - \frac{\alpha}{p^2 v_0^2}\right)\frac{1}{r} = 0. \tag{17}$$

Уравнение траектории частицы диамагнетика получим, проинтегрировав (17) с учетом $\varphi_0 = 0$, $r_0 = p$ и

$$\left(\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\varphi}\right)_0 = -\frac{1}{p},$$

$$r = \frac{kp}{\sin kp}, \tag{18}$$

где

$$k = \sqrt{1 - \frac{\alpha}{p^2 v_0^2}}. \tag{19}$$

Эта траектория искривлена от тока, проходит на минимальном расстоянии от него $r_m = kp$ при $\varphi_m = \pi/2k$. В результате преобразования пучок диамагнетиков превращается в расходящийся, ограничен поверхностями

$$r = \frac{\sqrt{1 + \dfrac{|\alpha|}{\gamma^2 v_0^2}}}{\sin\left(\varphi\sqrt{1 + \dfrac{|\alpha|}{\gamma^2 v_0^2}}\right)}, \tag{20}$$

для которых γ принимает значения Q и q соответственно. Эти поверхности ассимптотически приближаются к

$$\varphi_\gamma = \frac{\pi}{\sqrt{1 + \dfrac{|\alpha|}{\gamma^2 v_0^2}}} \tag{21}$$

при тех же значениях γ. Вследствие преобразования пучок диамагнетиков становится "вывернутым" и неоднородным. При больших r ($r \gg kQ$) плотность $\eta(\varphi)$ преобразованного пучка с ростом φ уменьшается

$$\eta(\varphi) \approx \eta(\varphi_q)\left(\frac{\pi^2 - \varphi_q^2}{\pi^2 - \varphi^2}\right)^{3/2}. \tag{22}$$

Поперечное преобразование пучка парамагнетиков зависит от знака подкоренного выражения k в (19). При $\alpha/(p^2 v_0^2) < 1$, решением (17) остается (18), но с траекторией, искривленной к току. Если при этом $r_m < a$, т.е. $p^2 - a^2 < \alpha/v_0^2$, то частица захвачена током. При условии

$$Q^2 - a^2 < \frac{\alpha}{v_0^2} \tag{23}$$

произойдет захват всего пучка.[2] Время захвата частицы с прицельным расстоянием p

$$T = \frac{1}{2v_0}\ln\frac{l^2 + \sqrt{l^2 - p^2 + \dfrac{\alpha}{v_0^2}}}{a^2 + \sqrt{a^2 - p^2 + \dfrac{\alpha}{v_0^2}}}. \tag{24}$$

[2] При $q^2 - a^2 < \alpha/v_0^2 < Q^2 - a^2$ произойдет частичный захват.

Если же $r_m > a$ для всех частиц, т.е.

$$q^2 - a^2 > \frac{\alpha}{v_0^2}, \tag{25}$$

пучок, искривляясь к току превратится в расходящийся, ограниченный поверхностями (20), (21), в уравнениях которых под корнем знак "+" заменяется знаком "−". В отличие от преобразования диамагнетиков пучок парамагнетиков при рассеянии не "выворачивается", становится неоднородным по плотности. При больших r ($r \gg kQ$) его плотность $\eta(\varphi)$ уменьшается с ростом φ

$$\eta(\varphi) \approx \eta(\varphi_Q)\left(\frac{\varphi_Q^2 - \pi^2}{\varphi^2 - \pi^2}\right)^{3/2}. \tag{26}$$

При преобразовании пучков парамагнетиков в случае $\alpha/(p^2 v_0^2) > 1$ решение (17) приводит к траектории

$$r = \frac{2p\lambda}{e^{\lambda\varphi} - e^{-\lambda\varphi}} \tag{27}$$

с

$$\lambda = \sqrt{\frac{\alpha}{p^2 v_0^2} - 1}.$$

Двигаясь по спиралеобразной траектории, частицы парамагнетика, а следовательно, и весь пучок захватываются током. Захват частицы с прицельным расстоянием p происходит за время

$$T = \frac{1}{v_0}\left(\sqrt{l^2 + \lambda^2 p^2} - \sqrt{a^2 + \lambda^2 p^2}\right). \tag{28}$$

Преобразование пучков ферромагнетиков

Намагниченность $\mathbf{J}$ частиц ферромагнетиков представим, как и в [3], состоящей из остаточной $\mathbf{J}_0$ и индуцированной $\mathbf{J}_и$, направленных по напряженности $\mathbf{H}$ магнитного поля тока,

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_0 + \mathbf{J}_и = J_0\frac{\mathbf{H}}{|H|} + \frac{3}{4\pi}\,\frac{\mu - 1}{\mu + 2}\,\mathbf{H}. \tag{29}$$

