

## Вариационный подход к трехмерным обратным задачам теории потенциала

© Э.Л. Амромин, В.А. Бушковский

Центральный научно-исследовательский институт им. А.Н. Крылова,  
196158 Санкт-Петербург, Россия

(Поступило в Редакцию 12 февраля 1996 г. В окончательной редакции 13 августа 1996 г.)

Описан метод регуляризации и решения задач обтекания тел по желательному распределению характеристик полей на поверхности самих тел. Приводятся примеры решения таких задач для потенциальных течений жидкости и способ сведения обратных задач гидромеханики эффективно невязкой жидкости к задачам потенциала.

### Введение

Обратными называются задачи восстановления формы тел по заданным на их поверхности характеристикам потенциальных полей. Различные конкретные задачи из разных разделов физики и техники формализуются как однотипные или даже одинаковые задачи для уравнений Лапласа, Гельмгольца и т. д. Часто оказывается, что к подобным математическим задачам сводятся и обратные задачи для тех относительно узких (пограничных) слоев вблизи тел, где имеют место необратимые процессы. Обратные задачи отыскания формы тел существенно отличаются от решаемых обычно с помощью регуляризации по Тихонову задач диагностики магнитных полей и подобных тем, что граничные условия здесь определены там же, где находятся и источники возмущений. Поэтому различен и используемый математический аппарат.

Существуют, однако, две основные трудности решения обратных задач. Первая обусловлена их нелинейностью, в трехмерном случае она усугубляется отсутствием хорошо разработанного аппарата обращения переменных. Вторая связана с самой их формулировкой и заданием исходных, т. е. желаемых для поверхностей тел характеристик полей. Произвольные исходные данные не соответствуют физически реальным решениям, т. е. односвязным замкнутым поверхностям [1], и эта трудность даже неестественна для инженерных приложений, потому что там, как правило, нет нужды точно задавать распределенные характеристики полей на всей поверхности тел, а следует только ограничивать диапазон изменения их значений и фиксировать или минимизировать некоторые интегралы от распределений (силы, например). Поэтому классическая постановка обратных задач (например, в [1–5]) приводит к необходимости многократной корректировки их исходных данных или экстраполяции их нефизических решений. Таким образом, для приложений адекватнее вариационные задачи с совокупностью условий-ограничений, включающих как равенства, так и неравенства, т. е. даже не задачи собственно вариационного исчисления, а задачи нелинейного программирования, но при этом минимизируемые функционалы должны формироваться с использованием производных потенциалов, т. е. решений соответствующих дифференциальных

уравнений. Применение в таких случаях универсальных вычислительных процедур (см., например, [6]) приводит, однако, к необходимости выполнять очень большой объем вычислений [7–10].

В настоящей работе описывается реализация именно такого вариационного подхода к решению обратных задач, в рамках которого одновременно происходит уточнение исходных данных и итеративное приближение к решению задачи. В некотором смысле такая регуляризация исходных данных имеет сходство с методом квази-обращений Лионса. При этом в отличие, например, от метода [11] корректировка исходных данных предусматривает заранее заданные ограничения на них. Метод ее решения иллюстрируется на задачах гидромеханики типа описанной в [12], но он легко переносится и на разнообразные задачи электродинамики [13,14]. Акцентируется роль параметрического описания искомой поверхности для практически эффективного решения трехмерных задач. Формулируется способ сведения обратных задач для пограничных слоев к обратным задачам теории потенциала с помощью интегральных соотношений типа уравнения Кармана.

### Метод квазилинеаризации для поиска трехмерных свободных границ

В стационарном потенциальном поле  $\Phi(x, y, \Theta)$ , где  $\{x, y, \Theta\}$  — цилиндрическая система координат, ищем поверхность  $S$ , описываемую формулой

$$Y = f(x, \Theta, R_1, \dots, R_m), \quad (1)$$

на которой при заранее неизвестном наборе параметров  $\{R_1, \dots, R_m\}$  помимо условия на производную потенциала  $\Phi$  вдоль внешней нормали  $N$  к поверхности  $S$

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial N} \right|_S = 0 \quad (2)$$

для уравнения Лапласа

$$\Delta \Phi = 0 \quad (3)$$

выполняются условия-ограничения на распределение коэффициента

$$C_p = 1 - |\text{grad}\Phi|^2, \quad \gamma(x, \Theta) < C_p(x, \Theta) < \beta(x, \Theta), \quad (4)$$

а также ограничения на сами ординаты или интегралы от них

$$a(x, \Theta) < f(x, \Theta, R_1, \dots, R_m) < b(x, \Theta), \quad (5)$$

$$\int_0^L \int_0^{2\pi} F_s(x, y, \Theta) dx dy d\Theta < C_s; \quad s = 1, \dots, J. \quad (6)$$

Функции  $a, b, F_s$  и параметры  $C_1, \dots, C_s$  обычно в инженерной практике изменять нельзя: нарушение, например, какого-либо из ограничений (5) грозит невозможности разместить внутри тела оборудование, имеющее фиксированные размеры. Функции же  $\beta, \gamma$  могут заметно варьироваться — лишь бы они не выходили за допустимые границы. При этом подразумевается, что входящие в (4), (6) производные  $\Phi$  являются решением (3) с условиями (2) и

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \{\Phi + x + y \cos \Theta \sin \alpha\} \rightarrow \text{const} \quad (7)$$

для  $\alpha = \text{const}$  при любом наборе  $\{R_1, \dots, R_m\}$ , хотя всей совокупности условий (4)–(6) любой набор не удовлетворяет. Итак, при классической постановке обратных задач вместо (4) фигурировало бы равенство, а выполнение условий (5), (6) проверялось бы после отыскания некой  $f$ , точно удовлетворяющей упомянутому равенству. Здесь вместо этого рассматривается задача, формально записываемая как

$$\{\min E | G_s(R_1, \dots, R_m) \leq 0; \quad s = 1, \dots, M\}. \quad (8)$$

Здесь в совокупности ограничений  $G_s \leq 0$  включены все ограничения (4), (6);  $E$  — некоторый минимизируемый функционал. Пусть, например,  $C_p^*$  — исходные данные классической обратной задачи. Тогда, приняв в качестве функционала

$$E = \max |C_p^* - C_p|, \quad (9)$$

можно минимизировать эту величину, чтобы приблизиться к желаемой эпюре  $C_p^*$ , не нарушая физически необходимых ограничений (5), (6).

