

Динамика маятника с квазипериодическим возбуждением

© А.Д. Грищенко, Д.М. Ваврив

Институт радиоастрономии НАН Украины,
310002 Харьков, Украина

(Поступило в Редакцию 25 марта 1996 г. В окончательной редакции 10 июля 1996 г.)

Исследуется динамика маятника с затуханием и квазипериодическим внешним воздействием. Показано, что в отличие от маятника с периодическим воздействием квазипериодическое возбуждение приводит к возникновению хаоса в слабонелинейном пределе, когда размах колебаний маятника является малым. Этот эффект связывается с возникновением седловых состояний, индуцированных внешним воздействием. С помощью метода текущих показателей Ляпунова, а также техники повторного усреднения получены аналитические условия возникновения хаотических колебаний.

Введение

Осцилляторы с квазипериодическим возбуждением в отличие от осцилляторов с гармоническим возбуждением могут проявлять хаотическое поведение даже в слабонелинейном пределе. К настоящему времени этот факт был доказан при рассмотрении динамики осцилляторов Дуффинга и Ван-Дер-Поля [1–5]. Существование хаотических состояний при этих условиях доказывает, что квазипериодическое воздействие в отличие от периодического может качественно изменить динамику слабонелинейных систем и устойчивость большинства из них должна быть пересмотрена с учетом возможности существования хаотических состояний в слабонелинейном пределе. В данной работе мы анализируем с этой точки зрения динамику маятника с квазипериодическим возбуждением. Мы покажем, что при таком типе возбуждения колебания маятника становятся хаотическими, даже когда его угловое смещение от вертикали мало или, более того, оно может быть произвольно малым. Переход к хаосу в данном случае связан с индуцированными седловыми орбитами, возникающими под влиянием внешнего воздействия. Когда во внешней силе появляется дополнительная периодическая компонента, в фазовом пространстве системы возникает гиперболический инвариантный тор вместо седловой орбиты. Странные аттракторы, формирующиеся в результате пересечения устойчивых и неустойчивых многообразий индуцированных торов, возникают здесь при значительно меньшей величине интенсивности внешнего воздействия по сравнению с периодически возбуждаемым маятником. Основным результатом данной работы является аналитическое определение условий возникновения хаоса в маятнике в результате разрушения двумерных торов. Для этого используется метод текущих показателей Ляпунова, а также техника повторного усреднения. Для интерпретации результатов и объяснения механизмов перехода к хаосу используется концепция индуцированных седловых состояний [6].

Математическая модель

Уравнение движения маятника с квазипериодическим возбуждением может быть записано в виде

$$\begin{aligned} \frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\alpha\omega_0 \frac{d\varphi}{dt} + \omega_0^2 \sin \varphi \\ = 2\omega_0^2(B_1 \sin \omega_1 t + B_2 \sin \omega_2 t), \end{aligned} \quad (1)$$

где φ — угловое отклонение маятника от вертикали; $\alpha > 0$ — безразмерный коэффициент затухания; ω_0 — собственная частота; B_1, B_2 — безразмерные амплитуды периодических компонент внешней силы с частотами ω_1, ω_2 .

Странные хаотические и нехаотические аттракторы этого осциллятора интенсивно изучались в связи с многочисленными приложениями уравнения данного типа [7–9], однако основное внимание было уделено динамике сильно нелинейного маятника. В данной работе рассматриваются хаотические состояния слабонелинейного маятника, возникающие под действием малого внешнего возмущения и характеризующиеся малыми значениями отклонения φ . Для удобства перепишем уравнение (1) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega_0^2 \varphi = -2\alpha\omega_0 \frac{d\varphi}{dt} + \omega_0^2(\varphi - \sin \varphi) \\ + 2\omega_0^2(B_1 \sin \omega_1 t + B_2 \sin \omega_2 t), \end{aligned} \quad (2)$$

где в правой части уравнения содержатся нелинейные слагаемые относительно φ и члены, описывающие затухание и внешнюю силу, которые рассматриваются как малые возмущения.

