

01;07

Векторный дифракционный интеграл Френеля

© Ш.Д. Какичашвили

Институт кибернетики АН Грузии, Тбилиси

Поступило в Редакцию 24 декабря 1996 г.

В работе исходя из модифицированного для электромагнитных волн принципа Гюйгенса–Френеля проводится согласование путем обобщения волнового числа на комплексное значение. При этом оказывается возможным описание поля непосредственно за дифрагирующим объектом.

В работе [1] рассмотрен дифракционный интеграл, основанный на модифицированном для электромагнитных волн принципе Гюйгенса–Френеля. В этой работе для согласования по амплитуде конечного выражения со свободно распространяющейся плоской волной вводится интегрирование по комплексному отрезку вдоль направления распространения исходной волны.

В предлагаемой работе, исходя из той же модификации принципа Гюйгенса–Френеля, проводится аналогичное согласование путем обобщения волнового числа на комплексное значение. При этом оказывается возможным описание поля непосредственно за самим дифрагирующим объектом.

Запишем координатную часть упомянутого дифракционного интеграла, применив, кроме того, представление вторичной сферической волны в виде $\frac{\exp -i\mathcal{X}r}{-i\hat{\mathcal{X}}r}$, впервые использованной в [2]

$$\vec{\mathbf{E}}(x, y, z) = k \iint_{S_0} \mathbf{R}(l, m, n) \mathbf{P}(l, m, n) \mathbf{M}(x_0, y_0) \vec{\mathbf{E}}_0 \exp -i\mathcal{X}z_0 \frac{\exp -i\hat{\mathcal{X}}r}{-i\hat{\mathcal{X}}r} dx_0 dy_0. \quad (1)$$

Здесь $k = \frac{24}{\pi^2}$; $\mathcal{X} = \frac{2\pi}{\lambda}$; $\hat{\mathcal{X}} = \mathcal{X}' + i\mathcal{X}''$ — комплексное волновое число, связанное с вторичной волной. Значения компонент $\mathcal{X}' = \frac{2\pi}{\lambda'}$ и

$\mathcal{K}'' = \frac{2\pi}{\lambda r''}$ определяются решением согласующего уравнения, анализируемого далее (см. (4)); x, y, z — координаты точки наблюдения; x_0, y_0, z_0 — координаты точки дифрагирующего объекта. Интегрирование проводится по области S_0 , занятой объектом; $\vec{\mathbf{E}}(x, y, z)$ — трехмерный вектор Джонса [3] дифрагированной волны; $\vec{\mathbf{E}}_0$ — вектор Джонса просвечивающей волны (для упрощения последующего рассмотрения просвечивающая волна берется плоской, распространяющейся вдоль оси z); $\mathbf{M}(x_0, y_0)$ — матрица Джонса [3] дифрагирующего объекта; $l = \frac{x-x_0}{r}$; $m = \frac{y-y_0}{r}$; $n = \frac{z-z_0}{r}$ — направляющие косинусы дифрагированного луча; $\mathbf{R}(l, m, n)$ и $\mathbf{P}(l, m, n)$ — соответственно так называемые матрицы поворота и проекции, совместное действие которых описывает эволюцию амплитуды и поляризации вторичной волны в зависимости от направления дифракции. Приведем выражение этих матриц в более компактном и скорректированном сравнительно с [1] виде:

$$\mathbf{R}\mathbf{P} = \begin{pmatrix} n + \frac{m^2}{1+n} & -\frac{lm}{1+n} & l \\ -\frac{lm}{1+n} & n + \frac{l^2}{1+n} & m \\ -l & -m & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{1-l^2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-m^2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{1-n^2} \end{pmatrix}. \quad (2)$$