Задача (8) нелинейна, поскольку удовлетворяющая ей граница потенциального поля заранее неизвестна, т.е. является свободной. Поэтому (8) будет решаться итерациями. Однако универсальные методы решения задач нелинейного программирования [5] требовали бы не менее  $m + 1$  раза решать прямую задачу (2), (3), (7) на каждой итерации уточнения формы  $S$ . Здесь вслед за [12] будет применен более экономичный специфический метод [15] решения задачи (8), существенно использующий то обстоятельство, что  $\Phi$  удовлетворяет (3), и требующий только одного решения прямой задачи в одной итерации.

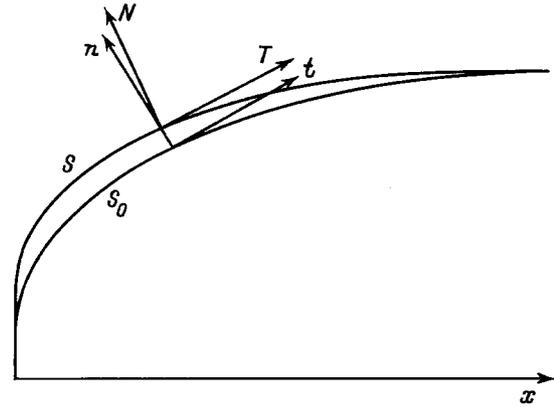


Рис. 1. Схема сопоставления искомой и известной поверхности.

Пусть конкретно  $\Phi$  — потенциал простого слоя. Чтобы оценить изменение  $\Phi$  при вариациях поверхности  $S$ , следует составить уравнение для расстояния  $h$  между  $S$  и ее исходной формой  $S_0$ , как это показано на схеме, представленной на рис. 1. Откладывая  $h$  вдоль нормали  $n$ , на новой поверхности  $S$  имеем

$$\frac{\partial \Phi}{\partial N} = \frac{\partial \Phi}{\partial n} \cos(N, n) + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \cos(N, t). \quad (10)$$

Здесь  $n$  — нормаль к  $S_0$ ,  $t$  — орт, параллельный  $\text{grad}\Phi$  на  $S_0$ . Поскольку в скалярном произведении

$$\nabla \Phi \cdot \nabla \Phi = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial N}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial T}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial B}\right)^2$$

на новой поверхности, где  $B = N \times T$ ,  $T$  параллельно  $\text{grad}\Phi$  на  $S$ , первое слагаемое — нуль в силу (2), а третье обращалось в нуль на  $S_0$  по определению  $T$ , то для вычисления нового значения  $C_p$  достаточно найти

$$\frac{\partial \Phi}{\partial T} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} \cos(T, t) + \frac{\partial \Phi}{\partial n} \cos(T, n).$$

Из геометрических соображений очевидно, что  $\cos(N - n, t) = -dh/\partial t$  и в линейном приближении из (10), (11) следует

$$\frac{\partial \Phi}{\partial N} \Big|_S = \frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_S - \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_S \frac{\partial h}{\partial t}, \quad (12)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial T} \Big|_S = \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_S - \frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_S \frac{\partial h}{\partial t}. \quad (13)$$

Для правых частей (12), (13) используем разложения

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_S = \frac{\partial \Phi_0}{\partial n} \Big|_{S_0} + \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{S_0} + h \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial n^2} \Big|_{S_0}, \quad (14)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_S = \frac{\partial \Phi_0}{\partial t} \Big|_{S_0} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{S_0} + h \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial n \partial t} \Big|_{S_0}, \quad (15)$$

где  $\Phi_0$  — потенциал обтекания  $S_0$ ;  $\varphi(q)$  — возмущение потенциала  $\Phi_0$ , имеющее плотность  $q$  на  $S$ .

Подставляя (14), (15), (2) в (12), обозначив  $|\nabla\Phi_0|$  через  $U_0$  и учитывая, что  $\Delta\Phi_0 = 0$ , получаем квазиленаризованное условие (2) на деформируемой поверхности в виде

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = h \frac{\partial^2}{\partial b_1^2} - \frac{\partial(U_0 h)}{\partial t}, \quad b_1 = n \times t. \quad (16)$$

Здесь вторая производная  $\Phi_0$  по  $b_1$  может быть вычислена по распределению  $U_0$  на  $S_0$  с помощью известных формул, содержащих коэффициент Ляма. При квазиленаризации  $C_p$  следует, как видно из (15), оценить  $\partial^2\Phi_0/(\partial n \partial t)$ . Для этого  $S_0$  аппроксимируется вблизи контрольной точки поверхностью второго порядка и рассматривается параллельное  $t$  сечение этой поверхности с кривизной  $k$ . Затем смешанная производная вычисляется через отношение разности  $\partial\Phi_0/\partial n$  в близлежащих точках к расстоянию между ними. В итоге подстановки (2), (11)–(15) в выражение для  $C_p$  на  $S$  получаем значение обозначенного через  $D_p$  возмущения  $C_p$  в виде

$$D_p = C_p - 1 - U_0^2 = 2U_0 \frac{\partial\varphi}{\partial t} - 2kU_0^2 h. \quad (17)$$

Потенциал  $\varphi$  представляет собой линейную функцию  $q$

$$\varphi(x, y, \Theta, q) = \frac{1}{4\pi} \iint_{(S_0)} \frac{q}{\rho} dS, \quad (18)$$