Это предположение позволяет нам использовать метод усреднения для изучения уравнения (2). При условии что имеет место резонансное возбуждение осциллятора, т.е. $|\omega_{1,2} - \omega_0| \ll \omega_0$, мы воспользуемся следующим преобразованием, чтобы привести (2) к стандартному

виду [10],

$$\varphi = u \cos(\omega' t) + \nu \sin(\omega' t),$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\omega' u \sin(\omega' t) + \omega' \nu \cos(\omega' t),$$

где $u(t)$ и $\nu(t)$ — медленно меняющиеся функции времени; ω' — пока произвольная частота, удовлетворяющая условию резонанса $|\omega' - \omega_0| \ll \omega_0$.

Дальнейшее применение процедуры усреднения [10] приводит к следующей системе укороченных уравнений относительно $u(\tau)$ и $\nu(\tau)$:

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\tau} &= -\alpha u - \left[\Delta' + \frac{J_1(A)}{A} - \frac{1}{2} \right] \nu \\ &\quad - B_1 \cos(\Delta' - \Delta_1)\tau - B_2 \cos(\Delta' - \Delta_2)\tau, \\ \frac{d\nu}{d\tau} &= -\alpha \nu + \left[\Delta' + \frac{J_1(A)}{A} - \frac{1}{2} \right] u \\ &\quad - B_1 \sin(\Delta' - \Delta_1)\tau - B_2 \sin(\Delta' - \Delta_2)\tau, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\tau = \omega_0 t$, $\Delta' = (\omega_0 - \omega')$, $\Delta_{1,2} = (\omega_0 - \omega_{1,2})/\omega_0$, $J_1(A)$ — функция Бесселя первого рода, $A = \sqrt{u^2 + \nu^2}$ — амплитуда вынужденных колебаний.

Выбирая Δ' равным Δ_1 или Δ_2 , видим, что система (3) переходит в неавтономную систему уравнений с периодическим возмущением в отличие от квазипериодического возмущения, которое присутствовало в исходной системе. Период возмущения равен $T = 2\pi/|\Omega|$, где $\Omega = \Delta_2 - \Delta_1 \equiv (\omega_1 - \omega_2)/\omega_0$ — безразмерная частота биений квазипериодического возбуждения.

Для того чтобы найти соответствие между решениями уравнения (3) и исходной системы (2), мы нашли численно решения этих уравнений и сравнили полученные результаты. Пример такого сравнения приведен на рис. 1, где представлена зависимость амплитуды вынужденных колебаний A от расстройки частоты Δ_1 для периодически возбуждаемого маятника. Очевидно, хорошее как качественное, так и количественное совпадение между решениями приведенных выше уравнений даже для случая, когда амплитуда колебаний достигает $\pi/2$. Этот

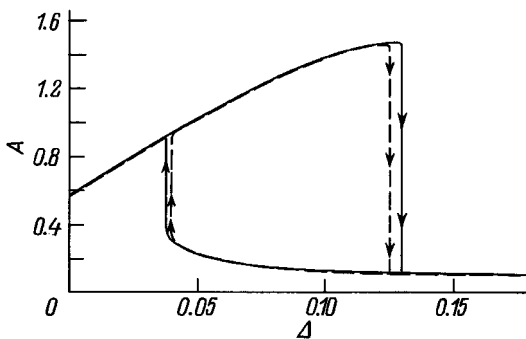


Рис. 1. Зависимость амплитуды вынужденных колебаний периодически возбуждаемого маятника от параметра частотной расстройки. Исходно (сплошная линия) и укороченные (штриховая линия) уравнения при $\alpha = 0.001$, $\omega_0 = 1$, $B_2 = 0$, $B_1 = \sqrt{2} \cdot 10^{-2}$.

результат оказывается верным для различных режимов возбуждения маятника (регулярных и хаотических) в широком диапазоне изменения параметров, если только $\max\{A(\tau)\} \leq \pi/2$.

В отличие от уравнения (1) усредненные уравнения не описывают хаотические состояния периодически возбуждаемого маятника. В этом случае, например, когда $B_1 \neq 0$, а $B_2 = 0$, система (3) обладает только устойчивыми состояниями равновесия с амплитудой, определяемой из решения следующего уравнения:

$$A^2 \left[\left(\Delta_1 + \frac{J_1(A)}{A} - \frac{1}{2} \right)^2 + \alpha^2 \right] = B_1^2. \quad (4)$$

Однако в случае квазипериодического возбуждения ($B_1 \neq 0$ и $B_2 \neq 0$) динамика системы становится намного богаче и включает хаотические состояния слабонелинейного маятника.

