

01;12

Использование гистерезиса в бифуркационных системах для измерения шума

© О.Я. Бутковский, Ю.А. Кравцов, Е.Д. Суровяткина

Институт космических исследований РАН,
117810 Москва, Россия

(Поступило в Редакцию 8 ноября 1995 г. В окончательной редакции 12 апреля 1996 г.)

Предложено использовать явление затягивания шумов при динамических бифуркациях для измерения уровня слабых внутренних шумов в нелинейных хаотических системах. Найдена зависимость размера гистерезисной петли от скорости изменения управляющего параметра и от уровня шумов в системе, описываемой логистическим отображением. Получена калибровочная кривая, определяющая уровень шума по измеренным размерам гистерезисной петли.

Введение

Явление затягивания потери устойчивости в бифуркационных системах известно уже достаточно давно [1]. Его подробный анализ проведен во многих опубликованных работах ([2–8] и цитированная там литература). Как известно, при прохождении бифуркационной точки число устойчивых периодических точек отображения удваивается, в то время как устойчивая прежде точка становится неустойчивой. Явление затягивания проявляется в том, что при динамических бифуркациях после прохождения бифуркационного значения система достаточно долго находится на неустойчивой ветви и лишь через некоторое время сравнительно быстро переходит в одно из двух устойчивых положений (для простоты мы рассматриваем случай первой бифуркации удвоения). Похожий процесс происходит и при обратном переходе, т. е. при уменьшении управляющего параметра. Чем медленнее управляющий параметр, тем отчетливее выражено явление затягивания.

При циклическом изменении управляющего параметра система задерживается в окрестности прежних устойчивых точек как при прямом, так и при обратном ходе, при этом явление затягивания приводит к появлению гистерезисной петли.

Ясно, что при наличии шумов время пребывания системы возле неустойчивой ветви сокращается, поскольку шумовое воздействие ускоряет отклонение от неустойчивого положения. Это явление напоминает ускорение фазовых переходов под действием шумовых факторов. Как известно, при малых уровнях шума вещество имеет тенденцию задерживаться вблизи неустойчивого (метастабильного) состояния, что подобно явлению затягивания в бифуркационных системах. Между тем дополнительное шумовое воздействие сокращает время пребывания возле неустойчивой ветви подобно тому, как шум сокращает размеры гистерезисной петли в бифуркационной системе.

Попытки описать явление затягивания при воздействии шумов были предприняты в работах [9–13], где рассмотрены как качественные, так и некоторые количе-

ственные характеристики явления. В данной работе мы предлагаем использовать зависимость времени затягивания от уровня внешнего шума для измерения слабых внутренних шумов в системе.

Особенности явления гистерезиса при динамических бифуркациях в присутствии шумов

Характеристики ”шумового” гистерезиса, т. е. гистерезиса в присутствии шумов, рассмотрим на примере модельной динамической системы, описываемой нестационарным зашумленным логистическим отображением:

$$x_{n+1} = r_n x_n (1 - x_n) + f_n, \quad r_{n+1} = r_n + s, \quad (1)$$

где r_n — меняющийся во времени управляющий параметр, s — скорость измерения управляющего параметра, f_n — случайное воздействие.

Для простоты мы ограничимся равномерным распределением случайной величины f_n в интервале $(-\gamma, +\gamma)$, так что дисперсия σ_f^2 равна $\gamma^2/3$. Логистическая модель, усложненная шумом и нестационарностью, уже применялась для анализа бифуркаций в работах [7,10]. В квазистационарном режиме первая бифуркация удвоения периода для логистического отображения имеет место при критическом значении $r_{c1} = 3$. Исследуем окрестность этой точки, изменяя управляющий параметр в пределах от $r_0 = 2.8$ до $r_1 = 3.2$ (прямой ход) и от 3.2 до 2.8 (обратный ход, при обратном ходе величина s в (1) меняет знак). Результаты численного расчета зависимости динамической переменной x_n от управляющего параметра r_n представлены на рис. 1 для случая очень малых шумов $\sigma_f^2 = 10^{-14}$. При скорости изменения s , равной 0.0004, прямая бифуркация происходит при $r_+ = 3.08$, которая превышает критическое значение $r_{c1} = 3$, тогда как при обратном ходе возвращение к исходному устойчивому состоянию имеет место при $r_- = 2.95$, что меньше критического значения.