где  $\rho$  — значения расстояния между точкой поля и известной поверхностью  $S_0$  с известной кривизной  $k$ , а величина  $U_0$  вычислена с использованием интегрального уравнения

$$-\frac{Q}{2} + \frac{1}{4\pi} \iint_{(S_0)} Q \frac{\partial}{\partial N} \frac{1}{\rho} ds = N_x + \sin \alpha N_y \cos \Theta \quad (19)$$

относительно  $Q$  и формул Кулона. Очевидно, что (17), (16) дают линейную взаимосвязь  $D_p$ ,  $h$  и  $q$ , причем с точки зрения вычислителя очень удобно то, что производные  $\varphi$  и  $\Phi_0$  содержат интегралы, отличающиеся между собой только плотностью потенциала. Здесь  $N_x$ ,  $N_y$  — компоненты  $n$  на  $S_0$ .

Итак, (16), (17) можно переписать как матричные соотношения между совокупностью значений  $h$ ,  $q$  и  $D_p$  на контрольных точках  $S_0$ , собрав эти совокупности в векторы  $\mathbf{h}$ ,  $\mathbf{q}$ ,  $\mathbf{D}_p$  соответственно. Переписывая с очевидными обозначениями эти соотношения в виде

$$A\mathbf{q} = B\mathbf{h}, \quad \mathbf{D}_p = C\mathbf{q} + F\mathbf{h} \quad (20)$$

и исключая из (20)  $\mathbf{q}$ , имеют

$$\mathbf{D}_p = (CA^{-1}B + F)\mathbf{h}. \quad (21)$$

Далее следует связать  $\mathbf{h}$  с параметрами  $R_1, \dots, R_m$  задачи (8). Так как, с одной стороны,

$$Y(x, \Theta, R_1, \dots, R_m) - Y^0(x, \Theta, R_1^0, \dots, R_m^0) \cong \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial R_j} r_j, \quad (22)$$

где  $r_j = R_j - R_j^0$ , а с другой стороны, эта разность равна  $hN_y$ , то из (21), (22) следует новая линейная взаимосвязь

$$\mathbf{D}_p = (CA^{-1}B + F)Hr, \quad (23)$$

хотя в частном случае  $R_j$  могут совпадать со значениями ординат  $S$ .

Итак, (23) дает возможность линеаризовать  $E$  и ограничения (4), (6) по  $r_1, \dots, r_m$ , а (22) — проделать то же с ограничениями (5). Таким образом, каждая итерация метода решения нелинейной программы (8) сведена здесь к однократным вычислениям  $U_0$  с помощью линейного интегрального уравнения (19) и коррекции значений  $r_1, \dots, r_m$  посредством решения задачи линейного программирования.

Изложенный в данном разделе метод не зависит от физического смысла потенциала  $\Phi$  и слабо изменится даже при замене  $C_p$  на нормальную производную  $\Phi$  (как это требуется, например, в электростатических задачах [13]). В дальнейшем же все конкретные примеры будут касаться гидромеханики, хотя электродинамические аналогии подобрать им нетрудно. Итак, далее здесь  $\Phi$  — потенциал скорости несжимаемой жидкости, а  $C_p$  — безразмерное давление в ней.

## Примеры решения трехмерных обратных задач теории потенциала

Наиболее простым примером решения трехмерной обратной задачи является построение трехмерного тела с длинной цилиндрической частью, затупленной носовой частью и изобарической частью между ними, на которой  $C_p = \text{const}$ . Наличие неизобарических зон на оконечностях тела неизбежно в стационарном течении [16], если  $C_p < 0$ , и изобарическая зона занимает заметную часть  $S$ . Для такой задачи отсутствуют ограничения (5), (6), в ограничении (4)  $\gamma(x, \Theta) = \gamma_0 = \text{const}$ ,  $\beta = 0$ , а в качестве параметров  $R_1, \dots, R_m$  можно было бы принять ординаты точек изобарической поверхности. Один из результатов такого решения приведен на рис. 2. Там в качестве носовой части тела задана поверхность

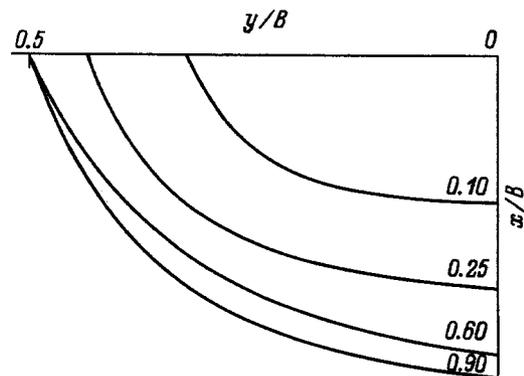


Рис. 2. Сечения тела с изобарической поверхностью плоскостями  $x = \text{const}$ .

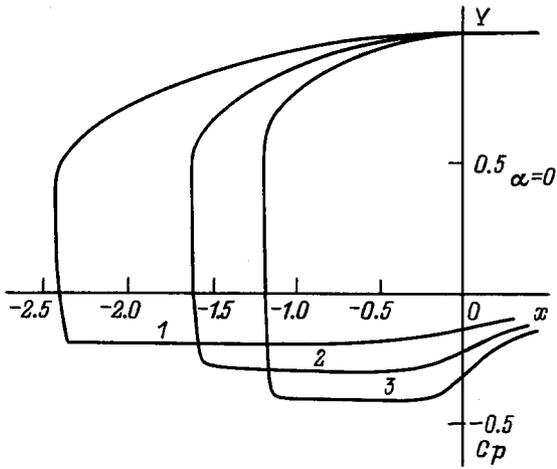


Рис. 3. Распределение давления по телам вращения с оконечностью типа (24) в осесимметричном потоке. 1 —  $\sigma = 0.20$ ; 2 — 0.30, 3 — 0.41.