Условия возникновения хаоса в сильно- и слабонелинейном маятнике

Для того чтобы получить некоторые общие условия возникновения хаоса в системе (3), следует проанализировать свойства фазового потока этой системы. Для этого воспользуемся методом текущих показателей Ляпунова [11]. Согласно этому методу рассмотрим поведение малых возмущений решения системы (3) $\xi(\tau)$, $\eta(\tau)$, определяемых как $\xi(\tau) = u^*(\tau) - u(\tau)$, $\eta(\tau) = \nu^*(\tau) - \nu(\tau)$, где $u^*(\tau)$, $\nu^*(\tau)$ — координаты возмущенной траектории в фазовом пространстве системы (3). После линеаризации системы (3) в окрестности ее траектории приходим к следующей системе уравнений относительно амплитуды $\rho \equiv \sqrt{\xi(\tau)^2 + \eta(\tau)^2}$ и фазы $\text{tg } \Phi \equiv \xi(\tau)/\eta(\tau)$ вектора в касательном пространстве системы (3)

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{d\tau} &= \frac{\rho}{2} \left[-2\alpha + \frac{AJ_0(A) - 2J_1(A)}{A} \sin(2\chi) \right], \\ \frac{d\Phi}{d\tau} &= \frac{1}{2} \left[2\Delta' - 1 + \frac{AJ_0(A) - 2J_1(A)}{A} \cos(2\chi) \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь $\chi = \Phi - \vartheta$, $A = \sqrt{u^2 + \nu^2}$, $\vartheta = \text{arctg}(\nu/u)$, где $u(\tau)$ и $\nu(\tau)$ — решения усредненных уравнений (3). Максимальный текущий показатель Ляпунова определяется как $\mu_1(\tau) = (d/d\tau) \ln \rho$, и для рассматриваемого случая мы имеем

$$\mu_1 = -\alpha + \frac{AJ_0(A) - 2J_1(A)}{2A} \sin(2\chi). \quad (6)$$

Следует отметить, что стандартный характеристический показатель Ляпунова λ_1 находится из μ_1 усреднением по времени [11]

$$\lambda_1 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \mu_1(\tau) d\tau.$$

Таким образом, необходимое условие возникновения хаоса сводится к очевидному требованию $\mu_1(\tau) > 0$, что должно иметь место на некотором конечном интервале времени. Обратное неравенство является достаточным условием для регулярного движения системы.

Исходя из уравнения (6), мы можем написать следующее необходимое условие для возникновения хаоса в слабонелинейном маятнике

$$\max \left| \frac{AJ_0(A) - 2J_1(A)}{2A} \right| > \alpha. \quad (7)$$

Максимум этого выражения равен 0.24, он достигается при $A \equiv A_{\text{ext}} = 3$. Таким образом, система (3) может иметь хаотические решения только при $\alpha < 0.24$, иначе поведение маятника остается регулярным вне зависимости от значения других параметров и вида внешнего воздействия. Рассмотрим случай малых колебаний маятника, когда максимальное значение амплитуды $A(\tau)$ мало, тогда с точностью до $O(A^3)$ вместо уравнения (7) получаем

$$\max |A(\tau)| > 4\sqrt{\alpha}. \quad (8)$$

Следовательно, чем меньше диссипация в системе, тем меньший размах колебаний маятника может привести к возникновению хаоса. Это неравенство дает оценку порога возникновения хаотических колебаний по отношению к амплитуде вынужденных колебаний. Допустим, что максимальное значение амплитуды вынужденных колебаний $A(\tau)$ приблизительно такое же, как и для периодически возбуждаемого маятника. Следует ожидать, что это предположение выполняется хорошо, если, например, одна из амплитуд внешней силы много больше другой, т.е. $B_1 \gg B_2$, либо вторая периодическая компонента действует нерезонансным способом. Тогда максимальное значение амплитуды $A(\tau)$ можно легко оценить из уравнения (4), что дает $\max |A(\tau)| = B_1/\alpha$. Этот результат в комбинации с уравнением (8) позволяет найти приближенное выражение для порогового значения амплитуды $B_{1\text{cr}}$ вынуждающей силы и необходимое условие возникновения хаоса

