

01;12

Применение статистических методов при решении задачи глобальной реконструкции

© А.Н. Павлов, Н.Б. Янсон, В.С. Анищенко

Саратовский государственный университет им. Н.Г.Чернышевского

Поступило в Редакцию 10 декабря 1996 г.

В работе оптимизируется решение задачи реконструкции математической модели при использовании статистических методов для конкретизации оператора эволюции. Показывается, что данная методика позволяет осуществлять моделирование при работе с короткими временными рядами, что обеспечивает определение метрических и динамических характеристик аттрактора с учетом знания восстановленных модельных уравнений. Прямые методы анализа скалярных временных рядов являются в такой ситуации менее эффективными.

Одним из методов математического моделирования является глобальная реконструкция динамических систем, т.е. восстановление эволюционных уравнений системы по экспериментальным временным рядам. Само понятие реконструкции связано прежде всего с именами Паккарда [1] и Такенса [2], в чьих работах была показана и математически обоснована возможность восстановления фазового портрета аттрактора по одномерной реализации некоторого процесса $a(t)$, дискретизованного с шагом Δt , т.е. по временному ряду $a_i = a(i\Delta t)$. В 1986 г. вышла в свет работа [3], где был описан алгоритм, позволяющий поставить в соответствие реальному сигналу математическую модель в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Идея такого алгоритма в общих чертах является следующей. Задание динамических систем требует указать набор величин, однозначно определяющих состояние, и конкретизировать оператор эволюции. Уже само это определение предполагает наличие двух этапов реконструкции математической модели — восстановление фазовых координат вектора состояния и запись конкретного вида эволюционных уравнений.

Традиционным подходом к задаче реконструкции фазовой траектории является использование метода задержки Паккарда–Такенса. Одна-

ко, когда речь идет о получении математической модели, большинство исследователей предпочитают использовать метод последовательного дифференцирования, поскольку он позволяет получать модель более простого вида [3–6], а именно:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_3, \dots, \dot{x}_n = f(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (1)$$

где f — нелинейная функция, задаваемая априорно, которая в простейшем случае может быть представлена полиномом некоторой степени ν :

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{l_1, l_2, \dots, l_n=0}^{\nu} C_{l_1, l_2, \dots, l_n} \prod_{i=1}^n x_i^{l_i}, \quad \sum_{i=1}^n l_i \leq \nu. \quad (2)$$

В рамках алгоритма глобальной реконструкции производится аппроксимация K неизвестных коэффициентов полинома C_{l_1, l_2, \dots, l_n} методом наименьших квадратов, т. е. решается система N линейных алгебраических уравнений с K неизвестными, где N — число точек исходного временного ряда, $K = (n+\nu)!/(n!\nu!)$. В результате получается модельная система обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка. Однако при практическом использовании алгоритма будет существовать зависимость C_{l_1, l_2, \dots, l_n} от выбора параметров численной схемы (n, ν, N и т. д.), в связи с чем более строгий подход к решаемой задаче предполагает изучение зависимостей C_{l_1, l_2, \dots, l_n} от параметров. В данной работе мы собираемся рассмотреть $C_{l_1, l_2, \dots, l_n}(N)$.

Таким образом, целью данной работы является изучение возможности получения грубой математической модели, выбор коэффициентов для которой осуществляется с помощью статистических методов. Мы собираемся показать также, что данная методика позволяет конкретизировать оператор эволюции даже при работе с очень короткими временными рядами, что делает возможным достаточно точно определить метрические и динамические характеристики аттрактора, используя восстановленные модельные уравнения. Прямые методы расчетов по скалярному временному ряду при этих условиях менее эффективны.