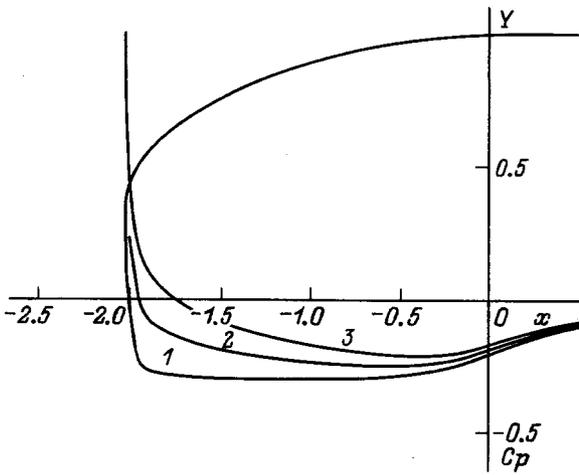


Рис. 4. Распределение давления по искомой поверхности в неосесимметричном потоке при  $\alpha = 4^\circ$ .  $\Theta$ : 1 — 0, 2 —  $\pi/2$ , 3 —  $\pi$ .

эллипсоида  $x^2 + y^2(0.25 + 0.75 \sin^2 \Theta) = 1$  и угол атаки  $\alpha = 0$ . Сечение тела плоскостью  $x/B = 0.1$ , где  $B$  — его ширина, лежит полностью на носовой части. Ширина цилиндрической части  $B$  является результатом решения задачи при заданном  $\gamma_0$ , и сечение  $x/B = 0.9$  лежит полностью на ней. Промежуточные сечения расположены на изобарической части. Приведенный результат соответствует точности решения обратной задачи  $E = 0.025$ , хотя точность вычисления  $U_0$  методом [17] была здесь примерно равной 0.005.

Благоприятные гидродинамические свойства такой поверхности состоят, во-первых, в том, что именно изобарическая поверхность обеспечивает [16] минимум величине  $\sigma_i = \max |C_p|$ , характеризующей возникновение на теле такого нежелательного явления, как кавитация (только в идеальной жидкости, однако это вполне приемлемое приближение, и оно тем точнее, чем плавнее

эпюра  $C_p(x, \Theta)$  на  $S$ ). Во-вторых, на изобарической поверхности линии тока, т.е. направления  $\text{grad}\Phi$ , совпадают с геодезическими линиями [16]. Поэтому на такой поверхности в реальной (вязкой) жидкости, в которой на поверхности тела компоненты скорости равны нулю, а не производным  $\Phi$ , центробежные силы не смещают в пристенном пограничном слое частицы жидкости в сторону от этих линий, т.е. там не формируются вторичные течения [18], приводящие к дополнительным потерям и появлению крупных продольных вихрей в трехмерном пограничном слое.

Однако непосредственно использовать эти благоприятные свойства в технических приложениях сложно. Так, предотвращение появления крупных вихрей актуально для корпусов транспортных судов: индуцируемые этими вихрями всплески скорости вредно сказывается на работе гребных винтов, однако цилиндрические части судов должны иметь формы, не похожие на представленные на рис. 2, поскольку для перевозки грузов, размещения оборудования и т.п. прямостенные секции удобнее и, таким образом, технические требования не дадут здесь воспользоваться полученным точным решением задачи математической физики, поэтому придется

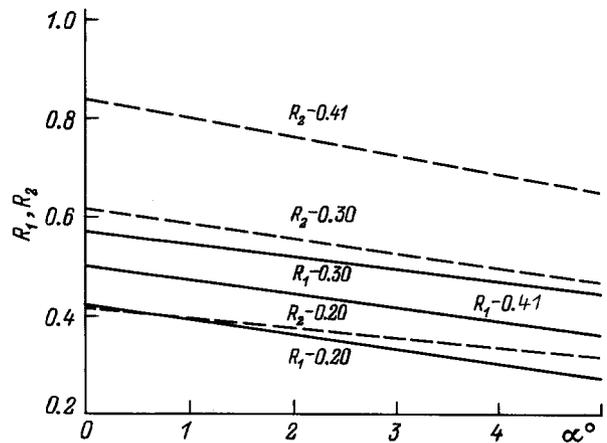


Рис. 5. Зависимости  $R_1$  и  $R_2$  от  $\alpha$  и  $\sigma$  для тел вращения (24) с минимальным  $\sigma$ . Цифры у кривых — значения  $\sigma$ .

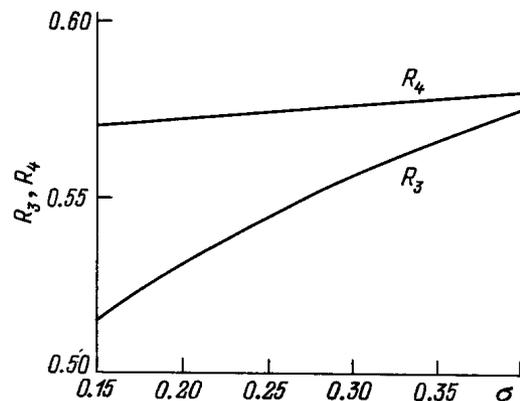


Рис. 6. Зависимости  $R_3$  и  $R_4$  от  $\sigma$  для тел вращения (24) с минимальными  $\sigma$ .

модифицировать ее включением ограничений типа (5), а также допустить увеличение  $E$ . Быстроходные тела, для которых стремятся задержать развитие кавитации, при  $\alpha \neq 0$  формируют неосесимметричную изобарическую поверхность, поэтому сохранение из технических соображений осесимметричной цилиндрической части неизбежно влечет за собой также увеличение  $E$  и включение ограничений типа (5). Таким образом, здесь снова из-за технической необходимости придется искать лишь некоторую аппроксимацию физически наилучшего решения.