$$B_1 > B_{1\text{cr}} = 4\alpha^{3/2}. \quad (9)$$

Когда условия (8), (9) удовлетворяются одновременно, в фазовом пространстве системы (3) наблюдается локальная неустойчивость траекторий. Выяснилось, что эта неустойчивость может привести к глобальной неустойчивости и возникновению хаотических колебаний в слабонелинейном пределе. В этом случае величина интенсивности внешнего возмущения $I \equiv (B_1^2 + B_2^2)/2$, необходимая для возбуждения хаотических колебаний в квазипериодически возбуждаемом маятнике, оказывается намного меньше, чем в маятнике, возбуждаемом периодически. Для иллюстрации этого факта на рис. 2 приведена диаграмма состояний маятника на плоскости параметров $(\log I, \Delta_1)$ для этих двух случаев. Штриховая линия показывает границу возникновения хаотических областей для периодически возбуждаемого маятника (1)

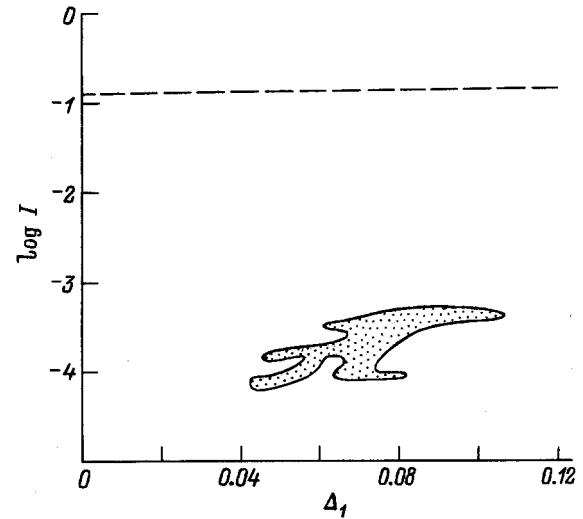


Рис. 2. Диаграмма состояний для периодически и квазипериодически возбуждаемого маятника при $\alpha = 0.001$, $\omega_0 = 1$. Точки — область хаоса с наименьшими значениями интенсивности I для квазипериодически возбуждаемого маятника с $B_1 = B_2$, $\Delta_1 - \Delta_2 = 0.04$.

при $B_2 = 0$, $\alpha = 0.01$, $\omega_0 = 1$. В этом случае хаос возникает только тогда, когда внешняя сила достаточно велика для того, чтобы привести маятник во вращательное движение или близка к такому значению. Механизм перехода к хаосу в данной области связан с существованием гомоклинической петли седловой точки в цилиндрическом фазовом пространстве невозмущенного маятника (1), когда диссипация и внешняя сила отсутствуют. Наличие возмущения приводят к возникновению гомоклинической структуры в результате пересечения устойчивых и неустойчивых многообразий гиперболических периодических орбит [12,13].

Подобным образом хаотические колебания могут также возникать и в квазипериодически возбуждаемом маятнике [8], однако порог возникновения хаоса относительно интенсивности I практически не изменяется, поскольку формирование гомоклинической структуры связано с вышеуказанными седловыми состояниями невозмущенного маятника. Однако в этом случае возникают дополнительные области хаоса, отмеченные точками на рис. 2, где пороговое значение интенсивности I уменьшается на несколько порядков по сравнению с периодически возбуждаемым маятником. Это и есть области хаотического поведения слабонелинейного маятника. Переход к хаосу в этих областях никак не связан с сингулярными седловыми точками невозмущенного маятника. Это следует из того, что хаотическое движение маятника в этих областях полностью описывается системой усредненных уравнений (3), в которой существование указанных седловых точек не учитывается. Следовательно, формирование гомоклинической структуры в слабонелинейном маятнике может иметь место только на основе других седловых состояний, которые возникают в фазовом про-

странстве системы (3) под влиянием внешней силы. Такие седловые состояния, согласно [6], мы будем называть индуцированными.

Индуцированные седловые состояния и хаос

Индуцированные седловые состояния возникают при выполнении определенных резонансных соотношений в системе (3). Выделим три основных вида резонансов в этой системе. Первый резонанс определяется условием

$$|\omega_0 - \omega_m| \ll |\omega_1 - \omega_2|, \quad (10)$$

где $\omega_m \equiv (\omega_1 + \omega_2)/2$ — средняя частота.

Возникновение колебания с частотой, равной средней частоте, соответствует первой бифуркации удвоения в системе (3), что соответствует бифуркации удвоения двумерных торов в исходной системе (1).

