

05:07;12

Стохастическое возбуждение стимулированного спинового эха

© С.А. Баруздин

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет,
197376 Санкт-Петербург, Россия

(Поступило в Редакцию 13 февраля 1996 г.)

Рассматривается возбуждение стимулированного спинового эха двумя когерентными импульсами белого гауссова шума и дельтаобразным радиоимпульсом. На основе решения уравнений Блоха получено среднее значение комплексной огибающей эха. Исследовано поведение среднего значения огибающей стимулированного эха для лоренцевой формы неоднородно уширенной линии поглощения. Показано, что в линейном для шумовых импульсов режиме возбуждения огибающая соответствует преобразованию Фурье от функции формы линии. При выходе за рамки линейного режима возбуждения могут возникать нелинейные искажения среднего значения огибающей стимулированного эха.

Введение

При исследовании неоднородно уширенных ядерных спиновых систем для возбуждения стимулированного эха формулируют три дельтаобразных радиоимпульса магнитного поля с частотой ω_0 , совпадающей с центром линии поглощения. При этом амплитуда эха пропорциональна $\sin^3(\gamma B_\delta \tau_\delta)$, где γ — гиромагнитное отношение, B_δ и τ_δ — амплитуда и длительность импульса. Для возбуждения максимальной амплитуды эха необходимо выполнить условие

$$\alpha = \gamma B_\delta \tau_\delta = \frac{\pi}{2}. \quad (1)$$

С ростом ширины линии поглощения для одновременного возбуждения всей линии приходится уменьшать длительность импульса τ_δ , что сопровождается резким ростом мощности возбуждения для выполнения условия (1). Если же мощность генератора недостаточна для выполнения этого условия, то амплитуда стимулированного эха будет меньше максимальной в $(\sin \alpha)^{-3}$ раз.

Для развязки ширины спектра и длительности импульса возбуждения с целью снижения его мощности было предложено использовать белый шум в качестве источника возбуждения [1,2]. Этот метод получил название стохастического резонанса.

В [3] были исследованы корреляционные свойства сигнала свободной индукции, возбуждаемого в неоднородно уширенной спиновой системе белым гауссовым шумом. Было показано, что среднее значение комплексной огибающей этого отклика спиновой системы, являющееся простейшей статистической характеристикой, равно нулю и не несет никакой информации об исследуемой системе.

В настоящей работе исследуется режим возбуждения стимулированного спинового эха финитными выборками шума и дельтаобразным радиоимпульсом. На рис. 1 представлена последовательность огибающих импульсов возбуждения и стимулированного эха. Первый импульс возбуждения представляет собой выборку белого гауссова шума длительностью τ с комплексной амплитудой $\tilde{B}(t)$, второй — дельтаобразный радиоимпульс, третий — задержанный на время t_3 первый шумовой импульс.

Такой режим возбуждения применяется в устройствах обработки сигналов на основе эффектов спинового и фотонного эха [4,5]. При этом вместо шумовых сигналов используются сложные детерминированные сигналы. Если они одинаковы, то стимулированное эхо совпадает по форме с корреляционной функцией сложного сигнала. Следует заметить, что для формирования эха требуется нелинейность системы по отношению к возбуждающему ее полю. В то же время для формирования неискаженной корреляционной функции исследуемого сигнала режим возбуждения по первому и третьему импульсам должен быть линейным для неискаженного запоминания спектра импульса. Это не противоречит общему требованию нелинейности системы и достигается малым уровнем возбуждения для этих сигналов. Кроме того, ширина спектра исследуемого сигнала не должна превосходить ширины неоднородно уширенной линии поглощения, а длительность сигнала τ должна быть гораздо короче времени релаксации.

Следует также отметить, что использование шумовых и сложных детерминированных сигналов позволяет наряду с мощностью возбуждения уменьшать также и переходное затухание спиновых устройств обработки сигналов [6].

В отличие [4,5] параметры шумовых сигналов в настоящей работе могут выходить за рамки линейного приближения. Конечной целью работы является определение среднего значения комплексной огибающей стимулированного эха.