Подобные аппроксимации и с вычислительной, и с инженерной точек зрения удобнее искать в виде аналитических формул. Так, для тел вращения с минимизируемым  $\sigma$ , носовые части которых начинались с диска радиуса  $R_1$  из-за необходимости размещать оборудование, при  $x = -R_2$  они продолжались округлением вида

$$Y(x, \Theta) = R_1 + (1 - R_1) \left[ 1 - (-xR_2)^{\frac{1}{R_3}} \right]^{R_4} \quad (24)$$

при  $-R_2 < x < 0$ , переходя при  $x = 0$  в цилиндрическую часть. Конкретный вид хвостовой части существенного влияния на  $C_p$  спереди тела не влияет [15]. Рис. 3 дает представление о том, какая степень приближения к точному решению может быть обеспечена аппроксимацией типа (24) для осесимметричного случая  $\alpha = 0$ . Естественно, что в трехмерном случае, представленном на рис. 4, погрешности подобной аппроксимации на некоторых меридианах существенно больше. На рис. 5 и 6 приведены зависимости коэффициентов  $R_1, \dots, R_4$  от  $\alpha$  и  $\sigma$ , причем интересно, что  $R_3$  и  $R_4$  практически от  $\alpha$  не зависят и слабее влияют на решение задачи, что отмечалось еще в [12].

### Сведение трехмерных обратных задач для пограничных слоев к обратным задачам теории потенциала

Вышеуказанная задача об изобарической оконечности судна дает некоторый пример попытки влиять на скорости в пограничном слое посредством управления потенциальным потоком вокруг тела, т.е. давлением на нем. Однако имеет смысл непосредственно поставить условия-ограничения на распределения скорости внутри трехмерного пограничного слоя, причем вопрос о выборе параметров в этом случае уместно поставить перед формулировкой таких условий. Дело в том, что нужно контролировать поток не только на поверхности  $S$ , но и в некотором слое по нормали к ней, из-за чего растут размерности как физической задачи расчета течения, так и задачи (8).

Существует давно известный способ избежать резкого увеличения объема вычислений в таких задачах — это метод интегральных соотношений Кармана [18]. Его основная идея в какой-то мере аналогична идее метода разделения переменных для линейных уравнений математической физики. Там общее решение представляется

в виде суммы функций, каждая из которых является решением уравнения, но не удовлетворяет граничным условиям, а линейная комбинация этих функций точно удовлетворяет этим условиям только в конечном числе контрольных точек, как это обеспечивается решением (19), например. В соотношениях Кармана для нелинейных систем уравнений компоненты скорости над  $S$  представляются произведениями вида

$$u(x, y, \Theta) = U_0(x, \Theta) f_1(\eta N, P_1, P_2, \dots), \quad (25)$$

где  $U_0$  — известная функция, а координата  $\eta$  меняется от 0 на  $S$  до величины  $\delta(x, \Theta)$ , называемой толщиной пограничного слоя;  $f_1(0) = 0$ ,  $f_1(\delta) = 1$ , т.е.  $f_1$  подобрана так, чтобы автоматически удовлетворить граничным условиям в слое.

Суперпозиция представлений типа (25) не может удовлетворить нелинейным уравнениям точно, но такие представления подставляются в дифференциальные уравнения, которые после интегрирования по  $\eta$  от 0 до  $\delta$  превращаются в дифференциальные уравнения меньшей размерности относительно функций  $P_1(x, \Theta)$ ,  $P_2(x, \Theta) \dots$ . Так, дифференциальные уравнения трехмерного пограничного слоя [18] превращаются в связанной с линиями тока системе координат  $\{\tau, \zeta\}$  в

$$\frac{\partial \delta_{11}}{\partial \tau} + \frac{\partial \delta_{12}}{\partial \zeta} = \frac{C_f \cos \beta}{2} - (\delta_{11} + \delta_1) \frac{\delta \ln U_0}{\partial \tau} - \delta_{22} \frac{\partial \ln H}{\partial \tau} - \delta_{11} L,$$

$$\frac{\partial \delta_{21}}{\partial \tau} + \frac{\partial \delta_{22}}{\partial \zeta} = (\delta_1 + \delta_{11} + \delta_{22}) \frac{\partial \ln U_0}{\partial \zeta} - \frac{C_f \sin \beta}{2} - 2\delta_{21} L,$$

$$\frac{\partial \delta_1}{\partial \tau} + \frac{\partial \delta_2}{\partial \zeta} = (\delta - \delta_1) L + \frac{V}{U_0}. \quad (26)$$

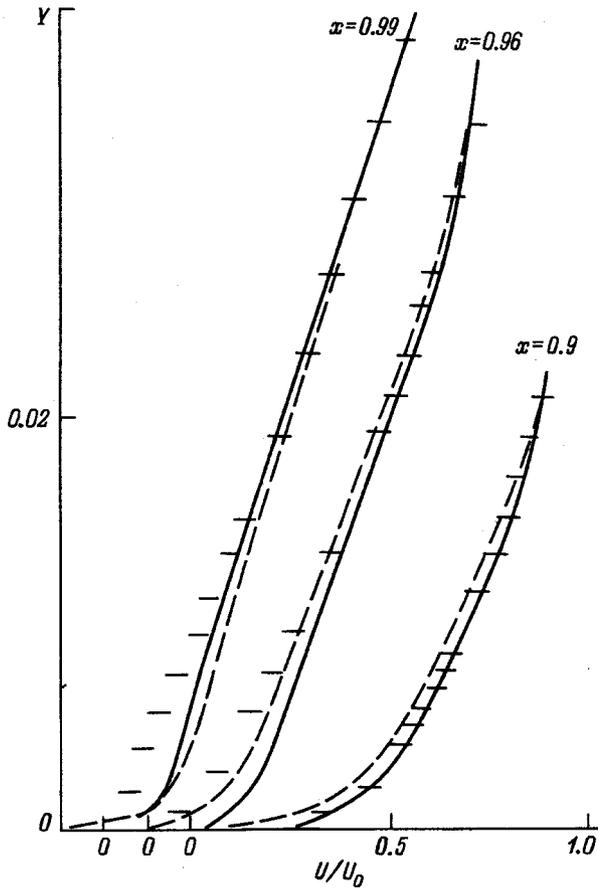
Здесь поверхностная координата  $\zeta$  изменяется вдоль эквипотенциала на  $S_0$ ,  $H$  — соответствующий коэффициент Ляме;  $\beta$  — угол между потенциальными и поверхностными линиями тока на  $S_0$ ; значения  $V$  связаны с толщинами слоя теми же эмпирическими формулами, что и в осесимметричном случае [19];  $L = (\partial \ln H U_0) / (\partial \tau)$ ,  $Y_w$  — ордината тела;