Два других резонанса наблюдаются тогда, когда одна из частот внешнего воздействия (ω_1 или ω_2) близка к собственной частоте ω_0 , т. е. когда

$$|\omega_1 - \omega_0| \ll |\omega_1 - \omega_2|, \quad (11)$$

$$|\omega_2 - \omega_0| \ll |\omega_1 - \omega_2|. \quad (12)$$

В этих случаях наблюдается нарастание колебаний с частотой ω_1 или ω_2 .

Рассмотрим условия возникновения индуцированных седловых состояний для этих резонансов. Для изучения резонанса (10) выполним следующие преобразования системы (3): 1) частоту ω' выберем равной $(\omega_1 + \omega_2)/2$; 2) введем новые переменные

$$\begin{aligned} x &= u + \frac{B_1}{\Delta' - \Delta_1} \sin(\Delta' - \Delta_1)\tau + \frac{B_2}{\Delta' - \Delta_2} \sin(\Delta' - \Delta_2)\tau, \\ y &= v - \frac{B_1}{\Delta' - \Delta_1} \cos(\Delta' - \Delta_1)\tau - \frac{B_2}{\Delta' - \Delta_2} \cos(\Delta' - \Delta_2)\tau; \end{aligned} \quad (13)$$

3) функцию Бесселя заменим двумя первыми членами ее разложения в ряд по A , т. е. $J_1(A) \approx A/2 - A^3/16$.

Проделав все это, мы приходим к следующей системе уравнений относительно новых переменных

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= -\alpha \left(x - A_1 \sin \frac{\Omega}{2} \right) - \left[\Delta_m - \frac{1}{16} \left(x - A_1 \sin \frac{\Omega}{2} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{16} \left(y + A_2 \cos \frac{\Omega}{2} \right)^2 \right] \left(y + A_2 \cos \frac{\Omega}{2} \right), \\ \frac{dy}{d\tau} &= -\alpha \left(y + A_2 \cos \frac{\Omega}{2} \right) - \left[\Delta_m - \frac{1}{16} \left(x - A_1 \sin \frac{\Omega}{2} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{16} \left(y + A_2 \cos \frac{\Omega}{2} \right)^2 \right] \left(x - A_1 \sin \frac{\Omega}{2} \right), \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$A_{1,2} = \frac{2(B_1 \pm B_2)}{\Omega}, \quad \Delta_m = \frac{\omega_0 - \omega_m}{\omega_0}.$$

Полагая, что правая часть этих уравнений мала, а частота Ω достаточно велика (смотри ниже), мы можем применить к этой системе процедуру усреднения по временному интервалу $[0, 2T]$. В результате получаем

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= -\alpha x - \left[\Delta + m - \frac{1}{16}(x^2 + y^2) \right] y, \\ \frac{dy}{d\tau} &= -\alpha y - \left[\Delta - m - \frac{1}{16}(x^2 + y^2) \right] x, \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$\Delta = \Delta_m - \frac{B_1^2 + B_2^2}{2\Omega^2}, \quad m = \frac{B_1 B_2}{2\Omega^2}.$$

Применение процедуры усреднения возможно только в том случае, если характерный временной масштаб системы (15), который составляет величину порядка $1/\alpha$, существенно больше интервала усреднения. Это приводит к следующему условию:

$$\alpha \ll |\Omega|/4\pi, \quad (16)$$

которое совместно с условием (10) определяет область применимости укороченных уравнений (15). В действительности это условие является слишком жестким, поскольку численные эксперименты показали, что эти укороченные уравнения адекватно описывают динамику маятника даже при $\alpha \approx |\Omega|/4\pi$.