Стимулированное эхо

Уравнения Блоха в системе координат, вращающейся с частотой ω_0 , имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{dm_+}{dt} &= \left(\frac{dm_-}{dt} \right)^* = pm_+ - i\tilde{R}(t)m_z, \\ \frac{dm_z}{dt} &= -\frac{i}{2}R^*(t)m_+ + \frac{i}{2}\tilde{R}(t)m_- - \frac{m_z - M_0}{T_1}, \end{aligned} \quad (2)$$

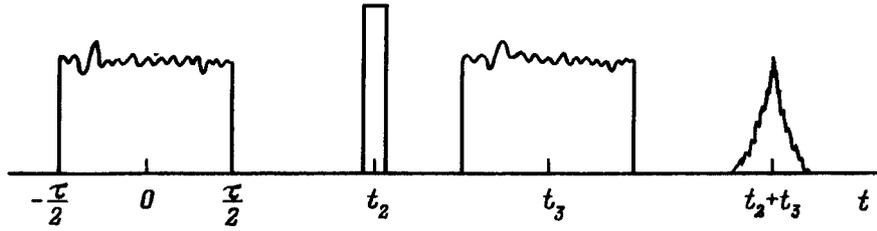


Рис. 1. Диаграмма сигналов возбуждения и стимулированного эха.

где $m_+ = (m_-)^*$ — комплексные поперечные компоненты вектора намагниченности, m_z — его продольная компонента; $\tilde{R}(t) = \gamma \tilde{B}(t)$ — комплексная огибающая импульса возбуждения; M_0 — равновесное значение вектора намагниченности; T_2 и T_1 — времена поперечной и продольной релаксации соответственно; $p = i\Omega - T_2^{-1}$; $\Omega = \omega - \omega_0$ — расстройка частоты ω относительно центральной частоты линии поглощения ω_0 .

Будем полагать, что длительность шумового импульса $\tau \ll T_1$. Тогда можно пренебречь влиянием продольной релаксации и записать формальное решение системы (2) в матричном виде

$$M(t, \Omega) = A(t, t_0, \Omega)M(t_0, \Omega), \quad (3)$$

где $M(t, \Omega)$ — вектор с компонентами $m_+(t, \Omega)$, $m_-(t, \Omega)$, $m_z(t, \Omega)$; $M(t_0, \Omega)$ — вектор начальных условий; $A(t, t_0, \Omega)$ — переходная матрица, соответствующая интервалам возбуждения.

На свободных от импульсов возбуждения интервалах, когда $\tilde{R}(t) = 0$, решение уравнений (2) для $t_3 - t_2 \ll T_1$ может быть представлено в виде

$$M(t, \Omega) = B(t, t_0, \Omega)M(t_0, \Omega), \quad (4)$$

где переходная матрица B может быть записана в явном виде

$$B(t, t_0, \Omega) = \begin{pmatrix} \exp[p(t - t_0)] & 0 & 0 \\ 0 & \exp[p^*(t - t_0)] & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Задав начальные условия $M(-\tau/2)$ в виде $m_+ = m_- = 0$, $m_z = M_0$, можно определить состояние вектора $M(t, \Omega)$ для $t > t_3 + \tau/2$, последовательно используя формальное решение (3) для интервалов возбуждения и явное решение (4), (5) для свободных интервалов. В отклике спиновой системы, формируемом поперечной компонентой $m_+(t, \Omega)$ вектора намагниченности и состоящем из 9 слагаемых, можно выделить стимулированное эхо [7]. Его комплексная огибающая имеет вид

$$\tilde{m}_s(t) = k(t)M_0 \int_{-\infty}^{\infty} S_s(\Omega) \times \exp \left[i\Omega \left(t - t_2 - t_3 + \frac{\tau_1 + \tau_2 - \tau_3}{2} \right) \right] d\Omega,$$

$$S_s(\Omega) = g(\Omega)a_{13}^{(3)}(\Omega)a_{32}^{(2)}(\Omega)a_{23}^{(1)}(\Omega),$$

$$k(t) = \exp \left[-\frac{1}{T_2} \left(t + t_2 - t_3 - \frac{\tau_1 + \tau_2 + \tau_3}{2} \right) \right], \quad (6)$$

где $a_{ij}^{(n)}$ — элемент переходной матрицы для n -го импульса возбуждения, $g(\Omega)$ — низкочастотный эквивалент неоднородно уширенной линии поглощения.

Для дельтаобразного импульса длительностью $\tau_2 = \tau_\delta \rightarrow 0$

$$a_{32}^{(2)}(\Omega) = \frac{i}{2} \sin \alpha \exp(i\varphi_\delta), \quad (7)$$

где φ_δ — начальная фаза второго импульса.