$$\delta_1 = \int_{Y_w}^{Y_w + \delta} \left( 1 - \frac{u}{U_0} \right) d\eta, \quad \delta_2 = - \int_{Y_w}^{Y_w + \delta} \frac{w}{U_0} d\eta,$$

$$\delta_{11} = \int_{Y_w}^{Y_w + \delta} \frac{u}{U_0} \left( 1 - \frac{u}{U_0} \right) d\eta, \quad \delta_{12} = \int_{Y_w}^{Y_w + \delta} \frac{w}{U_0} \left( 1 - \frac{u}{U_0} \right) d\eta,$$

$$\delta_{21} = \int_{Y_w}^{Y_w + \delta} \frac{uw}{U_0^2} d\eta, \quad \delta_{22} = \int_{Y_w}^{Y_w + \delta} \frac{w^2}{U_0^2} d\eta, \quad (27)$$

$u$  и  $w$  — направленные вдоль линии тока и эквипотенциала компоненты скорости в пограничном слое на  $S_0$ .



**Рис. 7.** Сопоставление измеренных и рассчитанных скоростей вблизи тела. Сплошная кривая — сеточный метод, штриховая — интегральный метод, поперечные черточки — измерения [21]; размер этих отрезков соответствует разбросу измерений;  $x$  и  $y$  приведены в долях длины тела.

Величины (27) выражаются через три параметра пограничного слоя, которые и являются искомыми функциями в системе (26); такими параметрами при введении обобщенного профиля Коулса для компонент скорости  $u(\eta)$  и  $w(\eta)$  становятся  $\delta$ ,  $\beta$  и  $v^* = (1/2C_f)^{0.5}$ , где  $C_f$  — трение на  $S$ . Этот профиль выражается формулами

$$\frac{u}{U_0} = f_2 \cos \beta + \chi_1 f_3, \quad \frac{w}{U_0} = f_2 \sin \beta + \chi_2 f_3,$$

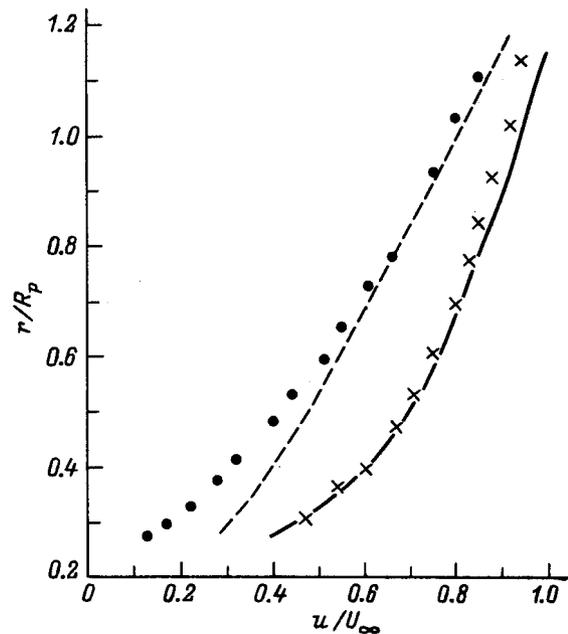
где  $f_2 = v^*(2.5 \ln |\eta \delta v^* / \nu| + 5.2)$ ,  $f_3 = 3(\eta/\delta)^2 - 2(\eta/\delta)^3$ , а функции  $\chi_1$  и  $\chi_2$  в каждой точке  $S$  подбираются так, чтобы  $u(\delta) = U_0$ ,  $w(\delta) = 0$ . Не выписывая весьма громоздких коэффициентов получившейся системы

$$a_{1i} \frac{\partial v^*}{\partial \tau} + a_{2i} \frac{\partial \beta}{\partial \tau} + a_{3i} \frac{\partial \delta}{\partial \tau} + a_{4i} \frac{\partial v^*}{\partial \zeta} + a_{5i} \frac{\partial \beta}{\partial \zeta} + a_{6i} \frac{\partial \delta}{\partial \zeta} = b_i + g_i; \quad i = 1, 2, 3, \quad (28)$$

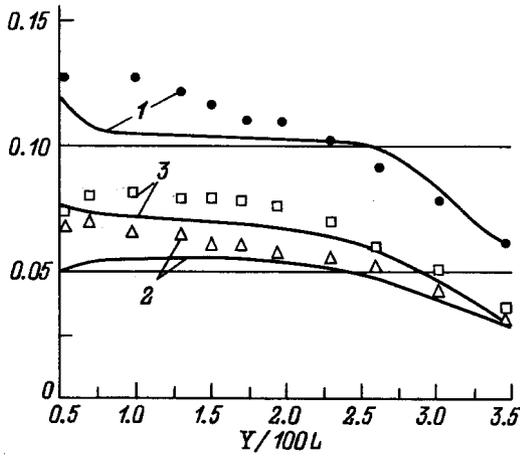
следует указать, что  $a_{1i}, \dots, a_{6i}, b_i$  зависят только от  $\{\delta, \beta, v^*\}$ , а  $g_i$  — от  $U_0$  и их производных.

