01;09

Самосогласованные колебания заряда в волноводе

© Г.Г. Карапетян

(Поступило в Редакцию 11 октября 1995 г.)

Рассмотрены малые колебания заряда в прямоугольном волноводе. Исследованы образующееся при этом электромагнитное поле и воздействие его на заряд. Найдено, что на определенной частоте имеет место самосогласованный режим колебаний, когда заряд колеблется под воздействием собственного поля при отсутствии внешних сил. Такая совокупность заряда и самосогласованного переменного поля имеет свойства квазичастицы, условно названной электромагнетоном.

Рассмотрим заряд q в форме прямоугольной пластинки, совершающий гармонические колебания в прямоугольном волноводе. Колебания происходят вокруг неподвижной оси x, проходящей через середины противоположных сторон пластинки и волновода перпендикулярно к оси волновода z (рис. 1). Амплитуда колебаний мала по сравнению с длиной пластинки b, поэтому можно учитывать лишь y компоненту скорости. Таким образом, плотность заряда и тока можно записать в виде

$$\rho = \frac{q}{ab}\sigma\left(\frac{x}{a}\right)\sigma\left(\frac{z}{b}\right)\delta\left(y - \frac{2zl}{b}\cos\Omega t\right),$$

$$j_x = j_z = 0, \quad j_y = \rho v_y, \quad v_y = -\frac{2zl\Omega}{b}\sin\Omega t. \qquad (1)$$

Здесь $\sigma(u) = 0$ при $|u| > 1/2$, $\sigma(u) = 1$ при $|u| < 1/2$; $\delta(u)$ — δ-функция Дирака; a, b — ширина и длина пластинки; l, Ω — амплитуда и частота колебаний; x, y, z — декартовые координаты. Положим частоту колебаний меньше наименьшей критической частоты волновода. Тогда, как известно [1], излучение отсутствует, а поля при удалении от заряда по оси волновода экспоненциально убывают. Воспользовавшись разложением по собственным функциям поперечного сечения волновода, после соответствующих преобразований получим следующее выражение для скалярного потенциала в области $|z| < b/2$:

$$\Phi = \frac{2}{\sqrt{AB}}\sum_{m,n=1}^{\infty}\Phi_{mn}(z,t)$$

$$\times\sin\frac{\pi m}{A}\left(x + \frac{A}{2}\right)\sin\frac{\pi n}{B}\left(y + \frac{B}{2}\right), \qquad (2)$$

где

$$\Phi_{mn}(z,t) = \frac{4\pi q}{\sqrt{AB}}s_m\sin\frac{\pi m}{2}\left[\frac{f(z)}{\varkappa}\sin\frac{\pi n}{2}\right.$$

$$\left. + g_n\frac{p(z)}{k}\cos\frac{\pi n}{2}\cos\Omega t\right],$$

$$f(z) = \frac{2}{\varkappa b}\left[1 - \exp(-\varkappa b/2)\,\mathrm{ch}\,\varkappa z\right],$$

$$\varkappa = \pi\sqrt{\left(\frac{m}{A}\right)^2 + \left(\frac{n}{B}\right)^2},$$

$$p(z) = \frac{4}{k^2b^2}\left[kz - \left(\frac{kb}{2} + 1\right)\exp(-kb/2)\,\mathrm{sh}\,kz\right],$$

$$k = \sqrt{\varkappa^2 - \frac{\Omega^2}{c^2}}, \quad s_m = \frac{\sin(\pi ma/2A)}{(\pi ma/2A)}, \quad g_n = \frac{\pi nl}{b}, \qquad (3)$$

A, B — поперечные размеры волновода, c — скорость света.

При выводе (3) мы предположили, что $g_n \ll 1$, и пренебрегли членами $\sim g_n^2, g_n^3, \ldots$ (см. ниже).

Аналогично вычислим y компоненту векторного потенциала, далее компоненты электромагнитного поля и, наконец, момент силы $\mathbf{K}$, действующий на пластинку. Здесь $\mathbf{K}$ имеет лишь x-компоненту и обусловлен воздействием y- и z-компонент электрического поля. Силы, действующие на пластинку со стороны магнитного поля, нерелятивистски малы и ими можно пренебречь. После соответствующих вычислений найдем

$$K_x = \frac{16\pi q^2 l}{AB}\cos\Omega t\sum_{m,n=1}^{\infty}s_m^2\varepsilon_m\left[\varepsilon_n\left[P(\xi) - \left(\frac{\pi nb}{B}\right)^2 Q(\xi)\right]\right.$$

$$\left. + \varepsilon_{n+1}\left(\frac{\pi^2n^2}{B^2} - \frac{\Omega^2}{c^2}\right)b^2R(\zeta)\right], \qquad (4)$$

где

$$P(\xi) = \frac{\xi\,\mathrm{ch}\,\xi - \mathrm{sh}\,\xi}{\xi^3}\exp(-\xi),$$

$$Q(\xi) = \frac{\xi^3 - 3\left[(\xi^2 + 2)\,\mathrm{sh}\,\xi - 2\xi\,\mathrm{ch}\,\xi\right]}{12\xi^5}\exp(-\xi),$$

$$R(\zeta) = \frac{\zeta^3 - 3(\zeta + 1)(\zeta\,\mathrm{ch}\,\zeta - \mathrm{sh}\,\zeta)}{12\zeta^5}\exp(-\zeta),$$

$$\xi = \frac{\varkappa b}{2}, \quad \zeta = \frac{kb}{2}, \quad \varepsilon_m = \sin^2\left(\frac{\pi m}{2}\right). \qquad (5)$$