Полагаем, что в процессе преобразования пучков J_0 и μ остаются постоянными. Тогда магнитный момент частицы выразится

$$\mathbf{M} = \frac{4}{3}\pi R^3 J_0\frac{\mathbf{H}}{|H|} + R^3\,\frac{\mu - 1}{\mu + 2}\,\mathbf{H}. \tag{30}$$

Ограничимся рассмотрением преобразований ферромагнетиков по остаточной намагниченности, когда $J_0 \gg J_и$, и по индуктивной, когда $J_и \gg J_0$. В преобразованиях пучков по остаточной намагниченности пренебрегаем индуцированной. Движения таких частиц в случае продольного преобразования описываются дифференциальным уравнением

$$\ddot{r} = -\beta\, r^{-2}, \tag{31}$$

где

$$\beta = \frac{6IJ_0}{c\rho}, \tag{32}$$

и уравнением (8). Проинтегрировав (31) с учетом $t_0 = 0$, $r_0 = p$, $\dot{r}_0 = 0$, находим уравнение движения частицы и плоскости ($\varphi = \text{const}$) ее движения

$$r\sqrt{\frac{p}{r} - 1} + 2p\,\text{arctg}\sqrt{\frac{p}{r} - 1} = \sqrt{\frac{2\beta}{p}}\,t\,. \tag{33}$$

Полученное уравнение совместно с (8) определяет траекторию частицы

$$r\sqrt{\frac{p}{r} - 1} + 2p\,\text{arctg}\sqrt{\frac{p}{r} - 1} = \sqrt{\frac{2\beta}{p}}\,\frac{z}{v_0}. \tag{34}$$

Уравнение (34) показывает, что траектория движения частицы изогнута к току и частица, двигаясь по ней согласно (33), захватывается током. Время T захвата частицы с прицельным расстоянием p получаем непосредственно из (33), положив $r = a$,

$$T = \sqrt{\frac{p}{2\beta}}\left(a\sqrt{\frac{p}{a} - 1} + 2p\,\text{arctg}\sqrt{\frac{p}{a} - 1}\right). \tag{35}$$

Захват частиц по z происходит в интервале $z_q \leqslant z \leqslant z_Q$, где

$$z_\gamma = v_0\sqrt{\frac{\gamma}{2\beta}}\left(a\sqrt{\frac{\gamma}{a} - 1} + 2\gamma\,\text{arctg}\sqrt{\frac{\gamma}{a} - 1}\right), \tag{36}$$

а γ, как и выше, принимает значения q и Q. Плотность $\eta(z)$ захвата частиц уменьшается с ростом z в оценочном приближении

$$\eta(z) \approx \eta(z_q)\sqrt[3]{\frac{z_q}{z}}. \tag{37}$$

При поперечном преобразовании пучка ферромагнетиков по остаточной намагниченности движения частиц в плоскостях $z = \text{const}$ описывается дифференциальным уравнением (16) и

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -\beta\dot{r}^{-2}. \tag{38}$$

Дифференциальное уравнение траектории находим, исключив t из (16) и (38),

$$\frac{d^2(1/r)}{d\varphi^2} + \frac{1}{r} = \frac{\beta}{p^2 v_0^2}. \tag{39}$$

Траекторию движения частицы находим интегрированием (39) при условии, что $t_0 = 0$, $\varphi_0 \simeq 0$, $\frac{1}{z_0} \simeq 0$, $\dot{r}_0 \simeq -v_0$ и $r_0^2\dot{\varphi}_0 = pv_0$ (согласно (16)),

$$r = \frac{P}{1 + e\sin(\varphi + \vartheta)}, \tag{40}$$

где

$$P = \frac{p^2 v_0^2}{\beta}, \tag{41}$$

$$e = \sqrt{1 + \frac{p^2 v_0^4}{\beta^2}}, \tag{42}$$

$$\operatorname{tg}\vartheta = -\frac{\beta}{p v_0^2}. \tag{43}$$

Кривая (40) — гипербола, охватывающая ось тока с минимальным расстоянием r_m от оси,

$$r_m = \frac{P}{1+e}. \tag{44}$$

Если $r_m < a$, то произойдет захват частицы током. Условие захвата всего пучка[3]

$$\frac{Q^2 v_0^2}{\beta + \sqrt{\beta^2 + Q^2 v_0^4}} < a. \tag{45}$$

Время захвата T частицы с прицельным расстоянием p при $r_0 = l$ $(l \gg Q)$ получим, проинтегрировав (31), в первом приближении

$$T \approx \frac{1}{v_0}\left(l + \frac{\beta}{v_0^2}\ln\frac{p + a + \dfrac{\beta}{v_0^2}}{2l + \dfrac{\beta}{v_0^2}}\right). \tag{46}$$

