01

Бассейны притяжения хаотических аттракторов в связанных системах с удвоением периода

© Б.П. Безручко, Е.П. Селезнев

Институт радиотехники и электроники РАН (Саратовский филиал)

Поступило в Редакцию 17 сентября 1996 г.

В работе исследуются бассейны притяжения хаотических аттракторов, иих эволюция при перестройке аттракторов с изменением управляющих параметров. Численными расчетами показана эволюция границ аттракторов, изменения внутри односвязанных областей и др. Некоторые из закономерностей удалось выделить в физическом эксперименте.

1. Сосуществование в фазовом пространстве двух или более аттракторов со своими бассейнами притяжения (мультистабильность) типично для нелинейных динамических систем. С изменением управляющих параметров аттракторы эволюционируют, претерпевая различные бифуркации. Это сопровождается перестройками бассейнов их притяжения, так что структура бассейнов может оказаться очень сложной и даже фрактальной. Данные явления исследуются в работе экспериментально и численно для хаотических колебаний двух симметрично связанных систем, каждая из которых индивидуально демонстрирует с изменением управляющего параметра переход к хаосу через последовательность бифуркаций удвоений периода [1–3].

Экспериментально исследуются две резистивно связанные RL-диод цепи [4,5], синфазно возбуждаемые гармонической внешней силой. Динамика каждой из них в ограниченной области параметров качественно моделируется квадратичным отображением. Как показано в [3], адекватной моделью рассматриваемой экспериментальной системы являются два квадратичных отображения, связанных диссипативно [2]:

$$\begin{cases} X_{n+1} = \lambda - X_n^2 + k(X_n^2 - Y_n^2), \\ Y_{n+1} = \lambda - Y_n^2 + k(Y_n^2 - X_n^2), \end{cases} \tag{1}$$

где X_n, Y_n — динамические переменные, $n = 0, 1, 2, \dots$ — дискретное время, λ — параметр нелинейности, k — параметр связи. Аналогом параметра связи k в эксперименте служит проводимость резистора связи, а параметра нелинейности λ — амплитуда гармонического воздействия.

2. Множество вариантов хаотических движений в исследуемых системах можно условно разделить на три вида. Два из них — синфазный (или синхронный, колебания подсистем идентичны) и несинфазный формируются в результате каскада удвоений периода. Соответствующие аттракторы состоят из лент (сгущений фазовых траекторий). При увеличении параметра нелинейности от критического значения, при котором происходит переход к хаосу, число лент в аттракторе уменьшается от теоретически бесконечного до 1 за счет их слияния. На рис. 1, *a–c* справа приведены примеры 1, 2 и 4 ленточных аттракторов системы (*1*). Введем для них обозначение вида N_m, где N — число лент, а m — величина временнóго сдвига между X_n и Y_n. При этом синфазным колебаниям соответствует $m = 0$. К третьему классу относятся хаотические колебания, возникающие в результате разрушения кквазипериодических движений [1].

3. С изменением параметров в исследуемых системах имеет место иерархия бифуркационных переходов, отраженная в [3] эволюционными схемами. Будем менять параметры и выделять основные закономерности в структуре бассейнов притяжения хаотических аттракторов. Начнем с рассмотрения модели (*1*). Конфигурация области существования конечных решений на плоскости начальных условий (X_0, Y_0) плавно меняется при увеличении связи от квадрата со стороной $l = (\sqrt{1+4\lambda} - 1)/2$ при $k = 0$ (рис. 1, *a*, слева) до круга при $k = 0.5$. Вся эта область является бассейном притяжения одного хаотического аттрактора или делится между мультистабильными притягивающими множествами как показано на рис. 1.