Для идентичных сигналов матричные элементы $a_{13}^{(3)}(\Omega) = [a_{23}^{(1)}(\Omega)]^*$. Процедура определения этих элементов методом последовательных приближений [8] приведена в Приложении. С точностью до третьего приближения результат имеет вид

$$a_{13}^{(3)}(\Omega) = -i \exp \left(\frac{p\tau}{2} \right) [a_1(\Omega) + a_3(\Omega) + \dots], \quad (8)$$

$$a_1(\Omega) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \tilde{R}(\xi_1) \exp(-p\xi_1) d\xi_1,$$

$$a_3(\Omega) = -\frac{1}{2} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} d\xi_1 \int_{-\tau/2}^{\xi_1} d\xi_2 \int_{-\tau/2}^{\xi_2} d\xi_3 \tilde{R}(\xi_1) \exp(-p\xi_1) \times \{R^*(\xi_2)\tilde{R}(\xi_3) \exp[p(\xi_2 - \xi_3)] + k.c.\}.$$

После подстановки матричных элементов (7) и (8) в (6) с учетом того, что $\tau_1 = \tau_3 = \tau$, комплексная огибающая стимулированного эха может быть представлена в виде

$$\tilde{m}_s(t) = \tilde{k}(t) \int_{-\infty}^{\infty} g(\Omega) |a_1(\Omega) + a_3(\Omega) + \dots|^2 \times \exp[i\Omega(t - t_2 - t_3)] d\Omega, \quad (9)$$

где $\tilde{k}(t) = \frac{i}{2} M_0 \sin \alpha \exp(i\varphi_\delta) \exp \left[-\frac{1}{T_2} (t + t_2 - t_3) \right]$.

Усреднение комплексной огибающей стимулированного эха

Последний этап решения задачи состоит в усреднении по реализациям выражения (9) и определении $\langle \tilde{m}_s(t) \rangle$ при условии, что $\tilde{R}(t)$ является комплексным белым гауссовым шумом с корреляционной функцией

$$\mathcal{K}_{\tilde{R}}(\xi_1, \xi_2) = N_0 \delta(\xi_1 - \xi_2) \quad (10)$$

и математическим ожиданием $\langle \tilde{R}(t) \rangle = 0$.

В экспериментах этот шум может быть заменен полосовым белым шумом с конечной, в отличие от (10), дисперсией. Энергетический спектр полосового белого шума должен перекрывать полосу частот, занимаемую неоднородно уширенной линией исследуемой системы.

В соответствии с (8) и (9) стимулированное эхо является результатом нелинейного преобразования гауссова случайного процесса в спиновой системе. При определении $\langle \tilde{m}_s(t) \rangle$ ограничимся моментами случайного процесса вплоть до четвертого порядка включительно. Для этого требуется определить

$$\begin{aligned} \langle |a_1(\Omega) + a_3(\Omega) + \dots|^2 \rangle &\approx \langle a_1(\Omega)a_1^*(\Omega) \rangle \\ &+ \langle a_3(\Omega)a_1^*(\Omega) \rangle + \langle a_1(\Omega)a_3^*(\Omega) \rangle. \end{aligned} \quad (11)$$

Усреднение первого слагаемого в (11) при условии (10) приводит к результату

$$\langle a_1(\Omega)a_1^*(\Omega) \rangle = N_0 T_2 \operatorname{sh} \left(\frac{\tau}{T_2} \right). \quad (12)$$

При усреднении следующего слагаемого в (11) возникают четвертые моменты комплексного гауссова процесса, которые факторизуются, т.е. могут быть представлены через произведения вторых моментов [9]. Тогда получим

$$\begin{aligned} \langle a_3(\Omega)a_1^*(\Omega) \rangle &= -\frac{N_0^2}{2} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} d\eta_1 \int_{-\tau/2}^{\tau/2} d\xi_1 \int_{-\tau/2}^{\xi_1} d\xi_2 \int_{-\tau/2}^{\xi_2} d\xi_3 \\ &\times \exp(-p\xi_1 - p^*\eta_1) \left\{ (f_1 + f_2) \exp[p(\xi_2 - \xi_3)] \right. \\ &\left. + (f_2 + f_3) \exp[p^*(\xi_2 - \xi_3)] \right\}, \\ f_1 &= \delta(\xi_1 - \xi_2)\delta(\xi_3 - \eta_1), \quad f_2 = \delta(\xi_1 - \eta_1)\delta(\xi_3 - \xi_2), \\ f_3 &= \delta(\xi_1 - \xi_3)\delta(\xi_2 - \eta_1). \end{aligned} \quad (13)$$