Возбуждению субгармонических колебаний с периодом $2T$ в системе (3) соответствует существование нетривиальных состояний устойчивого равновесия в системе (15). Следует отметить, что система (5) подобна системам уравнений, возникающим при изучении субгармонических бифуркаций в периодически возбуждаемом осцилляторе Дуффинга [14] или параметрически возбуждаемом осцилляторе [15]. В указанных примерах такая система уравнений возникает после непосредственного применения процедуры усреднения к исходным уравнениям, тогда как в данном случае она получается после повторного усреднения. Свойства системы (15) достаточно хорошо изучены, и мы укажем только некоторые из них. Стационарные значения амплитуды $W = (x^2 + y^2)^{1/2}$ задаются выражениями

$$W_1 = 0, \quad W_{2,3} = 4\sqrt{\Delta \pm \sqrt{m^2 - \alpha^2}}. \quad (17)$$

Если

$$|\Delta| < \sqrt{m^2 - \alpha^2}, \quad (18)$$

то состояние с амплитудой $W = W_2$ устойчиво, в то время как состояние с $W = 0$ является сингулярной седловой точкой, а состояние с $W = W_3$ не может быть реализованным. Когда

$$\Delta > \sqrt{m^2 - \alpha^2}, \quad (19)$$

то состояния с $W = 0$ и $W = W_2$ оказываются устойчивыми, а состояние с $W = W_3$ является седловым. Устойчивые состояния с ненулевыми значениями амплитуды

возникают попарно и различаются только по фазе. Таким образом, в области параметров, задаваемых уравнением (18), существует три устойчивых состояния равновесия, возникающие в результате суперкритической бифуркации, и пять устойчивых состояний в области (19), которые возникают в результате субкритической бифуркации.

Из уравнения (19) очевидно, что субгармонические колебания могут возникать только тогда, когда выполняются одновременно следующие условия

$$m > \alpha, \quad \Delta > -\sqrt{m^2 - \alpha^2},$$

или с учетом обозначений, принятых в системе (3), они переписываются в следующем виде:

$$B_1 B_2 > 2\alpha\Omega^2, \quad (20)$$

$$\frac{\omega_0 - \omega_m}{\omega_0} \equiv \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2} > \frac{B_1^2 + B_2^2}{2\Omega^2} - \sqrt{\frac{B_1^2 B_2^2}{4\Omega^4} - \alpha^2}. \quad (21)$$

Напомним, что $\Omega = \Delta_2 - \Delta_1 = (\omega_1 - \omega_2)/\omega_0$.

Как ожидалось, бифуркации удвоения тора в слабонелинейном маятнике происходят благодаря взаимодействию спектральных компонент внешней силы (см. (20)). Минимальное значение интенсивности $I \equiv (B_1^2 + B_2^2)/2$, приводящее к возникновению колебания на разностной частоте, достигается при $B_1 = B_2 \equiv B$ и, согласно уравнению (20), равно

$$I_{\min} \equiv B_{\min}^2 = 2\alpha\Omega^2. \quad (22)$$

Из соотношений (13) находим выражение для критического значения амплитуды A вынужденных колебаний в момент, когда происходит бифуркация удвоения,

$$A_{\text{cr}} = 2\sqrt{2\alpha}. \quad (23)$$

Примечательно, что эта величина практически совпадает (с точностью до множителей) со значением амплитуды A , дающей рост локальной неустойчивости (см. (8)). Она определяется только значением диссипации и может стать сколь угодно малой при уменьшении значения α в отличие от случая периодически возбуждаемого маятника, где $A_{\text{cr}} \approx \pi$.

Следует заметить, что значения α и Ω в уравнении (22) должны удовлетворять условию (16) и, следовательно, величина I_{\min} не может сколь угодно уменьшаться при уменьшении Ω . Величина $|\Omega| \approx 4\pi\alpha$, как следует из (16), может рассматриваться как предельное значение Ω . В этом случае вместо уравнения (22) имеем

$$I_{\min} \approx 32\pi^2\alpha^3. \quad (24)$$

Таким образом, чем меньше диссипация, тем при меньшей интенсивности внешней силы происходит первая бифуркация удвоения и при меньшей амплитуде вынужденных колебаний хаотические состояния начинают проявлять себя.

Уравнение для бифуркационной поверхности в пространстве параметров данной системы находится из

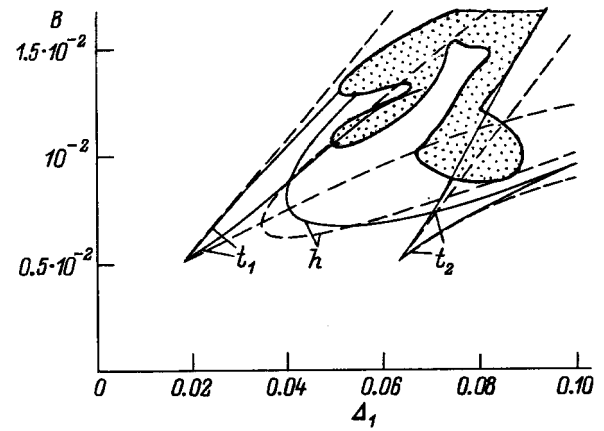


Рис. 3. Бифуркационная диаграмма квазипериодически возбуждаемого маятника с параметрами, соответствующими рис. 2. Приведены бифуркационные кривые, найденные численно (сплошные линии) и аналитически (штриховые линии) для бифуркации удвоения (h) и тангенциальной бифуркации (t_1, t_2). Область хаоса отмечена точками.

