

07

Предельная информационная емкость трехмерной голограммы

© Ю.И. Кузьмин

Физико-технический институт им.А.Ф.Иоффе РАН, С.-Петербург

Поступило в Редакцию 5 февраля 1997 г.

Статья посвящена проблеме предельной информационной емкости трехмерной голограммы при оптимальном использовании динамического диапазона запоминающей среды. Голограмма рассматривается как объект теории информации. В рамках формализма обратной решетки выполнен анализ дифракционно-ограниченной голографической записи. Вычисление информационной емкости трехмерной голограммы сведено к анализу набора мультиплексируемых голограмм, каждая из которых имеет конечное отношение сигнал/шум, определяемое динамическим диапазоном голографической среды. Найдено оптимальное число страниц, обеспечивающее максимальную информационную емкость при угловом мультиплексировании.

Начиная с момента открытия голографии вопрос об информационной емкости голограмм является важнейшим для создания систем оптической обработки и хранения информации [1–5]. Настоящая работа посвящена анализу предельной информационной емкости трехмерной голограммы при оптимальном использовании динамического диапазона запоминающей среды.

Информационная емкость представляет собой наибольшее количество информации, которое может быть записано и впоследствии считано со сколь угодно малой вероятностью ошибки. В соответствии с теоремой Котельникова–Шеннона записанная в голограмме информация полностью определяется $4A\Delta^2W$ отсчетами (пикселями), где A — поперечная площадь голограммы, Δ^2W — двумерная ширина спектра записываемых пространственных частот. Величина $4\Delta^2W$ является двумерным аналогом частоты Найквиста. Верхний предел информационной емкости как трехмерной, так и двумерной голограммы может быть найден по аналогии с формулой Шеннона для пропускной способности канала

связи при наличии белого шума [6,7]:

$$C_{3D} = 4A\Delta^2W N \log_2 \left(1 + R_{3D}(\Delta^2W, N) \right), \quad \text{bit}, \quad (1)$$

$$C_{2D} = 4A\Delta^2W \log_2 \left(1 + R_{2D}(\Delta^2W) \right), \quad \text{bit}, \quad (2)$$

где N — число мультиплексируемых голограмм (страниц), $R \equiv P_s/P_n$ — отношение сигнал/шум при считывании одного пиксела, P_s — верхняя граница средней мощности сигнала, формирующего изображение, P_n — средняя мощность оптических шумов.

Определим максимальное число пикселей, которое может быть записано в голограмме при наличии лишь дифракционных ограничений. Под элементарной голографической решеткой будем понимать пространственное распределение записываемого физического параметра, инвариантное относительно трансляции вида:

$$\mathbf{T}_{3D} = n_1 \mathbf{e}_1 + \nu_2 \mathbf{e}_2 + \nu_3 \mathbf{e}_3, \quad \forall n_1 \in \mathbb{I}, \quad \forall \nu_2, \nu_3 \in \mathbb{R}, \quad (3)$$

$$\mathbf{T}_{2D} = n_1 \mathbf{e}_1 + \nu_2 \mathbf{e}_2 + \nu_0 \mathbf{e}_3, \quad \forall n_1 \in \mathbb{I}, \quad \forall \nu_2 \in \mathbb{R}, \quad (4)$$

соответственно для трех- и для двумерной голограммы; где \mathbf{e}_i — базисные векторы трансляций, ν_0 — координата плоскости решетки, \mathbb{I} и \mathbb{R} — множества целых и действительных чисел. В трехмерном пространстве вектор трансляции (3) описывает множество параллельных плоскостей $\mathbf{T}_{3D} \in \mathbb{I} \otimes \mathbb{R}^2$ (рис. 1, *a*), а вектор (4) — множество коллинеарных и компланарных линий $\mathbf{T}_{2D} \in \mathbb{I} \otimes \mathbb{R}$ (рис. 1, *c*).