Свойства симметрии аттракторов и их бассейнов совпадают. Например, аттракторы 4_2 и 4_4 и их бассейны симметричны относительно диагонали $X_0 = Y_0$ (замены X_n на Y_n). Аттракторы и 4_1 и 4_3 и их бассейны асимметричны, но при отображении плоскости (X_0, Y_0) относительно диагонали $X_0 = Y_0$ переходят друг в друга. В окрестности границ бассейнов аттракторов с различной симметрией имеет место бесконечное уменьшение размеров подобных элементов — фрактальносcть. Аналогично периодическим режимам [3,6] при слиянии пар хаотических

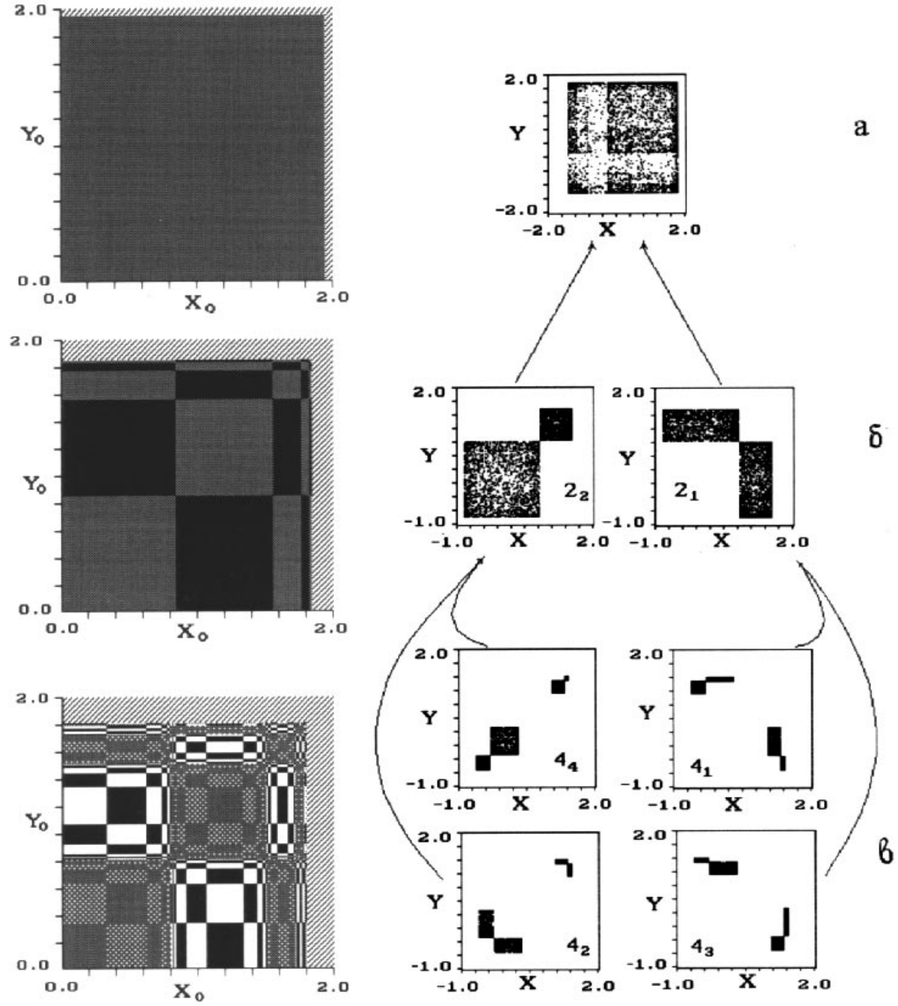

Рис. 1. Бассейны притяжения (слева)системы (*1*) при значениях: *а* — $\lambda = 1.8$, $k = 0$; *б* — $\lambda = 1.54$, $k = 0$; *в* — $\lambda = 1.428$, $k = 0$ (справа приведены фазовые портреты сосуществующих аттракторов); *г* — $\lambda = 1.454$, $k = 0.0128$; *д* — $\lambda = 1.57$, $k = 0.042$; *е* — $\lambda = 1.7$, $k = 0.07$ (справа приведены увеличенные фрагменты).