В соответствии с принципом Гюйгенса–Френеля каждая точка фронта исходной волны является источником реальной вторичной волны. Такой подход, по необходимости, требует изначального согласования амплитуд вторичной и исходной волн. При этом суммарная амплитуда вторичной волны по всем направлениям в отсутствие дифрагирующего объекта (соответствующая матрица Джонса $\mathbf{M}(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$) должна быть равной амплитуде в соответствующей точке фронта исходной волны:

$$\iiint \mathbf{R}(l, m, n) \cdot \mathbf{P}(l, m, n) \vec{\mathbf{E}}_0 \frac{\exp -i\hat{\mathcal{K}}r}{-i\hat{\mathcal{K}}r} dl dm dn = \vec{\mathbf{E}}_0. \quad (3)$$

На самом фронте, где $r \rightarrow 0$, реальная часть амплитуды вторичной волны $\text{Re} \left[\frac{\exp -i\hat{\mathcal{K}}r}{-i\hat{\mathcal{K}}r} \right] \rightarrow 1$ независимо от значения компонент комплексного волнового числа $\hat{\mathcal{K}}$. В этих условиях решение (3) показывает, что трехкратные интегралы от соответствующих элементов произведения матриц $\mathbf{R}\mathbf{P}$ отличны от нуля только для диагональных элементов и равны $\frac{\pi^2}{24}$. Таким образом, оказывается, что результирующая амплитуда

вторичной волны оказывается не равной амплитуде исходной волны. Введенный в (1) коэффициент k осуществляет необходимую коррекцию этого несоответствия.

Определим значения компонент комплексного волнового числа \varkappa' и \varkappa'' , решая (1) в асимптотическом приближении для свободно распространяющейся плоской волны. Выбор критических точек $x_0 = x$, $y_0 = y$ [4] позволяет вычислить асимптотическое приближение в виде

$$\vec{E} = \frac{2\pi k}{\varkappa' \hat{\varkappa}} \vec{E}_0 \exp -i [\varkappa z_0 + \hat{\varkappa}(z - z_0)]. \quad (1')$$

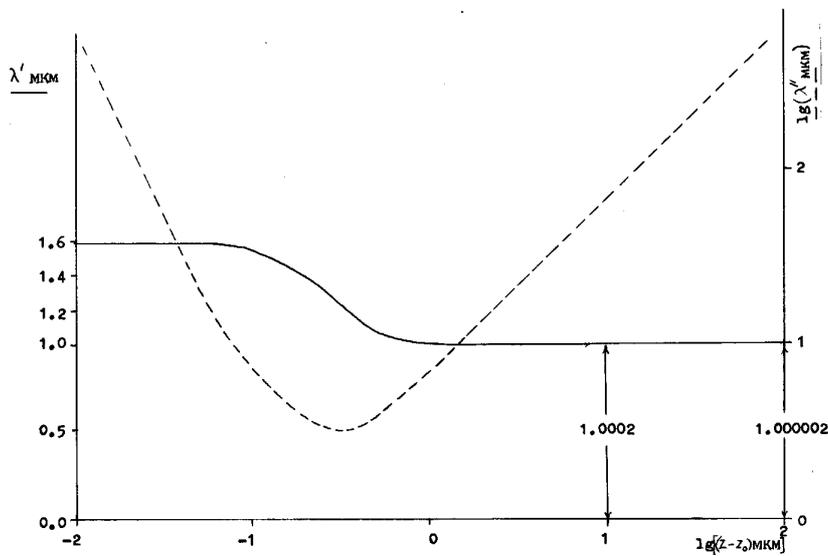
Левая часть равенства (1') в рассматриваемом случае априорно равна $\vec{E}_0 \exp -i \varkappa z$. Это позволяет составить для обеих компонент вектора Джонса \vec{E}_0 одно комплексное уравнение:

$$2\pi k \exp [\varkappa''(z - z_0)] \exp -i [(\varkappa' - \varkappa)(z - z_0)] - \varkappa'(\varkappa' + i\varkappa'') = 0. \quad (4)$$

Разделяя (4) на действительную и мнимую части, при заданных \varkappa и k можно выразить \varkappa' и \varkappa'' как функции расстояния $(z - z_0)$.