Обратные решетки, соответствующие в k -пространстве трансляциям (3) и (4), имеют вид:

$$\mathbf{Q}_{3D} = m^1 \mathbf{q}^1, \quad \forall m^1 \in \mathbb{I}, \quad (5)$$

$$\mathbf{Q}_{2D} = m^1 \mathbf{q}^1 + \mu^0 \mathbf{q}^2 + \mu^3 \mathbf{q}^3, \quad \forall m^1 \in \mathbb{I}, \quad \forall \mu^3 \in \mathbb{R}, \quad (6)$$

где μ^0 — координата плоскости обратной решетки; \mathbf{q}^j — базисные векторы обратной решетки, удовлетворяющие соотношению ортогональности $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{q}^j = 2\pi \delta_i^j$, где δ_i^j — символ Кронекера.

В k -пространстве обратная решетка (5) представляет собой множество эквидистантных точек $\mathbf{Q}_{3D} \in \mathbb{I}$ (рис. 1, *b*), а обратная решетка (6) — множество коллинеарных и компланарных линий $\mathbf{Q}_{2D} \in \mathbb{I} \otimes \mathbb{R}$, ориентация которых задана соотношением ортогональности (рис. 1, *d*).

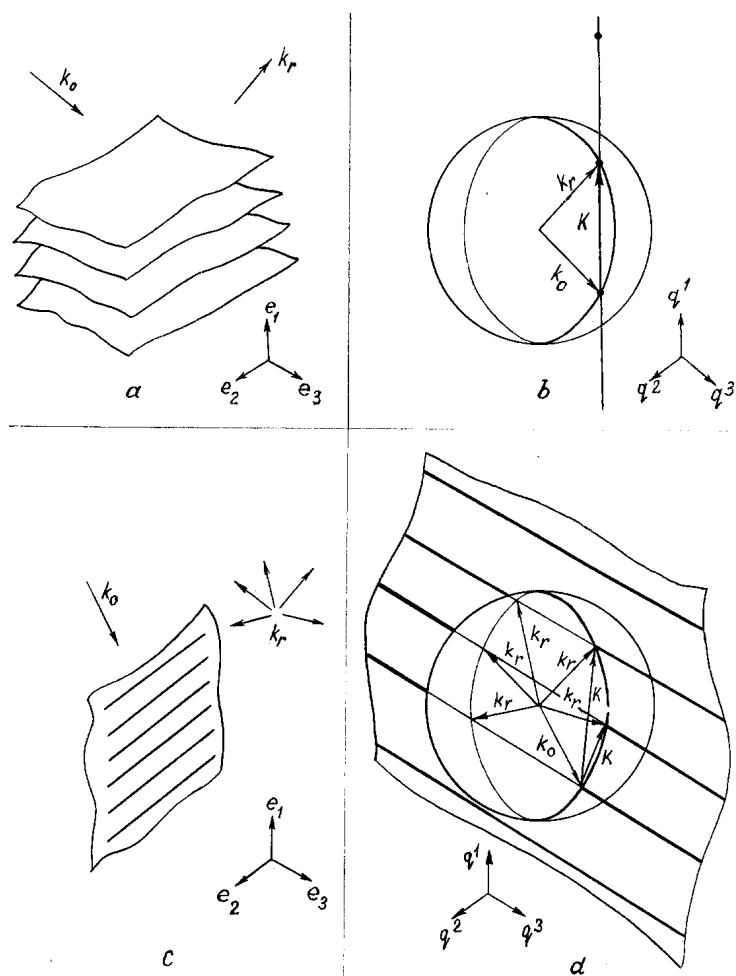


Рис. 1. Трансляционно-инвариантные множества и обратные решетки при оптической дифракции на трехмерной (*a, b*) и на двумерной (*c, d*) голографических решетках: (*a, c*) — координатное пространство, (*b, d*) — *k*-пространство; **K** — вектор рассеяния (показан только для рассеяния "вперед"), **k₀** и **k_r** — волновые векторы считывающего и восстановленного лучей соответственно.