В последнее время алгоритм глобальной реконструкции стал применяться к реализациям процессов биологического происхождения. В частности, в работе [7] решалась задача реконструкции математической модели для одного периода электрокардиограммы здорового человека. Осуществлялось многократное повторение произвольно выбранного

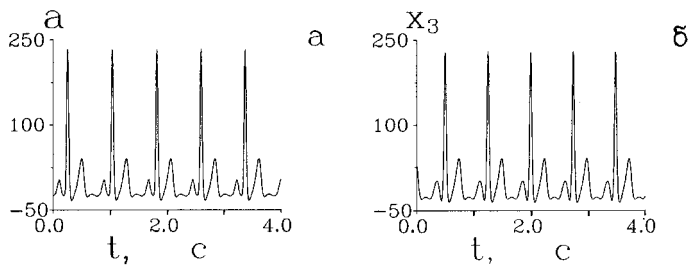


Рис. 1. *a* — исходный сигнал, полученный путем повторения одного периода ЭКГ; *б* — решение модельной системы уравнений (для конкретного вида оператора эволюции брались значения C_{i_1, i_2, i_3, i_4} , соответствующие максимуму плотности распределения вероятности, рассчитанной по зависимости каждого коэффициента от параметра N).

участка, содержащего P, Q, R, S, T -зубцы и ”паузу” для получения периодического временного ряда достаточной длины (рис. 1, *a*). В качестве двух первых координат вектора состояния выбирались интегралы с переменными верхними пределами от исходного временного ряда. Практическая реализация подобной процедуры задания вектора состояния может осуществляться следующим образом. Если $a(t)$ — исходный временной ряд, то вычисляются

$$b(t) = \int_0^t a(\tau) d\tau, \quad c(t) = \int_0^t b(t) d\tau. \quad (3)$$

Затем $c(t)$ используется в качестве исходной реализации. Методом последовательного дифференцирования восстанавливаются остальные координаты вектора состояния в фазовом пространстве, который, таким образом, имеет следующий вид:

$$x_i = \{c_i, dc_i/dt, \dots, d^{n-1}c_i/dt^{n-1}\} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}, \quad (4)$$

где $c_i = c(i\Delta t)$, i — номер точки, Δt — шаг дискретизации. Ясно, что d^2c_i/dt^2 есть исходный сигнал $a(i\Delta t)$. За счет того, что координаты вектора состояния есть производные от сигнала $c(t)$, восстанавливаемая математическая модель имеет вид (1).

Зафиксируем все параметры алгоритма глобальной реконструкции, кроме числа N , изменяя которое, будем осуществлять аппроксимацию коэффициентов c_{l_1, l_2, \dots, l_n} функции f . Построим зависимости $C_{l_1, l_2, \dots, l_n}(N)$ и вычислим для каждой из них плотность распределения вероятности. Выберем для конкретного вида оператора эволюции те значения C_{l_1, l_2, \dots, l_n} , которые соответствуют максимуму плотности вероятности.

Интегрируя полученную таким образом модельную систему, мы можем убедиться (рис. 1, б), что максимуму плотности вероятности соответствует грубое решение, с хорошей степенью точности воспроизводящее исходный сигнал. Следует также отметить, что вариация C_{l_1, l_2, \dots, l_n} в достаточно широких пределах относительно максимума вероятности не приводит к разрушению динамического режима.

Особенностью алгоритма глобальной реконструкции при использовании статистических методов для конкретизации эволюционных уравнений является то, что моделирование может осуществляться по довольно короткой реализации. Проиллюстрируем это на конкретных примерах.

Если алгоритм глобальной реконструкции применяется к периодическому сигналу, полученному при интегрировании уравнений генератора Ван дер Поля ($n = 2, \nu = 3$), то зависимости $C_{l_1, l_2, \dots, l_n}(N)$ для большинства коэффициентов имеют вид, изображенный на рис. 2, а, т. е. существует явная тенденция к сходимости с ростом N . Если при определении коэффициента нас устраивает точность¹ до 1–2%, то для конкретизации оператора эволюции можно ограничиться реализацией порядка $M = 10$ периодов исходного сигнала (или меньше в зависимости от величины шага дискретизации Δt).²

Подобные результаты получаются и для других периодических реализаций, в частности для вышерассмотренного примера процесса биологического происхождения ($n = 4, \nu = 3$), где для достижения той же точности (1–2%) требовалось $M \approx 20$ периодов исходного сигнала.