На безотрывно обтекаемой поверхности  $S_0$  (28) — система уравнений гиперболического типа, и она может быть проинтегрирована, например, методом характеристик. Возможности интегральных методов при вычислении распределенных по  $S$  параметров трехмерных течений недавно были продемонстрированы в [20]. Заимствованный из [19] рис. 7 для так называемого тела Пателя [21] показывает, что по крайней мере в течениях, близких к осесимметричным, интегральные методы в совокупности с профилями скорости типа Коулсовских [18–20] обеспечивают почти такое же соответствие экспериментам, как и сеточные методы. Поскольку вид  $f_1$  влияет на соответствие расчета экспериментам и подбирается эмпирически, то для обратных задач, в которых форма обтекаемых тел меняется, очень важна степень универсальности  $f_1$ . Здесь на рис. 8 приводятся результаты из [22], показывающие, что интегральные методы позволяют учесть наличие гребного винта. Более того, рис. 9 показывает, что профили Коулса можно использовать даже для расчета пульсаций скорости, если подставить в формулы из [23] модуль скорости вместо  $u(x, y, \Theta)$ , т.е. переосмыслить традиционные положения теории тонкого пограничного слоя применительно к относительно толстому слою вблизи кормы тела [21].

Сопоставления типа представленного на рис. 7 наводят на мысль, что вместо задания распределения скорости внутри слоя в некоторых контрольных сечениях можно задать там распределение  $\{\delta, \beta, v^*\}$  или же, например, каких-либо из толщин (27), т.е. условия типа (6). Разумеется, распределения параметров пограничного слоя на теле-прототипе могут не удовлетворить этим условиям, и встанет вопрос, какими вариациями распределения



**Рис. 8.** Учет влияния гребного винта на пограничный слой интегральным методом. Сплошная кривая — расчет скорости в слое с работающим винтом; штриховая — расчет без винта;  $\bullet$  — измерения с винтом и без него.



**Рис. 9.** Расчет пульсаций скорости вблизи тела с использованием интегрального метода [19] для полуэмпирических формул [23]. 1 —  $\langle U'U' \rangle$ , 2 —  $\langle V'V' \rangle$ , 3 —  $\langle W'W' \rangle$ ;  $\Delta$ ,  $\bullet$ ,  $\times$  — экспериментальные точки из [21].

давления (и соответствующими деформациями  $S$ ) можно таким условиям удовлетворить.

Для отыскания этих деформаций предположим, что малым изменениям  $C_p$  соответствуют также малые относительные изменения  $\delta$ ,  $\beta$ ,  $v^*$ , и проследим изменения коэффициентов (28). Там

$$a_{11}(v^* + v_B^*, \delta + \delta_B, \beta + \beta_B) \frac{\partial v^* + v_B^*}{\partial \tau} \cong a_{11}^* \frac{\partial v^*}{\partial \tau} + a_{11}^* \frac{\partial v_B^*}{\partial \tau} + \frac{\partial v^*}{\partial \tau} \left[ \frac{\partial a_{11}^*}{\partial \delta} \delta_B + \frac{\partial a_{11}^*}{\partial \beta} \beta_B + \frac{\partial a_{11}^*}{\partial v^*} v_B^* \right], \quad (29)$$

где  $a_{11}^* = a_{11}(v^*, \delta, \beta)$ ;  $v_B^*$ ,  $\delta_B$ ,  $\beta_B$ ,  $U_B$  — возмущения  $v^*$ ,  $\delta$ ,  $\beta$ ,  $v_0$ ; аналогичные (29) линеаризации справедливы для других членов системы (28), которой удовлетворяют невозмущенные значения  $\delta$ ,  $\beta$ ,  $v^*$ .

Тогда из (29) следует

$$a_{1i} \frac{\partial v_B^*}{\partial \tau} + a_{2i} \frac{\partial \beta_B}{\partial \tau} + a_{3i} \frac{\partial \delta_B}{\partial \tau} + a_{4i} \frac{\partial v_B^*}{\partial \zeta} + a_{5i} \frac{\partial \beta_B}{\partial \zeta} + a_{6i} \frac{\partial \delta_B}{\partial \zeta} = F_i(v^*, \beta, \delta, v_B^*, \delta_B, \beta_B) + g_i(v^*, \beta, \delta, v_B^*, \beta_B, \delta_B, U_0, U_B, h); \quad i = 1, 2, 3. \quad (30)$$

К системе (30) задаются нулевые начальные условия на некоторой кривой  $l_i$ , лежащей гораздо выше контрольного сечения по потоку, и непременно на той части  $S$ , которую не будут деформировать. В функции  $F_i$  включены как  $b_i$  из (28), так и слагаемые, аналогичные члену в квадратных скобках в правой части (29). Система (30) линейна относительно своих неизвестных  $\delta_B$ ,  $\beta_B$ ,  $v_B^*$  и при этом имеет всюду те же значения коэффициентов при производных и те же направления характеристик, что и нелинейная система (28) для невозмущенных параметров. Собрав совокупность значений  $\{v_B^*, \beta_B, \delta_B\}$

в контрольных точках на  $S_0$  в вектор  $\Pi$ , (30) также можно привести к матричному виду

$$A\Pi = F\Pi + G_1 h + G_2 U_B. \quad (31)$$

Здесь  $A$  — матрица системы (28),  $G_1$  и  $G_2$  образованы из  $g_i$ . Очевидно, что  $U_B = -D_p/2U_0$ , и  $U_B$  в (31) может быть исключено с помощью (23). В итоге будет получена линейная взаимосвязь  $\Pi$  и  $h$ , и поскольку возмущения величины (27) также могут быть выражены линейной комбинацией  $v_B^*$ ,  $\beta_B^*$ ,  $\delta_B^*$ , то обратная задача для вязкого слоя может быть также сведена к совокупности линейных задач для возмущений потенциала скорости.