При считывании информации с голограммы ориентация восстановленного луча определяется точками пересечения сферы Эвальда (радиус которой равен волновому вектору считывающего света \mathbf{k}_0) и обратной решетки. При этом вектор рассеяния совпадает с вектором обратной решетки (5) или (6), как это показано на рис. 1. Независимые состояния в k -пространстве на сфере Эвальда соответствуют дифракционно-разрешимым Фурье-компонентам восстановленного изображения. Таким образом, наибольшее количество пикселей, которое может быть записано в голограмме любой размерности, равно числу состояний на $(1/2)$ поверхности сферы Эвальда:

$$\sup(4A\Delta^2W) = \frac{1}{2} \left(\frac{4\pi k_0^2}{\Delta^2 k} \right) = 8\pi \frac{A}{\lambda^2}, \quad (7)$$

где $\Delta^2 k = \pi/A$ — квадрат минимальной неопределенности волнового вектора в дифракционном пределе разрешения, λ — длина волны считывающего света. Подсчет состояний на $(1/2)$ поверхности сферы Эвальда соответствует суммированию по пространственным частотам в пределах всей Фурье-плоскости. Выражение (7) записано в отсутствие поляризационного мультиплексирования, учет которого приводит к удвоению результата.

Максимальное число страниц, записываемых в трехмерной голограмме при угловом мультиплексировании, может быть подсчитано суммированием по всем векторам обратной решетки, опирающимся на сферу Эвальда (т.е. по всем волновым векторам записываемых голографических решеток): $\max(N) = 2k/\Delta k = 4L/\lambda$, где $\Delta k = \pi/L$ — минимальная неопределенность волнового вектора, L — толщина голограммы. Принимая во внимание выражение (7), легко найти максимальное число пикселей, которое могло бы быть записано на всех страницах трехмерной голограммы при неограниченном динамическом диапазоне:

$$\sup(4A\Delta^2W) \max(N) = 32\pi AL/\lambda^3. \quad (8)$$

Оценки вида "объем"/ λ^3 часто приводятся для предельной информационной емкости голограммы [1,2,5]; но при этом нередко делается необоснованное предположение о хранении информации в виде запоминаемых элементов объема ("вокселей" [8]) и не принимается во внимание двумерность спектра пространственных частот записываемого изображения. Число мультиплексируемых голограмм определяется конечной величиной динамического диапазона голографической

среды, от которого зависит отношение сигнал/шум. Поэтому оценка (8) практически недостижима. При мультиплексировании информационная емкость вовсе не возрастает в N раз, как это могло бы показаться при поверхностном анализе формул (1) и (8) без учета зависимости $R_{3D} = R_{3D}(N)$.

Рассмотрим, как число страниц влияет на информационную емкость. В случае двумерной голограммы весь динамический диапазон используется для кодирования каждого пиксела с максимальной длиной слова. Для трехмерной голограммы возможен размен длины слова на число страниц в пределах того же динамического диапазона. Увеличение числа страниц достигается за счет снижения величины R_{3D} вплоть до длины слова в один бит на пиксел. Покажем, что существует оптимальное число страниц, при котором информационная емкость максимальна. Число мультиплексируемых голограмм может быть представлено в виде $N = \sqrt{P_s(1)}/\sqrt{P_s(N)}$, где $P_s(1)$ — максимальная мощность сигнала при записи только одной страницы с использованием всего динамического диапазона, $P_s(N)$ — мощность сигнала при записи одной из N мультиплексируемых страниц. Теперь мы можем связать величины $R_{3D}(N)$ и $R_{3D}(1) = \max_N R_{3D}(N)$:

$$R_{3D}(N) \equiv \frac{P_s(N)}{P_n} = \frac{P_s(1)}{N^2 P_n} = \frac{P_{3D}(1)}{N^2}.$$

При условии $R_{3D}(1) \gg N^2$ выражение (1) приобретает вид

$$C_{3D}(N) = N C_{3D}(1) - 8A\Delta^2 W N \log_2 N. \tag{9}$$

Эта функция имеет максимум при

$$N_0 = 2 \left(\frac{C_{3D}(1)}{8A\Delta^2 W} - \frac{1}{\ln 2} \right).$$

Таким образом, существует оптимальное число страниц $N_{\text{opt}} = \text{entier}(N_0)$, после превышения которого информационная емкость будет снижаться из-за уменьшения отношения сигнал/шум $R_{3D}(N)$.

