01;05.4;09

Модуляционная неустойчивость электромагнитных волн в длинных джозефсоновских переходах

© *Ф.Х. Абдуллаев*

Физико-технический институт АН Республики Узбекистан

Поступило в Редакцию 5 августа 1996 г.

Рассматривается модуляционная неустойчивость электромагнитных волн в длинных джозефсоновских переходах в условиях, когда электродинамика перехода нелокальна. Найдены области модуляционной неустойчивости нелинейной плоской электромагнитной волны в переходе.

В последнее время привлекает большое внимание исследование явления модуляционной неустойчивости волн в нелинейных средах [1,2]. В качестве примеров можно привести модуляционную неустойчивость электромагнитных волн в оптических волокнах, описываемую неустойчивостью решений нелинейного уравнения Шредингера [2], в длинных джозефсоновских переходах — для уравнения sine–Gordon [3,4]. Наряду с теоретическим интересом, явление модуляционной неустойчивости имеет ряд практических приложений. В частности, оно используется для генерации цепочек сверхкоротких оптических импульсов с высокой частотой повторения [2], разработки логических устройств [5].

Во многих ситуациях при исследовании модуляционной неустойчивости необходимо рассматривать нелокальные модификации нелинейного уравнения Шредингера и уравнения sine–Gordon [6,7]. В частности, в длинных джозефсоновских переходах, когда длина электромагнитной волны много меньше джозефсоновской длины проникновения λ_J и когда $\lambda_j < \lambda$, где λ — лондоновская глубина проникновения, электродинамика перехода становится нелокальной. Уравнение для разности фаз $\varphi(x,t)$ имеет вид нелокального уравнения sine–Gordon [7]

$$\varphi_{tt} = \frac{\lambda_J^2}{\pi\lambda} \int\limits_{-\infty}^{\infty} K_0(|x-y|)\varphi_{yy} dy - \sin\varphi, \tag{1}$$

где $K_0(x)$ есть функция Макдональда нулевого порядка. Это уравнение неинтегрируемо. Оно эквивалентно уравнению sine–Gordon со всеми высшими четными частными производными по пространственной переменной x.

Цель настоящей работы — исследование модуляционной неустойчивости электромагнитных волн малой амплитуды в длинных джозефсоновских переходах. Рассмотрим эволюцию нелинейных осциллирующих волн малой амплитуды (типа бризера) в переходе. Представим поле φ в виде

$$\varphi = e^{i\Omega t} v^*(x,t) + e^{-i\Omega t} v(x,t). \tag{2}$$

Разлагая $\sin(x)$ в ряд, и удерживая члены вплоть до 3-го порядка по полю включительно, и полагая

$$\Omega^2 = 1, \quad t = t/4, \quad \alpha = \frac{2\lambda_J^2}{\pi\lambda^2},$$

получаем уравнение

$$iu_t + \alpha \int\limits_{-\infty}^{\infty} K_0(|x-y|) u_{yy} dy + |u|^2 u = 0. \tag{3}$$

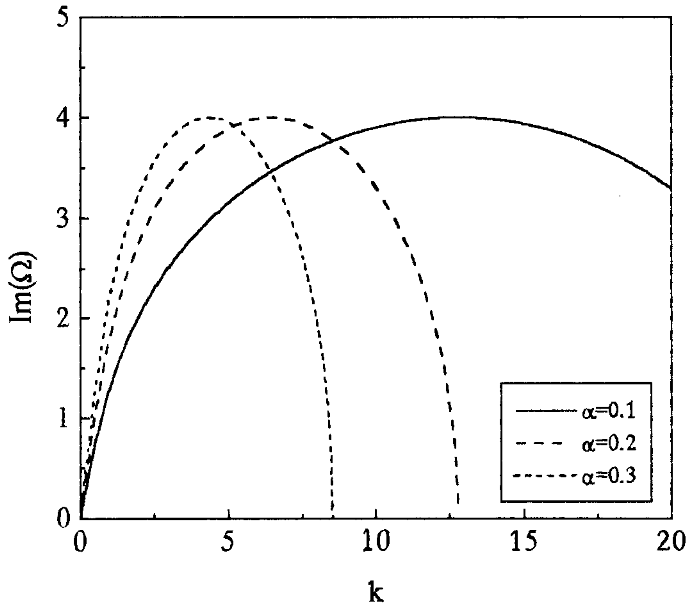
Это нелокальное нелинейное уравнение Шредингера.