При прохождении критического значения $r = r_{c1} = 3$ устойчивая ветвь A на рис. 1 расщепляется на две

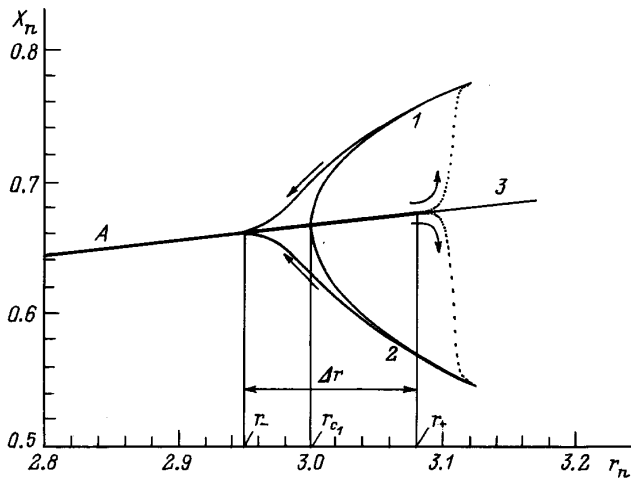


Рис. 1. Гистерезисная петля при "шумовом" гистерезисе ($s = 0.0004$, $\sigma_f^2 = 10^{-14}$) в динамической системе, описываемой логистическим отображением.

устойчивые ветви 1 и 2 и на неустойчивую ветвь 3. Вследствие явления затягивания потери устойчивости система может долго находиться в окрестности неустойчивой ветви, после чего довольно быстро переходит к одной из двух устойчивых ветвей 1 или 2 (рис. 1). Время пребывания системы возле неустойчивой ветви 3 ограничено действием шумов. С ростом уровня шума σ_f^2 система быстрее выбывает из окрестности неустойчивости ветви 3 и переходит к одной из устойчивых ветвей 1 или 2. Заметим, что явления, аналогичные описанным выше, происходят также при второй, третьей и т.д. бифуркациях удвоения периода [13,14].

Результаты численного анализа влияния шума на бифуркационный процесс представлены на рис. 2. Согласно рис. 2, чем больше уровень шума, тем быстрее система переходит в устойчивое положение. С ростом уровня шума момент фактической бифуркации приближается к своему квазистационарному значению $r_{c1} = 3$. Таким образом, шум ускоряет бифуркационный процесс и уменьшает размер гистерезисной петли.

Размер гистерезисной петли Δr можно характеризовать положением точки отрыва r_+ траектории ветви 3 при прямом ходе и положением точки возвращения r_- при обратном ходе (рис. 1). Фиксацию точек r_+ и r_- естественно осуществить исходя из условия, чтобы траектория удалилась от неустойчивой ветви 3 (или приблизилась к устойчивой ветви A) на определенное расстояние, скажем, на величину порядка 1% от стационарного значения. С ростом интенсивности шума σ_f^2 верхняя граница петли r_+ приближается к критическому значению r_{c1} , тогда как нижняя граница петли r_- практически не зависит от шумов. Это обстоятельство в прежних публикациях отмечено не было.

Закономерности "шумового" гистерезиса, выявленные при анализе зашумленного нестационарного логистического отображения, могут проявляться и в других бифуркационных системах, например в поляризационных бифуркациях в нелинейной оптике [15,16].

Распределение вероятностей динамической переменной при быстром бифуркационном переходе

Для анализа эволюции распределения вероятностей динамической переменной мы рассчитали распределения этой величины при нескольких значениях управляющего параметра $r = 2.9, 2.95, 3.00, 3.05, 3.10, 3.20$. Каждая гистограмма рассчитывалась по 500 реализациям. На рис. 3 показан набор гистограмм, отвечающих скорости изменения контрольного параметра $s = 0.0004$ и уровню шума $\sigma_f^2 = 10^{-8}$. Бифуркация на гистограммах проявляется сначала в виде расщепленного пика, который затем быстро разделяется на два самостоятельных пика, соответствующих двум устойчивым бифуркационным ветвям 1 и 2. Расщепление происходит при значении контрольного параметра $r_{c1} \approx 3.04$. Таким образом, расщепление имеет место при значении контрольного параметра, превышающего стационарное бифуркационное значение $r_{c1} = 3.00$. При переходе через бифуркационное значение $r = r_{c1} = 3.00$ мы не обнаружили расширение гистограмм, отвечающее "предбифуркационному шуму" [17] (аналог "предосцилляционных" флуктуаций). Незначительное усиление флуктуаций наблюдалось разве только в окрестности фактических точек расщепления траекторий.