Дальнейшие преобразования приводят к выражению

$$\begin{aligned} \langle a_3(\Omega)a_1^*(\Omega) \rangle &= -\frac{N_0^2 T_2 \tau}{4} \operatorname{sh} \left(\frac{\tau}{T_2} \right) \\ &- \frac{N_0^2}{4} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \left(\xi_1 + \frac{\tau}{2} \right) \exp(-i\Omega 2\xi_1) d\xi_1. \end{aligned} \quad (14)$$

Поскольку $\langle a_1(\Omega)a_3^*(\Omega) \rangle = [\langle a_1^*(\Omega)a_3(\Omega) \rangle]^*$, то подстановка результатов (11), (12) и (14) в (9) даст среднее значение комплексной огибающей стимулированного эха

$$\begin{aligned} \langle \tilde{m}_s(t) \rangle &\approx 2\pi \tilde{k}(t) N_0 T_2 \operatorname{sh} \left(\frac{\tau}{T_2} \right) \left(1 - \frac{N_0 \tau}{2} \right) G(t - T_0) \\ &- \pi \tilde{k}(t) \frac{N_0^2 \tau}{4} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} [G(t - T_0 + 2\xi_1) + G(t - T_0 - 2\xi_1)] d\xi_1, \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$G(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\Omega) \exp(i\Omega t) d\Omega, \quad T_0 = t_2 + t_3.$$

Таким образом, в отличие от нулевого среднего значения комплексной огибающей сигнала свободной индукции при стохастическом возбуждении [3] в рассматриваемом случае $\langle \tilde{m}_s(t) \rangle \neq 0$ и может нести информацию о свойствах спиновой системы.

Лоренцева форма линии поглощения

Рассмотрим в качестве примера лоренцеву форму неоднородно уширенной линии поглощения

$$g(\Omega) = \frac{\pi}{a} \frac{1}{\Omega^2 + a^2}, \quad (16)$$

которой соответствует

$$G(t) = \exp(-a|t|), \quad (17)$$

где a — параметр, определяющий ширину линии.

Подстановка (17) в (15) и введение смещенного начала отсчета времени $t' = t - T_0$ дает

$$\langle \tilde{m}_s(t') \rangle \approx i\pi M_0 \sin \alpha \exp(i\varphi_\delta) F(t'), \quad (18)$$

$$F(t') = \exp \left(-\frac{2t_2}{T_2} - \frac{t'}{T_2} \right) [F_1(t') - F_2(t')],$$

$$F_1(t') = N_0 T_2 \left(1 - \frac{N_0 \tau}{2} \right) \operatorname{sh} \left(\frac{\tau}{T_2} \right) \exp(-a|t'|),$$

$$F_2(t') = \begin{cases} \frac{N_0^2 \tau}{4a} [1 - \exp(-a\tau) \operatorname{ch}(at')], & |t'| \leq \tau \\ \frac{N_0^2 \tau}{4a} \exp(-a|t'|) \operatorname{sh}(a\tau), & |t'| > \tau. \end{cases} \quad (19)$$

Форма комплексной огибающей $\langle \tilde{m}_s(t') \rangle$ определяется безразмерной функцией $F(t')$ (19), которая зависит как от параметров шумовых импульсов, так и от параметров спиновой системы. Эта функция является нормированным значением среднего значения комплексной огибающей эха $\langle \tilde{m}_s(t') \rangle$. Максимальное значение $\langle \tilde{m}_s(t') \rangle$ формируется в момент времени $t' = 0$.

На рис. 2 представлена зависимость нормированной средней амплитуды эха $F(0)$ от спектральной плотности

мощности белого шума N_0 . Прежде всего следует заметить, что в силу ограничения по числу членов в методе последовательных приближений выражение (18) удовлетворительно описывает поведение $\langle \tilde{m}_s(t') \rangle$ до области максимума, которой соответствует соотношение параметров шумового импульса $N_0\tau \approx 1$. С ростом длительности импульса τ максимум функции $F(0)$ смещается в область меньших значений N_0 (кривые 2 и 3). При этом максимальное значение эха может возрасти, если длительность импульса τ соизмерима с T_2 . Это происходит вследствие того, что уменьшается интервал времени между концом первого импульса и дельтаобразным сигналом. Если же $\tau \ll T_2$, то величина максимума функции $F(0)$ не зависит от τ .