## Заключение

Представленное описание постановки и весьма эффективного в демонстрируемых случаях метода решения трехмерных обратных задач не может, однако, служить всегда безотказным рецептом, поскольку практически все итеративные методы решения нелинейных задач в той или иной степени зависят от выбора начального приближения. В тех случаях, когда рассматриваются всюду потенциальные поля, едва ли не главной неприятностью может быть задание такого исходного приближения, для которого где-либо на  $S_0$  нарушается необходимое для линеаризации условие

$$|C_p - 1 + U_0^2| \ll 1.$$

Тогда следует левую часть (16) домножить на меньшую единицу положительную величину (коэффициент релаксации), т. е. выбирать невязку в условиях меньшими долями. Кроме того, при параметризациях типа (24) из-за разного влияния разных переменных на минимизируемый функционал возможны "овраги" [6] на его поверхностях уровня. Тогда, как и в [12], совокупность параметров приходится разделять и оптимизацию по ним проводить попеременно. Здесь это так делалось для  $\{R_1, R_2\}$  и  $\{R_3, R_4\}$ .

Сложнее дело обстоит для обратных задач в вязкой жидкости, когда он начального приближения может зависеть принципиальная возможность использовать те или иные уравнения. Прежде всего это касается расчетов тел с вязким отрывом на них. Интегральные методы нередко недостаточно реагируют на его наличие, позволяя формально использовать безотрывно профили скорости там, где физически они уже не реализуются. Сеточные методы, резко усовершенствованные предложением [24] аппроксимировать разные слагаемые уравнений на разных сетках, требуют также достоверной информации хотя бы о направлении потока.

К упрощению этой сложной ситуации может, однако, служить то, что в инженерной практике обратные задачи — это всегда задачи относительно небольшого изменения какого-либо прототипа, и если прототип обтекается без отрыва, то ситуация облегчается. Так,

в задаче минимизации коэффициента вязкостного сопротивления, пользуясь для его вычисления аналогом формулы Сквайра–Юнга [18,25]

$$C_v = \int_0^{2\pi} y \delta_{1i} U^\mu(x, \Theta) d\Theta,$$

постоянную  $\mu$  можно подобрать из сопоставления расчета и эксперимента для прототипа  $S_0$  и, ограничиваясь одним приближением квазилинейной задачи,  $\mu$  не менять. Таким образом, часто без базового эксперимента в практически интересных случаях трудно обойтись, и решение обратных задач трудно сделать занятием, вполне независимым от инженерного ремесла.

## Список литературы

- [1] Аксентьев Л.А., Ильинский Н.Б., Нужин М.Т., Салимов Р.Б., Тумашев Г.Г. // Мат. анализ (Итоги науки). 1980. Т. 18. С. 69–126.
- [2] Daripa P.K., Sirovich L. // J. Comp. Phys. 1986. Vol. 63. P. 311–328.
- [3] Eppler R., Shen T. // J. Ship Research. 1979. Vol. 23. N 3. P. 180–192.
- [4] Liebeck R.H. // J. Aircraft. 1978. Vol. 15. N 9. P. 541–561.
- [5] Авхадиев Р.Г., Журбенко Л.Н. // Труды семинара по краевым задачам. Казань: КГУ, 1979. С. 3–14.
- [6] Зангвилл У.И. Нелинейное программирование. М.: Сов. радио, 1973.
- [7] Selvesen N. von Kerczech C. J. Ship Research. 1978. Vol. 22. N 4. P. 203–211.
- [8] Пашин В.М., Мизин И.О. // Гидромеханика транспортных судов. Л.: ЦНИИ им. акад. А.Н. Крылова, 1971. С. 27–44.
- [9] Проблемы прикладной гидромеханики судна. Л.: Судостроение, 1975.
- [10] Бабищев П.Н. Численные методы решения задач со свободной границей. М.: 1987.
- [11] Елизаров А.М., Ильинский Н.Б. // Изв. вузов. Математика. 1984. № 10. С. 50–59.
- [12] Амромин Э.Л., Бушковский В.А. // Изв. РАН. Механика жидкости и газов. 1994. № 3. С. 92–99.
- [13] Амромин Э.Л., Капорская Г.И., Новгородцев А.Б., Шнеерсон Г.А. // Электричество. 1989. № 1. С. 40–46.
- [14] Шнеерсон Г.А. // ЖТФ. 1988. Т. 58. Вып. 11. С. 2136–2146.
- [15] Амромин Э.Л., Бушковский В.А. // ЖВММФ. 1983. № 5. С. 1234–1238.
- [16] Биркгоф Г., Сарантонелло Э. Каверны, струи, следы. М.: Мир, 1962.
- [17] Hess J.L., Smith A.M.O. Rep. E840622. Long Beach: Douglas A. Div., 1962.
- [18] Федяевский К.К., Гиневский А.С., Колесников А.И. Расчет турбулентного пограничного слоя несжимаемой жидкости. Л.: Судостроение, 1973.
- [19] Амромин Э.Л., Дробленков В.В. // Гидромеханика. Киев: Наукова думка, 1987. Вып. 57. С. 35–41.
- [20] Амромин Э.Л., Степанов Г.Ю., Тимошин Ю.С. // ЖТФ. 1995. Вып. 10. С. 13–31.
- [21] Patel V.C., Nakayama A., Dattian R. // J. Fluid Mech. 1974. Vol. 63. P. 345–367.
- [22] Амромин Э.Л., Дробленков В.В., Мишкевич В.Г. // Гидродинамика больших скоростей. Красноярск, 1985. С. 74–86.
- [23] Амфилохий В.Б., Дробленков В.В. // ИФЖ. 1990. Т. 58. № 4. С. 545–550.
- [24] Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М.: Энергоиздат, 1984.
- [25] Гогош Л.В., Степанов Г.Ю. Турбулентные отрывные течения. М.: Наука, 1979.