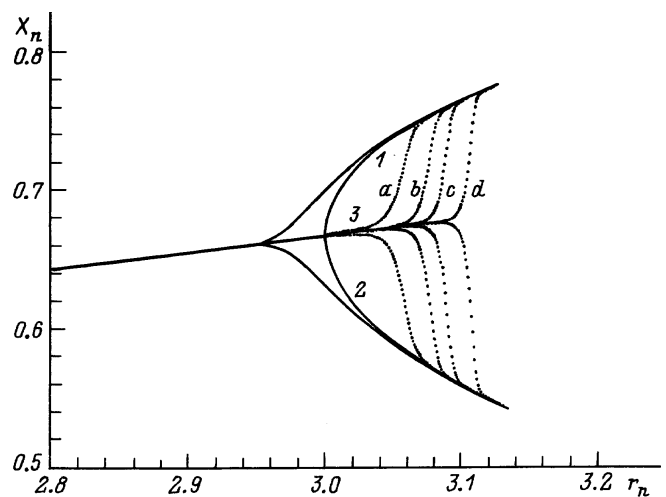


Рис. 2. "Шумовой" гистерезис в логистическом отображении при скорости $s = 0.0004$ и при различных значениях интенсивности шума. $\sigma_f^2 = 10^{-6}$ (кривая a), 10^{-8} (кривая b), 10^{-10} (кривая c), 10^{-14} (кривая d).

Возможность измерения слабых внутренних шумов в бифуркационных динамических системах

Явление гистерезиса при бифуркационных переходах может оказаться полезным для измерения уровня слабого внутреннего шума в исследуемых системах, что обычно представляет собой сложную экспериментальную задачу.

Дело в том, что в случае слабых шумов флуктуации $\xi = x - \bar{x}$ относительно положения равновесия \bar{x} достаточно малы. Основываясь на линеаризованных уравнениях для ξ [7,9], можно заметить, что дисперсия флуктуаций $\sigma_\xi^2 = \langle \xi^2 \rangle$ равна

$$\sigma_\xi^2 = \frac{\sigma_f^2}{1 - A^2}, \tag{2}$$

где $A = \partial F / \partial x$ — "крутизна" отображения в стационарной точке.

Для логистического отображения $A = 2 - r$. Вдали от точки бифуркации дисперсия σ_ξ^2 сравнима в силу (2) с σ_f^2 , что и затрудняет проведение измерений.

По мере приближения к точке бифуркации величина $|A|$ стремится к единице. При $r = r_{c1}$ величина $|A| = |2 - r|$ равна единице, а дисперсия (2), вычисленная по линеаризованной теории, обращается в бесконечность. В действительности при $r \rightarrow r_{c1}$ линеаризованная теория теряет силу, а грубый учет нелинейных членов показывает, что оценка σ_ξ^2 при $r \rightarrow r_{c1}$ насыщается на уровне $\sigma_\xi^2 = \sigma_f^2 / G$, характеризующем "предбифуркационный рост флуктуаций" [17] (здесь $G \approx 3$). При дисперсии шумов ниже уровня 10^{-8} величина предбифуркационных флуктуаций σ_ξ^2 все равно оказывается достаточно малой $\sigma_\xi^2 < 0.4 \cdot 10^{-4}$.

В этих условиях динамический метод определяющий уровни шумов по характеристикам петли гистерезиса

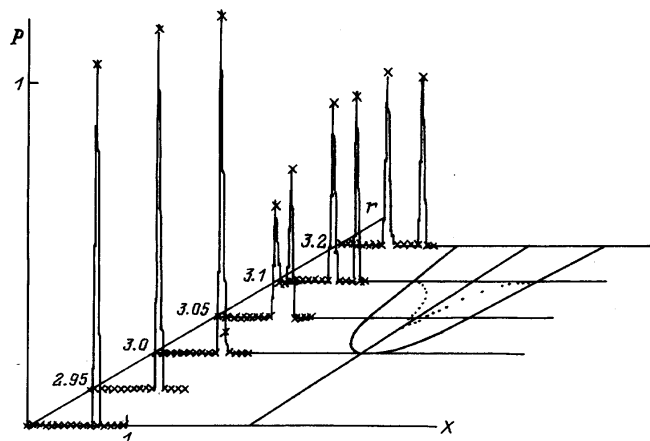


Рис. 3. Гистограммы, характеризующие расщепление вероятности динамической переменной x с ростом управляющего параметра, при скорости $s = 0.0004$ и значении интенсивности шума $\sigma_f^2 = 10^{-6}$.