Зависимость $F(0)$ от ширины линии a весьма слабая (кривые 1 и 2). Дальнейший рост параметра a по сравнению с параметром, соответствующим кривой 2, практически не влияет на положение этой кривой.

Форма $\langle \tilde{m}_s(t') \rangle$ зависит от степени линейности режима (рис. 2). В линейном режиме при $N_0\tau \ll 1$ справедливо соотношение $F_2(t') \ll F_1(t')$ и форма отклика определяется функцией $G(t')$, которая, согласно (18) и (19), подвергается мультипликативным релаксационным искажениям за счет функции $\exp(-t'/T_2)$. В нелинейном режиме, когда $N_0\tau \approx 1$, форма отклика при некоторых условиях может отличаться от (17). Такая ситуация представлена на рис. 3. Функция $F(t')$ в рассматриваемом случае может стать отрицательной при некоторых t' , что свидетельствует о скачке фазы высокочастотного заполнения эха на 180° . Этот эффект обусловлен слагаемым, содержащим интеграл в (15), и носит нелинейный характер. При этом $F_2(t') > F_1(t')$. Сгибающаяся $|F(t')|$ принимает в этом случае "лепестковый" характер. С ростом ширины линии a функция $F_2(t')$ падает и описанные искажения исчезают.

Потенциально достижимая амплитуда стимулированного эха при $N_0 = 1/\tau$ и $\tau \ll T_2$ вместо $\sin^3 \alpha$ при возбуждении дельтаобразными радиоимпульсами будет, согласно (18) и (19), пропорциональна $0.5 \sin \alpha$.

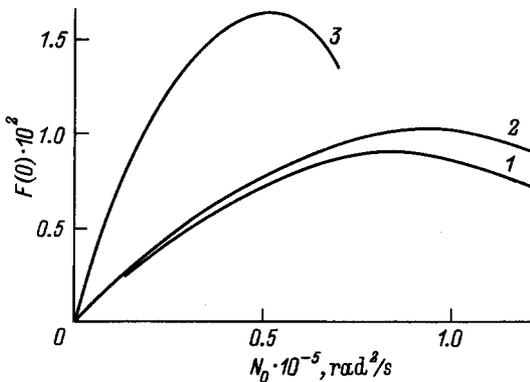


Рис. 2. Зависимость среднего значения нормированной амплитуды стимулированного эха от спектральной плотности мощности шума N_0 . $T_2 = 10 \mu\text{s}$, $2t_2 = 40 \mu\text{s}$; a (rad/s) и τ (μs) соответственно: 1 — $2 \cdot 10^5$ и 10, 2 — 10^6 и 10, 3 — 10^6 и 20.

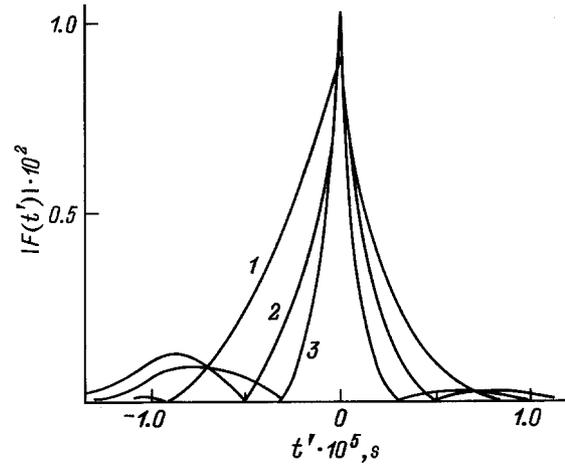


Рис. 3. Среднее значение нормированной огибающей стимулированного эха в нелинейном режиме. $N_0 = 10^5 \text{ rad}^2/\text{s}$, $\tau = 10 \mu\text{s}$, $T_2 = 10 \mu\text{s}$, $2t_2 = 40 \mu\text{s}$; a (rad/s): 1 — $2.5 \cdot 10^5$, 2 — $5 \cdot 10^5$, 3 — 10^6 .

В заключение отметим, что полученные результаты могут быть распространены на случай аналогичного режима возбуждения стимулированного фотонного эха в двухуровневых системах, поскольку для их описания можно использовать оптические аналоги уравнений Блоха [5,10,11].

Работа выполнена при поддержке Госкомитета РФ по высшему образованию (грант по исследованиям в области электроники и радиотехники).