условия (21) путем замены в нем знака неравенства на знак равенства. На двумерной плоскости параметров (B, Δ_1) , приведенной на рис. 3, соответствующая бифуркационная кривая обозначена как h_1 . Здесь же приведена эта кривая, найденная численно. Следует отметить хорошее совпадение численных и аналитических результатов даже при $\Omega/\alpha = 4$. Внутри плоскости параметров, охватываемой этой кривой, хаотические состояния возникают на базе новых (индуцированных) гиперболических периодических орбит в фазовом пространстве системы (14). Координаты этих орбит в сечении Пуанкаре соответствуют стационарным седловым состояниям системы уравнений (15) (см. (17)). Гомоклиническая структура в фазовом пространстве системы (14) формируется в результате переченя устойчивых и неустойчивых многообразий таких орбит. Применительно к исходному уравнению хаотические состояния возникают в результате пересечения устойчивых и неустойчивых многообразий индуцированных гиперболических инвариантных торов.

Обратимся опять к плоскости параметров на рис. 3. Видно, что существуют дополнительные области хаоса, которые не предсказываются условиями (20), (21). В этих областях возникновение хаотических колебаний связано с другими резонансами, определяемыми условиями (11), (12). Эти резонансы могут быть изучены тем же способом, который описан выше. Поэтому мы здесь приводим только конечные результаты. В этом случае системы уравнений, полученные после повторного усреднения, имеют стационарные значения амплитуды, определяемые из следующего кубического уравнения относительно A^2 :

$$A^2 \left[\left(\Delta_{1,2} + \frac{B_{2,1}^2}{8\Omega^2} - \frac{A^2}{16} \right)^2 + \alpha^2 \right] = B_{1,2}^2. \quad (25)$$

Здесь первый и второй индексы относятся соответственно к резонансам (11) и (12). Когда $B_1 = B_2$, обе резонансные кривые одинаковы, единственным отличием является то, что они сдвинуты относительно друг друга вдоль оси частот. Анализ устойчивости стационарных состояний, определяемых уравнением (25), показывает, что, когда B_1 или B_2 превышают критическое значение

$$B_{1,2} > B_{cr} \equiv 5\alpha^{3/2}, \quad (26)$$

тогда в системе возникают седловые состояния в результате тангенциальной бифуркации. Критическое значение амплитуды колебаний маятника при $B_1 = B_{cr}$ или $B_2 = B_{cr}$ задается выражением

$$A_{cr} = 5\sqrt{\alpha}. \quad (27)$$

Вновь очевидно хорошее совпадение этих результатов с аналогичными результатами, полученными ранее методом текущих показателей Ляпунова (см. (8), (9)).

Бифуркационные кривые, соответствующие тангенциальной бифуркации, представлены на рис. 3. Они найдены как путем прямого численного интегрирования системы (3), так и аналитически из уравнения (25). В результате тангенциальной бифуркации любая периодическая орбита, существующая в фазовом пространстве системы (3), расщепляется на две устойчивые орбиты и одну седловую орбиту. С ростом интенсивности внешнего возмущения происходит пересечение устойчивых и неустойчивых множеств седловых орбит, что приводит к возникновению хаотических состояний. Последнее утверждение может быть доказано не только численно, но также путем применения метода Мельникова к системе (3) аналогично тому, как это было сделано для осциллятора Дуффинга в работе [5]. Однако здесь мы ограничимся необходимыми условиями возникновения хаоса, задаваемыми уравнением (26). Отметим также, что регулярное движение переходит в хаотическое при амплитуде вынужденных колебаний A , задаваемой выражением (27), значение которой может быть сколь угодно малым за счет уменьшения диссипации, как и в предыдущем случае (см. (23)).