¹ Под точностью определения коэффициента в данном случае понимается отношение $|C_{l_1, l_2, \dots, l_n}(N) - C_{l_1, l_2, \dots, l_n}^0| / |C_{l_1, l_2, \dots, l_n}^0|$, где $C_{l_1, l_2, \dots, l_n}(N)$ — текущее значение коэффициента, а $C_{l_1, l_2, \dots, l_n}^0$ — соответствующее максимуму плотности вероятности.

² Мы использовали для рассматриваемого примера выборку приблизительно 100 точек на период.

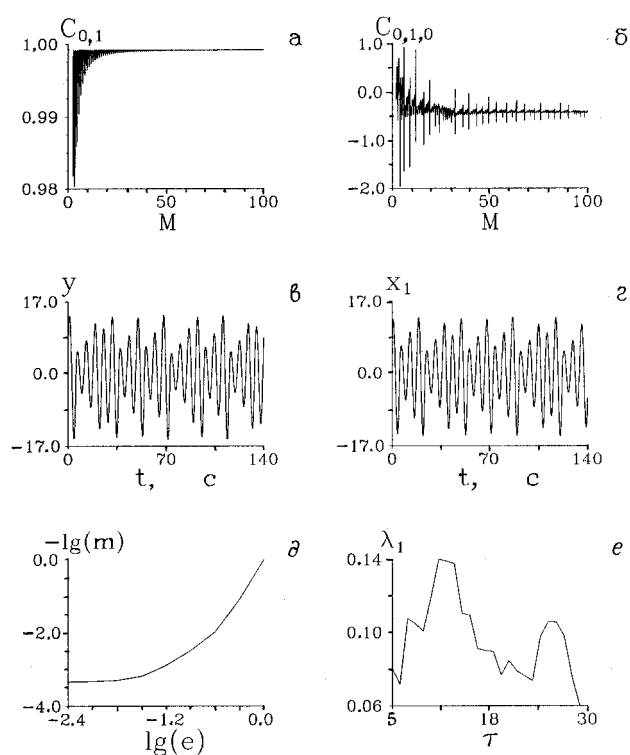


Рис. 2. *a, б* — характерные зависимости коэффициентов аппроксимации полиномов от количества периодов исходного сигнала для генератора Ван дер Поля и системы Ресслера в хаотическом режиме соответственно (во втором случае речь идет об условном периоде колебаний, соответствующем базовой частоте в спектре); *в, г* — исходный сигнал (зависимость $y(t)$, полученная при интегрировании системы уравнений (5)) и решение реконструированной модельной системы уравнений соответственно; *д* — зависимость $\lg(m)$ от $\lg(e)$, позволяющая осуществить оценку размерности Хаусдорфа (e — размер ячейки разбиения фазового пространства, m — число заполненных ячеек); *е* — зависимость старшего ляпуновского характеристического показателя, рассчитанного методом [9] от выбора задержки τ , измеряемой в единицах Δt (при расчете λ_1 использовался метод Паккарда-Тakens для восстановления фазового портрета аттрактора).

Рассмотрим теперь хаотический сигнал, полученный при интегрировании уравнений системы Ресслера:

$$\dot{x} = -(y + z), \quad \dot{y} = x + ay, \quad \dot{z} = b + z(x - c). \quad (5)$$

В качестве исходной использовалась реализация координаты y при значениях параметров $a = 0.15$, $b = 0.2$, $c = 10$ (рис. 2, в). Для данного примера можно вести речь лишь об условном периоде колебаний (соответствующем базовой частоте в спектре). Для достижения точности определения C_{l_1, l_2, \dots, l_n} , равной 1–2%, требуется в среднем $M \approx 22$ таких периода ($N \approx 2200$, $n = 3$, $\nu = 2$).