Если же

$$a < \frac{q^2 v_0^2}{\beta + \sqrt{\beta^2 + q^2 v_0^4}}, \tag{47}$$

то пучок преобразуется в расходящийся, ограниченный в угловом интервале $\varphi_Q \leqslant \varphi \leqslant \varphi_q$, значения граничных углов которого определяются уравнением

$$\varphi_\gamma = \pi + \arcsin\frac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{\gamma^2 v_0^4}{\beta^2}}} + \operatorname{arctg}\frac{\beta}{\gamma v_0^2} \tag{48}$$

при подстановке в него вместо γ Q и q соответственно. Преобразованный пучок неоднородный по плотности $\eta(\varphi)$ и при больших значениях r $(r \gg Q)$ с увеличением угла рассеяния уменьшается. Так, в слабом $(\beta \ll p v_0^2)$ поле

$$\eta(\varphi \approx \eta(\varphi_Q))\,\frac{\cos\varphi}{\cos\varphi_Q}, \tag{49}$$

а в сильном $(\beta \gg p v_0^2)$

$$\eta(\varphi) \approx \eta(\varphi_Q)\,\frac{p^2 + \dfrac{\beta^2}{v_0^4}}{Q^2 + \dfrac{\beta^2}{v_0^4}}. \tag{50}$$

[3] Если

$$\frac{Q^2 v_0^2}{\beta + \sqrt{\beta^2 + Q^2 v_0^4}} > a > \frac{q^2 v_0^2}{\beta + \sqrt{\beta^2 + q^2 v_0^4}},$$

то произойдет частичный захват.

При расчете преобразований пучков ферромагнетиков по индуцированной намагниченности пренебрегаем остаточной намагниченностью. Тогда с учетом принятых упрощений математический формализм описания преобразования пучков ферромагнетиков сохранится тем же и в тех же обозначениях, что и для парамагнетиков. Так, при продольном преобразовании все полученные для парамагнетиков формулы, в том числе (9)–(13) и вытекающие из них следствия, остаются справедливыми и для пучков ферромагнетиков. То же касается и поперечных преобразований ферромагнетиков, в частности формул (23)–(28) и их следствий.

Однако эффективность преобразования ферромагнетиков существенно отличается от парамагнетиков из-за различия в несколько порядков $\mu - 1$ для них, а также наличия остаточной намагниченности в ферромагнетиках. Прикидочный расчет показывает, что практически преобразования пучков диа- и парамагнетиков с помощью магнитного поля линейного тока осуществимы при токах порядка десятков и сотен тысяч ампер, а ферромагнетиков — при десятках и сотнях ампер. Поэтому применение на практике рассмотренных преобразований пучков диа- и парамагнетиков затруднено и может проявляться при очень сильных токах, например при мощных линейных разрядах, коротких замыканиях токов. Применение же преобразований пучков ферромагнетиков магнитным полем линейного тока может быть осуществлено в обычных лабораторных и технологических условиях.

Отметим, что в уравнения движений частиц магнетиков и их траекторий в магнитном поле тока не входят размеры частиц, поэтому преобразования их пучков не зависят от размеров частиц. Кроме того, аналогично [4,5] можно сделать вывод, что преобразования пучков ферромагнетиков по остаточной намагниченности зависят от формы частиц, в остальных случаях (преобразований диа- и парамегнетиков и ферромагнетиков по индуцированной намагниченности) форма частиц на преобразования влияет слабо.

В заключение укажем, что расчеты преобразований пучков магнетиков проведены в работе при ряде существенных упрощений и идеализаций. Так, в действительности μ ферромагнетиков зависит от $\mathbf{H}$, процесс их намагниченности гистерезисный, остаточная намагниченность $\mathbf{J}_0$ в магнитном поле изменяется. Тем не менее результаты идеализированных расчетов окажутся полезными (первыми приближениями) для более точных расчетов преобразований пучков магнетиков магнитными полями линейных постоянных токов.

Список литературы

[1] *Измаилов С.В.* Курс электродинамики. М.; Л.: Учпедгиз, 1952. 202 с.

[2] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М.: ГИФМЛ, 1959. С. 100, 170.

[3] *Штепа Н.И.* // ЖТФ. 1979. Т. 49. Вып. 9. С. 1839–1845.

[4] *Штепа Н.И.* // ЖТФ. 1993. Т. 63. Вып. 2. С. 182–184.

[5] *Штепа Н.И.* // ЖТФ. 1995. Т. 65. Вып. 2. С. 203–205.