Интересно отметить, что при достаточно большой величине $R_{3D}(1)$ информационная емкость $C_{3D}(N)$ трехмерной голограммы, в которой записано N страниц, меньше, чем информационная емкость $N C_{3D}(1)$

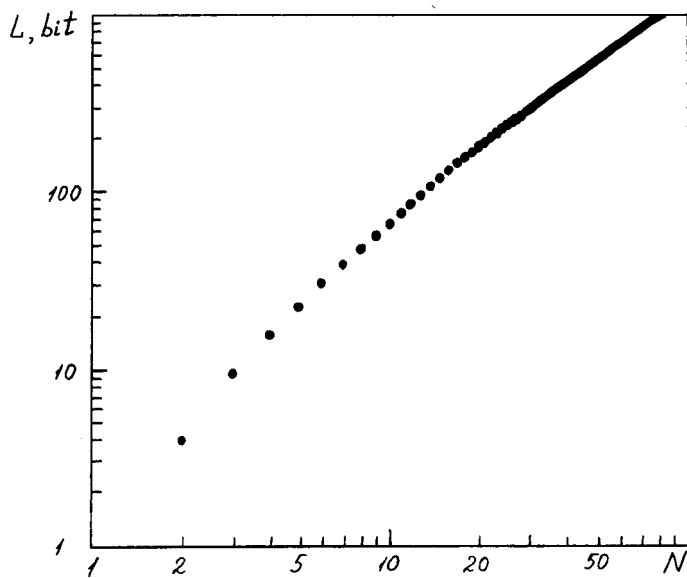


Рис. 2. Функция $L(N)$ в зависимости от числа мультиплексируемых голограмм.

набора из N голограмм, в каждой из которых записана только одна страница, при всех прочих эквивалентных условиях. Как это следует из (9), разница в информационной емкости, приходящейся на один пиксел, описывается функцией

$$L(N) \equiv \frac{NC_{3D}(1) - C_{3D}(N)}{4A\Delta^2W} = 2N \log_2 N, \quad \text{bit},$$

представленной на рис. 2.

В настоящей работе голограмма рассматривается как объект теории информации. Вычисление информационной емкости трехмерной голограммы сведено к анализу набора мультиплексируемых голограмм, каждая из которых имеет конечное отношение сигнал/шум, определяемое динамическим диапазоном запоминающей среды. Получено решение задачи оптимального использования динамического диапазона при угловом мультиплексировании. Анализ дифракционно-ограниченной голографической записи информации выполнен в рамках формализма

обратной решетки, что позволяет в максимальной степени использовать такое фундаментальное свойство оптического изображения, как двумерность спектра его пространственных частот.

Автор выражает благодарность профессору М.П. Петрову за плодотворное обсуждение проблемы информационной емкости голограммы.

Список литературы

- [1] *Van Heerden P.J.* // Appl. Opt. 1963. V. 2, N 4. P. 393–400.
- [2] *Ramberg R.G.* // RCA Rev. 1972. V. 33. P. 5–52.
- [3] *Petrov M.P., Stepanov S.I., Khomenko A.V.* Photorefractive crystals in coherent optical systems. Springer-Verlag, 1991. 275 p.
- [4] *Miridonov S.V., Khomenko A.V., Tentori D., Kamshilin A.A.* // Opt. Lett. 1994. V. 19. N 7. P. 502–504.
- [5] *Wullert J., Lu Y.* // Appl. Opt. 1994. V. 33. N 11. P. 2192–2196.
- [6] *Shannon C.* // Proc. IRE. 1949. V. 37. N 1. P. 10–21.
- [7] *Fellgett P.B., Linfoot E.H.* // Phil. Trans. Roy. Soc. 1955. V. A247. P. 369–407.
- [8] *Brady D., Psaltis D.* // J. Opt. Soc. Amer. A. 1992. V. 9. N 7. P. 1169–1182.