Предположим, что размеры пластинки много меньше поперечных размеров волновода. Тогда сумма ряда в (4)

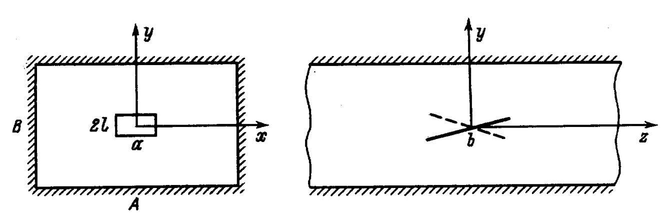

Рис. 1.

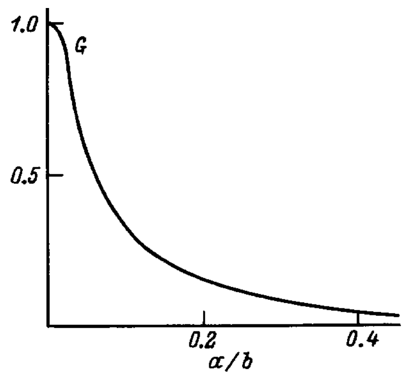

Рис. 2.

определяется большим числом членов, причем относительная разность между соседними членами мала. Таким образом, сумму (4) можно заменить определенным интегралом, вводя переменные интегрирования $\alpha = \pi mb/2A$, $\beta = \pi nb/2B$. Пренебрегая также величиной $\Omega b/c$ (так как $\Omega/c < 1/A$) получим

$$K_x = \frac{q^2 l}{b^2} G\left(\frac{a}{b}\right) \cos\Omega t, \tag{6}$$

где

$$G\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{8}{\pi} \iint\limits_0^\infty \frac{\sin^2(\alpha a/b)}{(\alpha a/b)^2} \frac{\theta(\alpha,\beta)}{r^5} d\alpha d\beta,$$

$$\theta(\alpha,\beta) = r^3 - r^2 - 2\beta^2 r + 3\beta^2 - \left[r^3 + (1-2\beta^2)r^2 - 4\beta^2 r - 3\beta^2\right]\exp(-2r),$$

$$r = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}. \tag{7}$$

Здесь двойной интеграл сходится при любых a/b, причем интегрирование по β существенно лишь в интервале $\beta \sim (0,1)$. Таким образом, использованные выше требования $g_n \ll 1$ приводят к условию $l \ll b$, при котором, следовательно, и получены (6) и (7).

Функция $G(a/b)$ положительна (рис. 2), поэтому можно потребовать, чтобы колебания пластинки совершались под действием момента сил K_x. Подставляя (6) в уравнение движения пластинки как твердого тела [2], получим соотношение, из которого определяется частота самосогласованных колебаний

$$\Omega_0 = \sqrt{\frac{6q^2}{Mb^3} G\left(\frac{a}{b}\right)}, \tag{8}$$

где M — масса пластинки.

Таким образом, на частоте Ω_0 в волноводе устанавливается стационарное состояние самосогласованных колебаний: заряд колеблется под воздействием им же созданного поля. Такая стационарная совокупность колеблющегося заряда и переменного поля, существующих совместно в отсутствие внешних сил, имеет характер квазичастицы, условно называемой ниже электромагнетоном (ЭМ). Энергия ЭМ постоянна и складывается из кинетической энергии колебаний заряда и энергии переменного поля. Из (1) и (6) следует, что сила, действующая на каждый участок заряда, и скорость данного участка сдвинуты по фазе колебаний на $\pi/2$. Поэтому если за четверть периода поле совершает над зарядом положительную (отрицательную) работу, то за следующую четверть периода, наоборот, — отрицательную (положительную) работу. И так периодически происходит передача энергии от поля заряду, и наоборот. Заметим, что полностью стационарные колебания на самом деле невозможны из-за диссипации энергии в стенках волновода. Следует также учесть и существование обертонов поля с частотами $2\Omega_0, 3\Omega_0, \ldots$, которые могут попадать в полосу прозрачности волновода и излучаться, унося часть энергии ЭМ. Однако очевидно, что влияние этих причин можно сделать малым, поэтому обоснованно считать ЭМ квазистационарным объектом.

Численный пример: для заряда $q \sim 10^{-7}$ с размером $a \ll b \sim 0.1$ мм и массой $M \sim 10^{-6}$ г частота самосогласованных колебаний $\Omega_0 \sim 10^8$ Гц.

Исследовались также возвратно-поступательные колебания, когда все точки заряда движутся синфазно. Самосогласованный режим колебаний при этом оказывается невозможным.

В заключение автор выражает благодарность Л.Ш. Григоряну и А.А. Сааряну за ценные обсуждения.

Список литературы

[1] *Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П.* Теория волн. М.: Наука, 1979. 384 с.

[2] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика. М.: Наука, 1965. 204 с.