

01;05

Переход к хаотизации и потеря самоусредняемости в двумерных двухфазных средах на пороге протекания

© С.П. Лукьянец, А.Е. Морозовский, А.А. Снарский

Институт физики НАН Украины, Киев

Национальный технический университет Украины—"КПИ", Киев

Поступило в Редакцию 26 марта 1997 г.

Обсуждаются, найденные недавно экспериментально, гигантские флуктуации электрического поля в двумерных двухфазных средах на пороге протекания. На примере иерархической реализации таких сред показано, что при $\text{Re } \sigma_i = 0$ (σ_1 и σ_2 — кондактансы фаз) и $\text{Im}\sigma_2/\text{Im}\sigma_1 > 0$ процедура построения иерархии приводит к выражению А.М. Дыхне $\sigma_e = \sqrt{\sigma_1\sigma_2}$, а при $\text{Im}\sigma_2/\text{Im}\sigma_1 < 0$ процедура хаотизуется и среда теряет свойство самоусредняемости.

В работе [1] было найдено выражение для эффективной проводимости σ_e двумерной двухфазной среды с геометрически эквивалентным в среднем расположением фаз

$$\sigma_e = \sqrt{\sigma_1\sigma_2}, \quad (1)$$

где σ_i — локальные проводимости фаз с концентрацией $p = 0.5$. В частности, к таким средам (средам Дыхне) относятся среды на пороге протекания.

Как недавно было показано в ряде работ [2–9], при $\text{Re}\sigma_1 = 0$ и $\text{Re}\sigma_2 \ll \text{Im}\sigma_2$ в таких средах наблюдаются гигантские флуктуации локального электрического поля. В частности, это означает, что модуль электрического поля не усредняется на размерах порядка стандартной корреляционной длины (см. эксперимент в работе [4]). В работе [6] была высказана идея о том, что ренормгрупповое отображение для комплексных импедансов при малых локальных потерях приводит к сценарию динамического хаоса и фрактальной зависимости импеданса для иерархических цепочек.

Одни из примеров иерархического построения среды с геометрически эквивалентным расположением фаз приведен в [7,8]. Используя

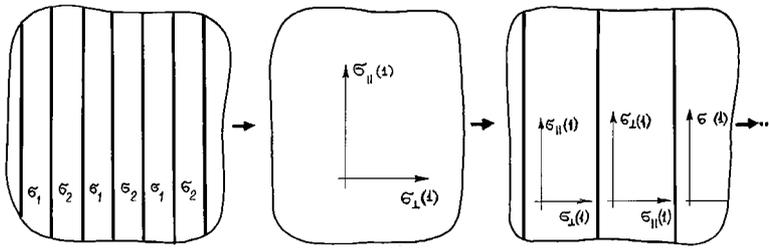


Рис. 1. Процедура последовательного построения иерархической среды Дыхне.

подход [8] и рассмотрев предельный случай $\text{Re}\sigma_2 = \text{Re}\sigma_1 = 0$, покажем, что в зависимости от знака $h = \text{Im}\sigma_2/\text{Im}\sigma_1$ среда будет обладать принципиально разными свойствами. При $h > h_c = 0$ среда является самоусредняющейся, и эффективная проводимость определяется (как и должно быть) формулой Дыхне (1). Когда же $h < h_c = 0$, среда теряет свойство самоусреднения, и введение эффективных кинетических коэффициентов затруднительно.

Согласно [8], на первом шаге среда "собирается" из полосок равной толщины с проводимостями σ_1 и σ_2 (рис. 1, а). Устремляя толщины полосок к нулю — гомогенизируя среду, получаем монокристалл с главными компонентами тензора проводимости $\sigma_{\parallel}(1)$ и $\sigma_{\perp}(1)$ (рис. 1, б). Затем, нарезая вдоль и поперек из этого кристалла полоски равной толщины, набираем из них новый монокристалл (рис. 1, в), главные компоненты тензора проводимости которого $\sigma_{\parallel}(2)$ и $\sigma_{\perp}(2)$. Легко показать, что на каждом этапе

$$\begin{aligned} \sigma_{\perp}(n+1) &= (\sigma_{\perp}(n) + \sigma_{\parallel}(n))/2, \\ \sigma_{\parallel}(n+1) &= 2\sigma_{\perp}(n)\sigma_{\parallel}(n)/(\sigma_{\perp}(n) + \sigma_{\parallel}(n)). \end{aligned} \quad (2)$$

Заметим, что численные коэффициенты в (2) появляются из-за нормировки на геометрические размеры полного контактанса среды с большим (в пределе бесконечным) числом полосок.