На рисунке представлен ход λ' в зависимости от $(z - z_0)$ при выбранном $\lambda = 1$ мкм. С ростом расстояния λ' быстро приближается к λ и при $(z - z_0) \approx 10^2 - 10^4$ мкм с высокой точностью совпадает с ним. Следует обратить внимание, что отличие λ' от λ особенно сильно проявляется лишь в непосредственной окрестности источника на расстояниях, существенно меньших λ , где, собственно говоря, формируется вторичная волна и понятие длины волны в значительной степени утрачивает свою определенность. Эта область, как правило, не поддается однозначному и адекватному описанию [5]. Вообще говоря, возможность экспериментального обнаружения отличия λ' от λ к настоящему времени автору представляется весьма проблематичной. С другой стороны, однако, очевидно, что соответствующий эксперимент необходим для четкого обоснования использованной гипотезы комплексности волнового числа. Мнимая компонента комплексного волнового числа \varkappa'' играет лишь вспомогательную роль и ее, по-видимому, нельзя связать с какой-либо реальной волной. На рисунке ход λ'' обозначен пунктирной линией.

Отметим также, что комплексное уравнение (4) удовлетворяется целой системой других корней, смысл и физическое содержание которых требует дальнейшего анализа.



Если для описания поля на самом дифрагирующем объекте также использовать асимптотическое приближение, заменяя \vec{E}_0 на $\mathbf{M}(x_0, y_0)\vec{E}_0$ и полагая $(z - z_0) = 0$, получим $\varkappa' = \sqrt{2\pi k}$ и $\varkappa'' = 0$, подстановка которых в (1') дает

$$\vec{E} = \mathbf{M}(x_0, y_0)\vec{E} \exp -i\varkappa z, \quad (1'')$$

что однозначно описывает амплитудно-фазовую часть векторного поля непосредственно за дифрагирующим объектом, имеющим произвольную анизотропно-гиротропную структуру.

Показанная в данной работе необходимость модификации волнового числа на комплексное значение является, пожалуй, единственной альтернативой в создавшемся положении дел. Так, в течение длительного времени известно, что дифракционный интеграл Френеля в случае свободно распространяющейся волны приводит к наличию множителя размерности длины, не позволяющего придать ему какой-либо реальный физический смысл. Аналогичные соображения справедливы также для дифракционного интеграла Кирхгофа, если использовать не приближенную, а точную его форму, однозначно следующую из теоремы Грина

и волнового уравнения [6]. Принципиальные затруднения выявляются также при развитии дифракционной идеи Юнга [7].

В этих условиях следует признать, что последовательное использование принципа Гюйгенса–Френеля определяет вторичную волну как реальное физическое образование со своей спецификой зарождения и формирования, а не как фигурирующий в теории виртуальный математический образ [8].

Список литературы

- [1] *Какичашвили Ш.Д.* // Письма в ЖТФ. 1996. Т. 22. В. 5. С. 66–70.
- [2] *Зоммерфельд А.* Дифференциальные уравнения в частных производных физики. М.: ИЛ, 1950. 456 с.
- [3] *Шерклифф У.* Поляризованный свет. М.: Мир, 1965. 264 с.
- [4] *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики М.: Наука, 1979. 855 с.
- [5] *Шмидт-Вайнмар Х.Г.* Восстановление источников с пространственным разрешением меньше длины волны по оптическим изменениям в дальней зоне. Обратные задачи в оптике / Под ред. Г.П. Болтса. Пер. с англ. М.: Машиностроение, 1984.
- [6] *Кирхгоф Г.* К теории световых лучей. Густав Роберт Кирхгоф / Избранные труды. М.: Наука, 1988. 430 с.
- [7] *Рубинович А.* Томас Юнг и теория дифракции. Творцы физической оптики / Под ред. В.И. Родичева. М.: Наука, 1973. 352 с.
- [8] *Зоммерфельд А.* Оптика. М.: ИЛ, 1953. 486 с.