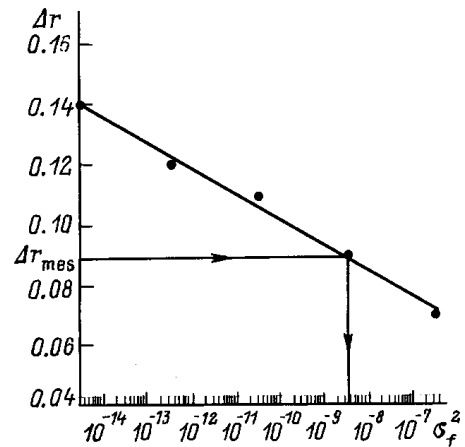


Рис. 4. Зависимость шумовой гистерезисной петли $\Delta r = r_+ - r_-$ от уровня шума, позволяющая оценить уровень шума путем измерения.

обеспечивает гораздо большую чувствительность, поскольку размер петли весьма чувствителен к слабому шуму.

В качестве примера на рис. 4 показана зависимость размера гистерезисной петли $\Delta r = r_+ - r_-$ от уровня шума σ_f^2 для логистического отображения. Как видно из этого рисунка, с ростом шума σ_f^2 размер петли Δr уменьшается.

Для того чтобы оценить уровень шума σ_f^2 , предлагается измерять длину гистерезисной петли $\Delta r = r_+ - r_-$ и по калибровочному графику $\Delta r = F(\sigma_f^2)$ устанавливать дисперсию внутренних шумов в системе. Такой метод позволяет оценивать весьма низкие уровни шума σ_f^2 вплоть до $10^{-12} - 10^{-14}$. В наших численных экспериментах меньшие уровни шума реализовать не удалось из-за влияния ошибок округления, но в реальных физических системах этого ограничения не будет, что и позволит определять весьма малые уровни шума.

Можно ожидать, что в других динамических системах зависимость размера петли Δr от уровня шума будет иметь поведение, качественно подобное описанному. Разумеется калибровочные кривые $\Delta r = F(\sigma_f^2)$ будут различными для разных систем.

Можно рекомендовать и другой метод определения σ_f^2 , основанный на измерении времени τ пребывания системы в узкой окрестности неустойчивой ветви 3. Это время существенно зависит от интенсивности шумов, так что, измерив τ , можно будет оценить дисперсию шумов σ_f^2 при помощи калибровочных кривых, подобных кривым на рис. 4.

Бутковский О.Я. и Кравцов Ю.А. выражают признательность Международному научному фонду за частичную поддержку данной работы в рамках грантов № AG000 и AG300.

Авторы благодарны рецензенту за критические замечания, способствовавшие более четкому изложению.

Список литературы

- [1] Шишкова М.А. // ДАН СССР. 1973. Т. 209. № 3. С. 576–579.
- [2] Нейштадт А.И. // Успехи мат. наук. 1985. Т. 41. № 5. С. 300–301.
- [3] Нейштадт А.И., Сидоренко В.В. Препринт Института прикладной математики РАН. № 56. 1995. С. 28.
- [4] Morris B., Moss. // Phys. Lett. A. 1986. Vol. 118. P. 117.
- [5] Mandel P., Erneux T. // Phys. Rev. Lett. 1984. Vol. 53. P. 1818.
- [6] Lefebvre M., Dangoisse D., Glorieux P. // Phys. Rev. 1984. Vol. A29. P. 1486.
- [7] Baesens C. // Physica. 1991. Vol. 53. N 2–4. P. 319–376.
- [8] Dynamical Bifurcations. Lecture Notes in Mathematics / Ed. E. Benoit. Berlin: Springer Verlag, 1993.
- [9] Pieranski P., Malecki J. // Nuovo Cimento. 1987. Vol. D9. P. 757–780.
- [10] Vanden Broeck C., Mandel P. // Phys. Lett. 1987. Vol. A122. P. 36–38.
- [11] Zeglache H., Mandel P., Vanden Broeck C. // Phys. Rev. 1989. Vol. A40. P. 286–294.
- [12] Anosov O.L., Butkovskii O.Ya., Kravtsov Yu.A., Surovyatkina E.D. // Proc. III Technical Conf. on Nonlinear Dynamics (CHAOS) and Full Spectrum Processing. Connecticut (USA), 1995.
- [13] Butkovskii O.Ya., Brush J.S., Kravtsov Yu.A. // Predictability of Complex Dynamical System. Berlin; Heidelberg: Springer Verlag, 1995.
- [14] Kapral R., Mandel P. // Phys. Rev. 1985. Vol. A32. P. 1076–1081.
- [15] Arimondo E., Dangoisse D., Grabbanini C., Menchi E., Papoff F. // J. Opt. Soc. Am. 1987. Vol. B4. P. 892–899.
- [16] Желудев И.Н. // УФН. 1989. Vol. 157. № 4. С. 683.
- [17] Хорсхемке В., Лефевр Р. Индуцированные шумом переходы. Теория и приложения к физике, химии и биологии. М.: Мир, 1987.