Области хаоса, которые соответствуют различным резонансам, расположены близко одна к другой в пространстве параметров и частично перекрываются при увеличении интенсивности возмущения, как, например, в случае, показанном на рис. 3. Это является одной из причин мультистабильности слабонелинейного маятника, когда в результате пересечения резонансов в фазовом пространстве системы сосуществуют притягивающиеся множества, обусловленные различными резонансами. Вместе с тем существует и другая причина возникновения мультистабильности, которая обусловлена тем, что возникновение индуцированных седловых орбит, как уже отмечалось выше, всегда сопровождается формированием нескольких притягивающих орбит в фазовом пространстве. Представляет интерес детальное изучение этих процессов, так как, на наш взгляд, они являются типичными для различных типов осцилляторов (см., например, [3,16]).

Заключение

В этой работе проанализированы условия перехода к хаосу в квазипериодически возбуждаемом маятнике с затуханием. Показано, что хаотические состояния могут возникать при слабонелинейной режиме возбуждения маятника, когда он совершает малые колебания возле вертикали. Этот эффект обусловлен разрушением индуцированных гиперболических инвариантных торов, которые возникают в фазовом пространстве системы под внешним воздействием. Двухкратное применение метода усреднения позволило свести задачу о бифуркациях двумерных торов к изучению бифуркаций состояний равновесия, а также позволило изучить аналитически резонансы, ответственные за разрушение торов. Эти результаты дополнены исследованием локальных свойств фазового потока исследуемой системы, что позволило получить другим независимым путем условия хаотизации колебаний.

Результаты этой работы могут быть использованы для анализа устойчивости многих практических приборов, например параметрических усилителей на основе джозефсоновских переходов, смесителей и т.д. Наши исследования показали, что стабильная работа таких устройств при гармоническом воздействии необязательно будет сохраняться при реальном многочастотном воздействии из-за резкого уменьшения порога возникновения хаоса в последнем случае. Переход к хаосу в результате разрушения квазипериодических колебаний в слабонелинейном пределе может представлять реальную угрозу для практических приборов, ограничивая попытки понижения выходного уровня шумов, увеличения чувствительности и т.д.

Список литературы

- [1] Miles J. // Press. Nat. Acad. Sci. Phys. Sci. USA. 1984. Vol. 81. P. 3919–3923.
- [2] Белогорцев А.В., Вавриш Д.М., Третьяков О.А. // ЖТФ. 1988. Т. 58. Вып. 2. С. 284–294.
- [3] Belogortsev A.B., Vavriv D.M., Tretyakov O.A. // Appl. Mexh. Rev. 1988. Vol. 33. N 7. P. 174–179.
- [4] Yagasaki K., Sakata M., Kimura K. // ASME J. Appl. Mech. 1990. Vol. 57. N 1. P. 209–219.
- [5] Belogortsev A.B. // Nonlinearity. 1992. Vol. 5. N 4. P. 889–897.
- [6] Vavriv D.M., Ryabov V.B., Sharapov S.A., Ito M. // Phys. Rev. E. 1996. Vol. 53. N 1. P. 431–436.
- [7] Romeiras F.J., Ott E. // Phys. Rev. A. 1987. Vol. 35. N 6. P. 4404–4412.
- [8] Wiggins S. // SIAM. J. Appl. Math. 1988. Vol. 48. N 1. P. 262–269.
- [9] Kautz R.L. // J. Appl. Phys. 1985. Vol. 58. N 1. P. 424–440.
- [10] Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 346 с.
- [11] Вавриш Д.М., Рябов В.Б. ЖВМиМФ. 1992. Т. 32. № 9. С. 1409–1421.
- [12] D'Humieres D. et al. // Phys. Rev. A. 1982. Vol. 26. N 6. P. 3483–3496.

- [13] *Guckenheimer J.M., Holms P.* Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields. Berlin: Springer Verlag, 1983. 454 p.
- [14] *Holms C., Holms P.* // J. Sound. Vibration. 1981. Vol. 78. N 2. P. 161–174.
- [15] *Вавриц Д.М., Рябов В.Б., Чернышев И.Ю.* ЖТФ. 1991. Т. 61. Вып. 12. С. 1325–1331.
- [16] *Вавриц Д.М., Рябов В.Б.* // Письма в ЖТФ. 1991. Т. 17. Вып. 11. С. 55–59.