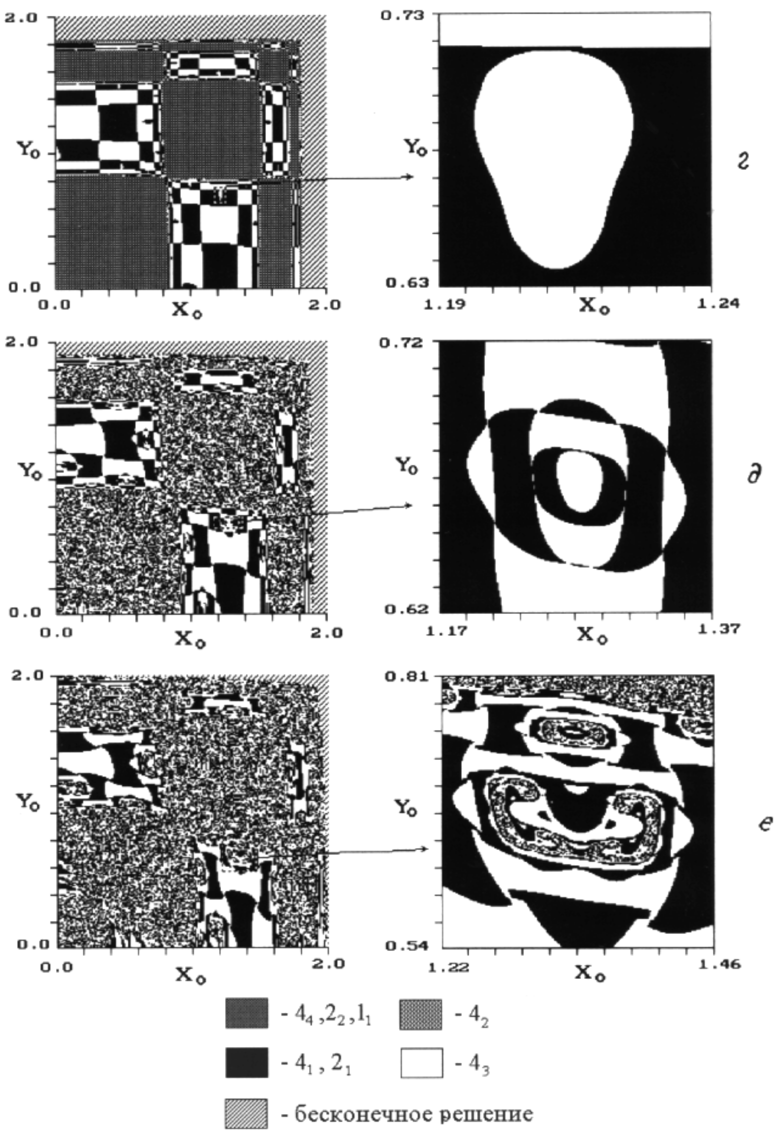

Рис. 1 (*продолжение*).

аттракторов сливаются и их бассейны притяжения. Для случая $k = 0$ это иллюстрирует рис. 1 ($в \to б \to а$).

Будем увеличивать связь и подстраивать при этом значение параметра нелинейности так, что при движении по плоскости $\lambda - k$ один из ляпуновских показателей оставался приблизительно постоянным. В качестве исходных используем значения параметров, соответствующие рис. 1, *в*. Увеличение k приводит к искривлению (скруглению) границ бассейнов притяжения аттракторов, аналогичному описанному в [6] для периодических решений. Однако при дальнейшем изменении λ и k, когда аттракторы 4_4 и 4_2 сливаются в двухленточный 2_2, бассейны хаотических демонстрируют специфику. Внутри ранее односвязных областей в соответствии со сценарием [7] формируются "озера" бассейна зеркально симметричного аттрактора (рис. 1, *г*). Изменение λ и k приводит к образованию внутри этих "озер" новых, более мелкого масштаба. Количество "озер в озере" с ростом параметров увеличивается, но остается конечным, что подтверждает увеличенный слева фрагмент на рис. 1, *д*.

Но наиболее существенные метаморфозы происходят при значениях λ и k, когда в фазовом пространстве остаются два 4-ленточных аттрактора, а сосуществовавший с ними 2_2 становится непритягивающим и исчезает. Область плоскости (X_0, Y_0), которую занимал его бассейн, дробится фрактальным образом на бассейны притяжения оставшейся пары аттракторов (рис. 1, *г*). При этом в кажущейся неупорядоченности чередования белых и черных областей на рис. 1, *д* имеет место симметрии относительно диагонали $X_0 = Y_0$. Структура вложенных "озер" сохраняется и имеет место во всех даже самых мелких областях, оставаясь конечной. Но при некоторых критических значениях λ и k отмеченное вложение мелких областей в более крупные становится бесконечным, т. е. структура бывших ранее односвязными областей становится фрактальной (рис. 1, *е*).