Итерационная процедура (2) обладает инвариантом:

$$\sigma_{\perp}(n)\sigma_{\parallel}(n) = \sigma_1\sigma_2 = a, \quad (3)$$

с учетом которого (2) можно записать в виде:

$$\sigma_{\perp}(n+1) = (\sigma_{\perp}(n) + a/\sigma_{\perp}(n))/2, \quad \sigma_{\parallel}(n) = a/\sigma_{\perp}(n). \quad (4)$$

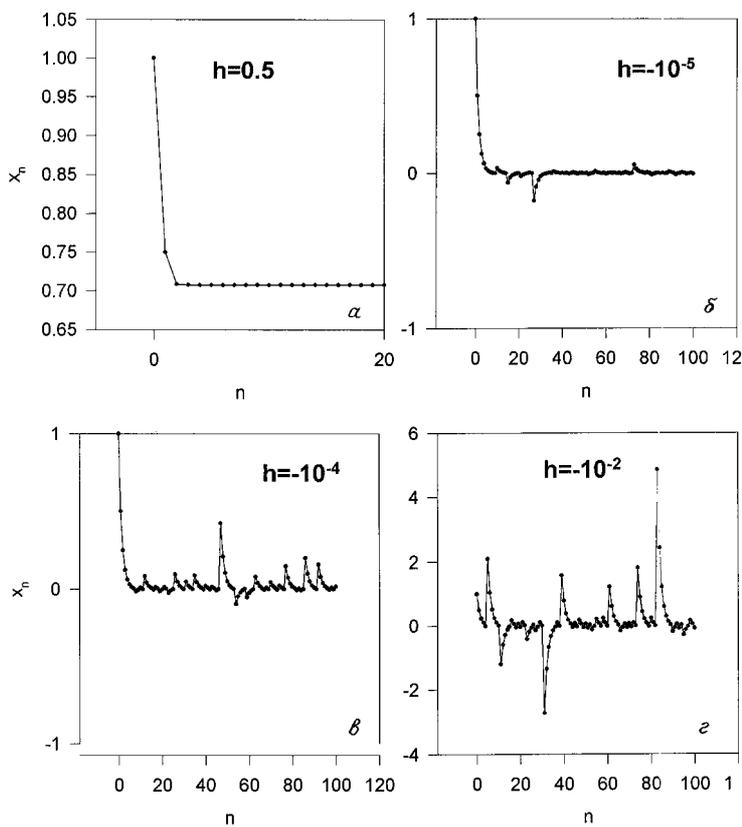


Рис. 2. Поведение итерационной последовательности (6) при одинаковом знаке чисто мнимых значений проводимости фаз, $h = \tilde{\sigma}_2/\tilde{\sigma}_1 > 0$ (a). Хаотическое поведение итерационной процедуры при $h < 0$ (б, в, г).

Легко показать [8], что в случае действительных $\sigma_1 > 0$ и $\sigma_2 > 0$ при $n \rightarrow \infty$ мы приходим к выражению (1) для эффективной проводимости среды [7]. Действительно, отображение (4) обладает неподвижной устойчивой точкой: $\sigma_{\parallel}(\infty) = \sigma_{\perp}(\infty) = \sigma_e = \sqrt{\sigma_1\sigma_2}$. При больших значениях n $\sigma_{\perp}(n)$ имеет вид: $\sigma_{\perp}(n) \approx \sqrt{\sigma_1\sigma_2} \cdot (1 + 0.5(\sigma_1/\sigma_2 - 1) \exp(-n))$, что говорит о быстрой сходимости процедуры (рис. 2, a).

Исследуем (4) для чисто мнимых значений σ_1 и σ_2 , и покажем, что при определенных условиях процедура теряет неподвижные точки и устойчивые циклы, а сама последовательность $\sigma_{\parallel}(n)$ и $\sigma_{\perp}(n)$ хаотизируется. Последнее означает, что получаемая такой процедурой среда оказывается несамоуредняющейся. Для чисто мнимых $\sigma_1 = i\tilde{\sigma}_1$ и $\sigma_2 = i\tilde{\sigma}_2$ значения элементов последовательности, которые определяются процедурой (4), будут также мнимыми $\sigma_{\perp}(n) = i\tilde{\sigma}_{\perp}(n)$, $\sigma_{\parallel}(n) = i\tilde{\sigma}_{\parallel}(n)$. Итерационная процедура для $\tilde{\sigma}_{\parallel}(n)$ и $\tilde{\sigma}_{\perp}(n)$ имеет тот же вид, что и (4), где теперь вместо a стоит $\tilde{\sigma}_1\tilde{\sigma}_2$.