Приложение

Для определения элементов матрицы A методом последовательных приближений целесообразно преобразовать систему уравнений Блоха (2), введя новый вектор $M'(t, \Omega)$ с компонентами $m'_+(t, \Omega)$, $m'_-(t, \Omega)$, $m'_z(t, \Omega)$. Новый вектор $M'(t, \Omega)$ связан со старым соотношением

$$M(t, \Omega) = B(t, t_0, \Omega)M'(t, \Omega). \quad (\text{П1})$$

Для введенного вектора система (2) при условии $\tau \ll T_1$ имеет вид

$$\frac{dM'}{dt} = Q(t)M', \quad (\text{П2})$$

где

$$Q(t) =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -i\tilde{R}(t) \\ 0 & 0 & iR^*(t) \\ -\frac{i}{2}R^*(t) & \frac{i}{2}\tilde{R}(t) & 0 \end{pmatrix} \times \exp[-p(t - t_0)]$$

Решение (П2) можно получить, используя метод последовательных приближений [7]

$$M'(t, \Omega) = A'(t, t_0, \Omega)M'(t_0, \Omega), \quad (\text{П3})$$

$$\begin{aligned} A'(t, t_0, \Omega) = & I + \int_{-\tau/2}^{\tau/2} d\xi_1 Q(\xi_1) + \int_{-\tau/2}^{\tau/2} d\xi_1 \int_{-\tau/2}^{\xi_1} d\xi_2 Q(\xi_1)Q(\xi_2) \\ & + \int_{-\tau/2}^{\tau/2} d\xi_1 \int_{-\tau/2}^{\xi_1} d\xi_2 \int_{-\tau/2}^{\xi_2} d\xi_3 Q(\xi_1)Q(\xi_2)Q(\xi_3) + \dots, \end{aligned} \quad (\text{П4})$$

где I — единичная матрица.

В результате вычисления (П4) для $t_0 = -\tau/2$ и $t = \tau/2$ и возврата к исходным переменным с помощью (П1) необходимые в дальнейшем матричные элементы с точностью до третьего приближения равны

$$\begin{aligned} a_{13}(\Omega) = [a_{23}(\Omega)]^* = & -i \exp\left(\frac{p\tau}{2}\right) [a_1(\Omega) + a_3(\Omega) + \dots], \\ a_1(\Omega) = & \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \tilde{R}(\xi_1) \exp(-p\xi_1) d\xi_1, \\ a_3(\Omega) = & -\frac{1}{2} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} d\xi_1 \int_{-\tau/2}^{\xi_1} d\xi_2 \int_{-\tau/2}^{\xi_2} d\xi_3 \tilde{R}(\xi_1) \exp(-p\xi_1) \\ & \times \left\{ R^*(\xi_2) \tilde{R}(\xi_3) \exp[p(\xi_2 - \xi_3)] + c.c. \right\}. \end{aligned} \quad (\text{П5})$$

Список литературы

- [1] Ernst R.R. // J. Magn. Res. 1970. Vol. 3. P. 10–27.
- [2] Эрнст Р., Боденхаузен Дж., Вокаун А. ЯМР в одном и двух измерениях. М.: Мир, 1990. 709 с.
- [3] Баруздин С.А. // ФГТ. 1995. Т. 37. Вып. 11. С. 3497–3504.
- [4] Устинов В.Б., Баруздин С.А. // Ядерный магнитный резонанс. Л.: ЛГУ, 1988. Вып. 7. С. 130–135.
- [5] Устинов В.Б., Ковалевский М.М., Баруздин С.А. // Изв. АН СССР. Сер. физ. 1986. Т. 50. № 8. С. 1495–1499.
- [6] Голощапов С.И., Паугурт А.П. // ЖТФ. 1985. Т. 55. Вып. 12. С. 2361–2367.
- [7] Баруздин С.А., Устинов В.Б. // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 1983. Т. 26. № 11. С. 12–17.
- [8] Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1988. 548 с.
- [9] Ван Трис Г. Теория обнаружения, оценок и модуляции. М.: Сов. радио, 1977. Т. 3. 664 с.
- [10] Манькин Э.А., Самарцев В.В. Оптическая эхоспектроскопия. М.: Наука, 1984. 272 с.
- [11] Васильев А.А., Ковалевский М.М., Рассветалов Л.А. // Изв. вузов. Физика, 1988. Т. 31. № 1. С. 99–101.