Рассмотрим модуляционную неустойчивость решения в виде нелинейной плоской волны $u_0 = A\exp(iA^2 t)$. Будем искать решение в виде

$$u = [A + \psi(x,t)]\exp\{iA^2 t\}. \tag{4}$$

Отсюда имеем уравнение для поправки $\psi(x,t)$:

$$i\psi_t + \alpha \int\limits_{-\infty}^{\infty} K_0(|x-y|)\psi_{yy} dy + A^2(\psi + \psi^*) = 0. \tag{5}$$



Полагая $\psi = v + iW$ из (5), получим систему уравнений:

$$
\begin{aligned}
& v_t + \alpha \int\limits_{-\infty}^{\infty} K_0(|x-y|) w_{yy} dy = 0, \\
& -w_t + \alpha \int\limits_{-\infty}^{\infty} K_0(|x-y|) v_{yy} dy + 2A^2 v = 0.
\end{aligned} \tag{6}
$$

Выполняя в (6) Фурье-преобразование, находим для Фурье-компоненты $\bar{v}(k,t)$

$$\bar{v}_{tt}(k) + \bar{\alpha} K_0(k) k^2 (\alpha K_0(k) k^2 - 2A^2) \bar{v}(k) = 0. \tag{7}$$

В результате получаем следующее дисперсионное соотношение:

$$\Omega^2 = \frac{\alpha \pi k^2}{\sqrt{1+k^2}} \left(\alpha \frac{\pi k^2}{\sqrt{1+k^2}} - 2A^2 \right). \tag{8}$$

Неустойчивость плоской волны имеет место при $\Omega^2 < 0$. Отсюда приходим к условию, что неустойчивы модуляции нелинейной плоской электромагнитной волны с волновым числом k, меньшим критического значения k_c

$$k_c^2 = \frac{2A^4}{\alpha^2\pi^2}\left(1 + \sqrt{1 + \alpha^2\pi^2/A^4}\right). \tag{9}$$

На рисунке приведены области модуляционной неустойчивости при $A = 1$, $\alpha = 0.1$, 0.2, 0.3.

Рассмотрим величину k_c для различных предельных случаев:

а) пусть $A^4/\alpha^2\pi^2 \gg 1$, тогда находим, что $k_c = 2\sqrt{2}A^2/\alpha\pi$;

б) пусть $A^4/\alpha^2\pi^2 \ll 1$, тогда имеем, что $k_c = \sqrt{2}A/\sqrt{\alpha\pi}$.

Максимальный коэффициент усиления $g_m = \mathrm{Im}\Omega_m = A^2$ и достигается при модуляциях с волновым числом $k_m \approx A^2/\alpha\pi$.

Таким образом, мы нашли область модуляционной неустойчивости электромагнитных волн в длинных джозефсоновских переходах ДДП. Модулированная нелинейная плоская волна в процессе развития модуляционной неустойчивости будут эволюционировать в цепочку импульсов (малоамплитудных бризеров). Частота повторения импульсов будет определяться периодом модуляции исходной волны $k < k_c$.

Процесс модуляционной неустойчивости волн большой амплитуды в нелокальном переходе, основанный на нелинейном нелокальном уравнении sine–Gordon требует отдельного рассмотрения.

Список литературы

[1] *Bespalov V.I., Talanov V.I.* // JETP Lett. 1966. V. 3. P. 307.
[2] *Hasegawa A.* // Opt. Lett. 1984. V. 9. P. 288.
[3] *Ахмедиев Н.Н., Елеонский В.М., Кулагин Н.Е.* // Изв. вузов. Радиофизика. 1988. Т. 31. С. 244.
[4] *Ercolani N.M., Forest M.G., McLaughlin D.W.* // Lett. Appl. Math. 1986. V. 23. P. 149.
[5] *Islam M.* // Ultrafast optical devices. Oxford University Press, 1993.
[6] *Alfimov M., Eleonsky V.M., Kulagin N.E.* // Chaos. 1992. V. 2. P. 454.
[7] *Gurevich A.* // Phys. Rev. 1992. V. B46. P. 3187.