Следует выделить два случая: 1. $\tilde{\sigma}_1\tilde{\sigma}_2 > 0$ (т. е. $\tilde{\sigma}_1$ и $\tilde{\sigma}_2$ одного знака, например, элементы первой и второй фазы — емкости, активными сопротивлениями которых можно пренебречь). В этой ситуации мы приходим к тому же результату, что и в случае действительных σ_1 и σ_2 . Процедура обладает устойчивыми неподвижными точками, и значение эффективной проводимости определяется выражением

$$\sigma_e = \sigma_{\perp}(\infty) = \sigma_{\parallel}(\infty) = \begin{cases} i\sqrt{\tilde{\sigma}_1\tilde{\sigma}_2}, & \tilde{\sigma}_1 > 0, \quad \tilde{\sigma}_2 > 0 \\ -i\sqrt{\tilde{\sigma}_1\tilde{\sigma}_2}, & \tilde{\sigma}_1 < 0, \quad \tilde{\sigma}_2 < 0. \end{cases} \quad (5)$$

2. $\tilde{\sigma}_1\tilde{\sigma}_2 < 0$ (т. е. $\tilde{\sigma}_1$ и $\tilde{\sigma}_2$ — разных знаков, например, элементы первой фазы — емкости, а второй — индуктивности, активными сопротивлениями которых можно пренебречь). В этом случае для отображения, задаваемого (4), не существует неподвижных точек и устойчивых циклов. Из (4) непосредственно следует, что при $\tilde{\sigma}_1\tilde{\sigma}_2 < 0$ $\tilde{\sigma}_{\parallel}(n)$ и $\tilde{\sigma}_{\perp}(n)$ имеют различные знаки при любом n . Последнее означает, что в этом случае среда не изотропизируется. Для удобства в (4) перейдем к безразмерным переменным $x_n = \tilde{\sigma}_{\perp}(n)/|\tilde{\sigma}_1|$, $y_n = \tilde{\sigma}_{\parallel}(n)/|\tilde{\sigma}_1|$, тогда (4) можно переписать в виде:

$$x_{n+1} = (x_n + h/x_n)/2, \quad y_n = h/x_n. \quad (6)$$

Здесь $h = \tilde{\sigma}_2/\tilde{\sigma}_1$. Теперь начальное значение $x_0 = \pm 1$, а параметром, задающим разные среды, является h . Поведение итерационной последовательности (6) при различных значениях h приведено на рис. 2. Когда $h > 0$, последовательность x_n сходится к неподвижной устойчивой точке x_{∞} (рис. 2, а). Когда же h становится отрицательным, последовательность перестает сходиться и по мере уменьшения h все более приобретает черты хаотического поведения (рис. 2, б, в, г).

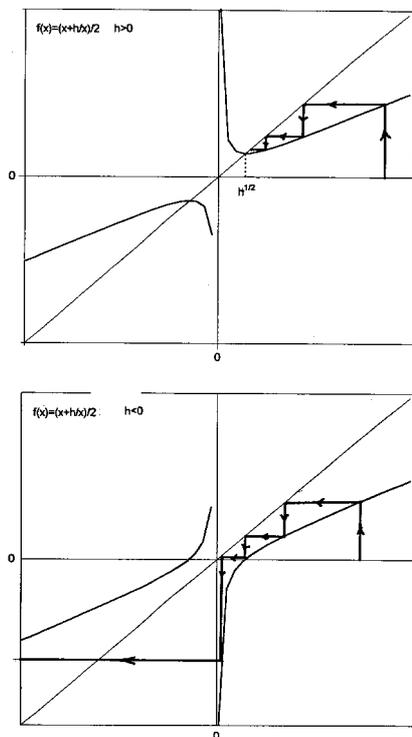


Рис. 3. Сходимость итерационной процедуры с функцией отображения $f(x) = (x + h/x)/2$ к неподвижной устойчивой точке \sqrt{h} при $h > 0$ (а). Потеря устойчивости итерационной процедуры при $h < 0$ (б).