Некоторые из отмеченных закономерностей удается выделить в физическом эксперименте. Рис. 2 иллюстрирует бассейны притяжения аттракторов колебательных контуров в ситуациях, аналогичных рис. 1, *д* и *е*. Пограничная область между бассейнами аттракторов, в которой имеет место накопление мелких фрагментов, не разрешаемых в физическом эксперименте, на рис. 2 заштрихована около жирной линии (сепаратрисы). В экспериментальной системе отмечено, в частности, слияние аттракторов с соответствующим объединением бассейнов (4_2

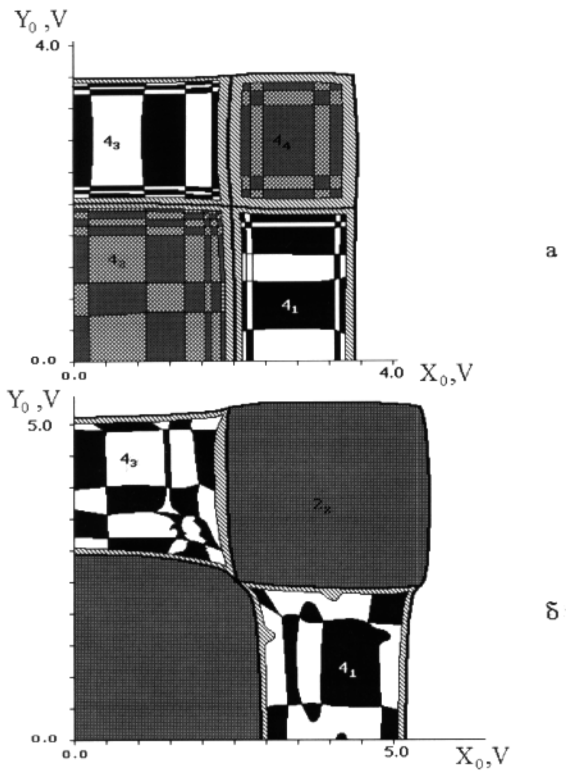

Рис. 2. Бассейны притяжения хаотических аттракторов экспериментальной системы при значениях: *а* — $\lambda = 1$ В, $k = 0.002$ мс; *б* — $\lambda = 1.79$ В, $k = 0.025$ мс.

и 4_4 в 2_2). Внутри односвязных областей бассейнов притяжения аттракторов 4_1 и 4_3 с изменением параметров обнаружены "озера" (рис. 2, *б*). Наблюдаемая асимметрия в структуре бассейнов притяжения относительно прямой $X_0 = Y_0$ связана с некоторой неидентичностью парциальных экспериментальных подсистем.

4. Отмеченное качественное соответствие результатов экспериментальных и численных исследований свидетельствует об общности описанных закономерностей для объектов с удвоением периода из выделен-

ного класса и о грубости представленной картины. Следует подчеркнуть, что, несмотря на все наблюдаемые изменения бассейнов притяжения, границы каждой отдельной односвязной области, и крупной и мелкой, остаются гладкими.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант N 96–02–16753.

Список литературы

[1] *Kaneko K.* Collaps of tori and genesis of chaos in dissipative system // World Scientific. 1986. 264 p.
[2] *Кузнецов С.П.* // Изв. вузов. Радиофизика. 1985. Т. 28. N 8. С. 991–1007.
[3] *Астахов В.В., Безручко Б.П., Ерастова Е.Н., Селезнев Е.П.* // ЖТФ. 1990. Т. 60. В. 10. С. 19–26.
[4] *Linsay P.S.* // Phys. Rev. Lett. 1981. V. 47. N 19. P. 1349–1352.
[5] *Buskirk R., Jeffries C.* // Phys. Rev. A. 1985. V. 31. N 5. P. 3332–3357.
[6] *Безручко Б.П., Селезнев Е.П., Смирнов Е.В.* // Письма в ЖТФ. 1995. Т. 21. В. 8. С. 12–17.
[7] *Mira C., Fournier–Prunaret D., Gardini L., Kawakami H., Cathala J.C.* // Int. J. of Bif.& Chaos. 1995. V. 4. N 2. P. 343–381.