На рис. 2, б изображен характерный вид зависимости $C_{l_1, l_2, \dots, l_n}(N)$ для рассматриваемого примера. Как следует из рис. 2, з, решение реконструированной по 2200 точкам математической модели с достаточной степенью точности воспроизводит исходный режим динамики. Значит, располагая моделью, мы можем определить метрические и динамические характеристики аттрактора, что весьма затруднительно сделать по столь короткому скалярному временному ряду.

В самом деле, расчет размерности Хаусдорфа [8] по наклону линейного участка графика (рис. 2, д) позволяет оценить величину размерности с большой ошибкой³. Расчет старшего ляпуновского характеристического показателя методом [9], хотя и дает возможность для данного примера получить значение, близкое к истинному, но отсутствие "полочки" на зависимости (рис. 2, е) заставляет с большой осторожностью относиться к данным результатам.

Имея же в своем распоряжении реконструированную математическую модель, мы можем с большей точностью осуществить расчет данных характеристик. В частности, рассчитанный по восстановленной динамической системе методом Бенеттина [10] спектр характеристического показателя ($\lambda_1 = 0.07$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = -10.22$) имеет значения, близкие к истинным ($\lambda_1 = 0.09$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = -10$) [9], что позволяет оценить также информационную размерность аттрактора, используя формулу Каплана–Йорка [11] для ляпуновской размерности d_L . По спектру модельной системы было получено $D_L = 2.007$, тогда как точное значение размерности равно $d_L = 2.01$ [9].

В заключение еще раз отметим, что в представленной работе исследовались зависимости конкретных значений C_{l_1, l_2, \dots, l_n} от выбора

³ То же самое наблюдается и для других обобщенных размерностей, в частности для корреляционной.

параметра N . Было показано, что при применении статистических методов к задаче глобальной реконструкции при условии удачного априорного выбора общего вида эволюционных уравнений становится возможным получать грубую модель и восстанавливать наиболее вероятный оператор эволюции. Данная методика позволяет ограничиться для моделирования достаточно коротким скалярным временным рядом, тогда как при решении задачи моделирования без учета статистики коэффициентов даже для реализаций длиной более 100 периодов (с той же выборкой) при ряде значений параметров численной схемы точность определения $C_{1,2,\dots,l_n}$ может превышать выбранные нами 1–2%. Поэтому, несмотря на то что применение статистических методов требует зачастую довольно длительных вычислений, все-таки преимущество такого подхода является несомненным.

Список литературы

- [1] *Packard N.H., Crutchfield J.P., Farmer J.D., Shaw R.S.* // Phys. Rev. Lett. 1980. V. 45. P. 712–715.
- [2] *Takens F.* // Dynamical Systems and Turbulence. Lecture Notes in Mathematics Berlin, Springer-Verlag, 1981. P. 366–381.
- [3] *Cremers J., Hübler A.* // Z. Naturforsch. A. 1986. V. 42. N 8. P. 797–802.
- [4] *Gouesbet G., Letellier C.* // Phys. Rev. E. 1994. V. 49. N 6. P. 4955–4972.
- [5] *Грибков Д.А., Грибкова В.В., Кравцов Ю.А.* // Радиотехника и электроника. 1994. В. 2. С. 269–277.
- [6] *Janson N.B., Anishchenko V.S.* // Chaotic, fractal and nonlinear signal processing / Ed. by R.A. Katz. Mystic, CT July 10–14, 1995. P. 688–708.
- [7] *Янсон Н.Б., Павлов А.Н., Баланов А.Г., Анищенко В.С.* // Письма в ЖТФ. 1996. Т. 22. В. 16.
- [8] *Grassberger P., Procaccia I.* // Phys. Rev. Lett. 1983. V. 50. P. 346–349.
- [9] *Wolf A., Swift J.B., Swinney H.L., Vastano J.A.* // Physica 16D. 1985. P. 285–317.
- [10] *Benettin G., Galdani M., Giorgilli A., Strelcun J.-M.* // Meccanica. 1980. V. 15. P. 9–15.
- [11] *Kaplan J.L., Yorke J.A.* // Lect. Notes in Math. 1979. V. 730. P. 204–227.