Процедура (б) действительно приводит к хаотической динамике. А именно, для отображения (4) $N(z) = (z^2 + a)/2z$ ($a = \sigma_1\sigma_2$ — положительное и действительное) множество Жюлиа J_N , разделяющее бассейны притяжения устойчивых неподвижных точек $\pm\sqrt{a}$, совпадает с мнимой осью [9]. На J_N (4) индуцирует одномерное отображение, которое сводится к (б), и определяет динамику на множестве Жюлиа. Отображение (4) сопряжено с отображением $R(u) = u^2$, получаемое заменой $u = (z + \sqrt{a})/(z - \sqrt{a})$. При этом мнимая ось (множество Жюлиа) переходит в единичную окружность, динамика на которой за-

дается отображением $r(\theta) = 2\theta(\text{mod } l)$. Последнее, как известно [9,10], порождает хаотическую динамику.

Качественно поведение x_n от n можно пояснить, исходя из графика функции отображения $f(x) = (x + h/x)/2$, которое определяет итерационную процедуру (рис. 3). На рис. 3,а представлена последовательность итераций и ее сходимости к неподвижной устойчивой точке \sqrt{h} при $h > 0$. При достаточно малом отрицательном h (рис. 3,б) последовательность x_n сначала монотонно убывает к нулю ($f(x) \approx x/2$, $|h| \ll |x|$), однако вблизи нуля отображение имеет "провал" ($f(x) \approx -|h|/2x$, $|x| \ll |h| \ll 1$), в результате чего последовательность теряет монотонность, меняет знак, а после некоторого числа итераций вновь возвращается в область больших (по сравнению с $|h|$) значений и опять начинает монотонно стремиться к нулю. При дальнейшем уменьшении h "провал" вблизи нуля увеличивается, что приводит к уменьшению промежутков монотонности, увеличению нерегулярных областей и амплитуд x_n .

Данная процедура позволяет так же получить спектр резонансных частот, который определяется множеством значений $h = \tilde{\sigma}_2/\tilde{\sigma}_1$, число которых растет с шагом итерации n как 2^n , при которых процедура (6) расходится.

Таким образом, на примере одной из возможных реализаций сред Дыхне с иерархической структурой, показано, что при определенных значениях проводимостей фаз среда, оставаясь геометрически средой Дыхне (двумерность, двухфазность, геометрически эквивалентное расположение фаз), в отношении физических свойств теряет самоусредняемость и, тем самым, понятие эффективных кинетических коэффициентов.

Дискуссионными остаются вопросы о том, теряют ли свойство самоусредняемости другие возможные процедуры, приводящие к средам Дыхне, и теряет ли свойство самоусредняемости "обычная" реализация среды Дыхне типа шахматной доски.

Мы выражаем благодарность Э.М. Баскину и М.В. Энтину за обсуждение вопроса об отсутствии самоусредняемости эффективных свойств слабопоглощающих сред, М.В. Энтину за возможность ознакомиться с работой [6] до ее опубликования и за плодотворное обсуждение работы, которое улучшило наше понимание поднятых вопросов, а также В. Ярмольнику за помощь в численных расчетах.

Работа частично поддержана грантами РФФИ 950204432 и "Наука-Сервис" 1-200-96.

Список литературы

- [1] Дыхне А.М. // ЖЭТФ. 1970. Т. 59. С. 110.
- [2] Brauers F., Blacher S., Sarychev A.K. In "Fractal Reviews in the Natural and Applied Sciences", ed. M. Novak, Chapman & Hall, 1995.
- [3] Brauers F., Blacher S., Henriouille N., Sarychev A.K. 4 Int. Confer. ЕТОРІМ4, Book of Abstracts, Moskow, 46 (1996) (submitted to J. Phys. A., 1996).
- [4] Lagarkov A.N., Rozanov K.V., Sarychev A.K. Ibid, 59, 1996.
- [5] Баскин Э.М., Энтин М.В., Сарычев А.К., Снарский А.А. (в печати).
- [6] Энтин М.В., Энтин Г.М. // Письма в ЖЭТФ. 1996. Т. 64. С. 427.
- [7] Schulgaser K.J. // J. Phys. 1977. C10. P. 407.
- [8] Морозовский А.Е., Снарский А.А. // УФЖ. 1983. Т. 28. С. 1230.
- [9] Пайтген Х.О., Рихтер П.Х. Красота фракталов. Образцы комплексных динамических систем. М.: Мир, 1993. С. 93.
- [10] Шустер Г. Детерминированный хаос. М.: Мир, 1988.