

01

Применение метода Мельникова для оценки эффективности влияния внешних воздействий на сложные нелинейные системы со странными аттракторами

© В.В. Афанасьев, Ю.Е. Польский, В.С. Чернявский

Казанский государственный технический университет

Поступило в Редакцию 11 июня 1997 г.

Использован метод В.К. Мельникова как критерий определения условия возникновения стохастизации в нелинейных динамических системах со странными аттракторами. Получены аналитические условия возникновения стохастизации в системе Дуффинга и системе Лоренца, позволяющие синтезировать управляющие воздействия, обеспечивающие требуемое поведение системы. Проведенный математический эксперимент подтверждает корректность выполненного теоретического анализа.

В сложных нелинейных динамических системах со странным аттрактором возможно протекание качественно отличающихся процессов: регулярного и стохастического. Важной задачей является управление поведением нелинейной динамической системы со странным аттрактором. Известно, что такое управление можно осуществить малыми резонансными воздействиями, согласованными с внутренними свойствами динамической системы. Целью работы является оценка эффективности влияния внешних воздействий на поведение динамической системы со странным аттрактором на базе качественного критерия метода Мельникова.

Наиболее распространенным методом исследования процессов, протекающих в динамической системе со странным аттрактором, является математическое моделирование на ЭВМ. В то же время представляется интересным рассмотрение аналитических методов, позволяющих определить условия перехода системы из одного режима в другой. Известен аналитический метод Мельникова, позволяющий определить условия возникновения стохастизации в системах, близких к гамильтоновым [2] по критерию возникновения стохастичности в окрестности сепаратрисы

при наличии диссипации в нелинейной динамической системе [3]. Метод Мельникова основан на аналитическом вычислении по теории возмущений расстояния D между сепаратрисами анализируемой системы. Знакопеременность D означает, что движение в данной области является хаотическим [2,3]. Следовательно, для определения условия перехода системы из регулярного режима в стохастический необходима оценка изменения знака D .

Известно, что поведение динамической системы Лоренца

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y - x), \\ \dot{y} &= rx - y - xz, \\ \dot{z} &= xy - bz \end{aligned} \quad (1)$$

вблизи точек неустойчивого равновесия $(c_1, c_2$ с координатами $\pm x_0 = \pm y_0 = \pm \sqrt{b(r_0 - 1)}$, $z_0 = r_0 - 1$) можно представить в виде уравнения Дуффинга с негармонической периодической правой частью [4].

Для нелинейной динамической системы Дуффинга с произвольной правой частью $\gamma(t)$

$$\ddot{x} - \varepsilon \delta \dot{x} - x + x^3 = \gamma(t) \quad (2)$$

в случае использования аддитивного внешнего управляющего воздействия $\beta(t)$ расщепление D , следуя методу Мельникова, мы определяем в виде

$$\begin{aligned} D &= \sqrt{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \text{ch}^{-1}(\pi n \Omega / 2) \\ &\times (-n \Omega a_n \sin(n \Omega t_0) + n \Omega b_n \cos(n \Omega t_0)) + 4\delta / 3, \end{aligned} \quad (3)$$

где a_n, b_n — коэффициенты разложения в ряд Фурье функции

$$\alpha(t) = \gamma(t) + \beta(t),$$

где $\gamma(t)$ — правая часть уравнения Дуффинга, $\beta(t)$ — внешнее управляющее воздействие на динамическую систему.

Из полученного выражения (3) следует, что основное влияние на возникновение стохастизации в динамической системе Дуффинга,

подверженной внешним периодическим воздействиям, оказывают первые гармоники $\gamma(t)$ и $\beta(t)$, так как знаменатель $\text{ch}(\pi n \Omega / 2)$ резко увеличивается с ростом коэффициента n . Поэтому для устранения стохастизации возможно использование гармонических управляющих воздействий $\beta(t)$ даже при негармонических $\gamma(t)$. При этом наиболее эффективными оказываются квазирезонансные $\Omega \cong \omega_{kb}$ и инерциальные $\Omega \geq \omega_{kb}$ воздействия [1] (ω_{kb} — квазирезонансная частота системы).

Следует отметить, что смена знака расщепления D , как это видно из (3), зависит также от фазовых соотношений между гармоническими составляющими $\gamma(t)$ и $\beta(t)$, при изменении фазировки возможна как регуляризация, так и стохастизация динамической системы.

В случае периодической модуляции параметра r системы Лоренца в виде $r = r_0 + r(t)$ из (1) получаем

$$\ddot{x} - x\sigma(r_0 - 1) + x^3\sigma/b = -\dot{x}(\sigma + 1 + x^2/b) + \alpha(t), \quad (4)$$

где $\alpha(t) = \sigma x [\dot{z}/b + r(t)]$, r_0 — постоянная составляющая r .

По аналогии с рассмотренным выше уравнением Дуффинга можно сделать вывод о том, что для устранения стохастического режима в системе Лоренца возможно использование гармонического воздействия $r(t)$ с частотой $\Omega \cong \omega_{kb}$ и соответствующим фазовым сдвигом, при этом квазирезонансную частоту ω_{kb} оцениваем по аналитической формуле, полученной в [1].

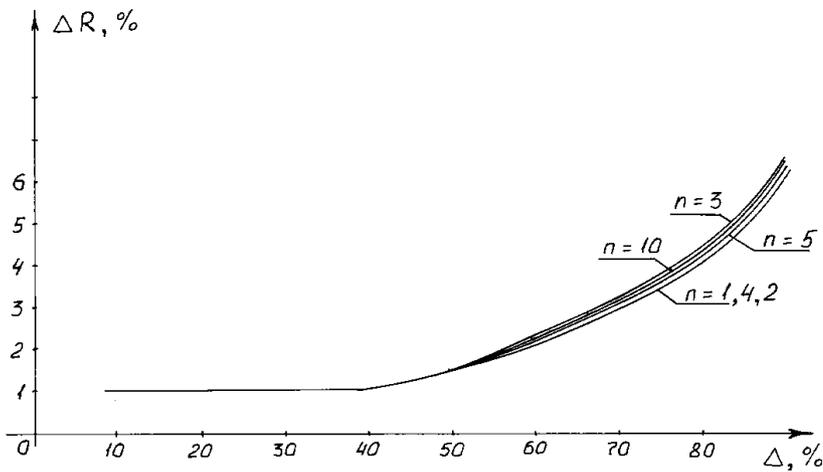
Фазовый сдвиг управляющего воздействия $r(t)$ в системе Лоренца, описывающей динамику процессов в лазерах [5], имеет четкий физический смысл. Действительно, для обеспечения стабильности излучения необходимо повышать мощность накачки лазера при уменьшении амплитуды колебаний поля в лазере и соответственно снижать мощность накачки при увеличении амплитуды колебаний. А так как параметр r пропорционален интенсивности накачки [5], то модуляцию r следует производить, учитывая изменения амплитуды колебаний поля (переменная x) и числа частиц среды, взаимодействующих с излучением (переменная z).

В качестве фазированного управляющего воздействия на параметр r предлагается использовать воздействия типа:

$$\begin{aligned} r(t) &= r_0 + \Delta R Q, \\ Q &= Q_1 \quad \text{при } z \geq r_0 - 1, \\ Q &= Q_2 \quad \text{при } z < r_0 - 1, \end{aligned} \quad (5)$$

где Q — последовательность импульсов единичной амплитуды положительной (Q_1) и отрицательной (Q_2) полярности со скважностью, равной двум, и частотой следования $n \cdot \omega_{kb}$.

Оценка эффективности предлагаемого управляющего воздействия проводилась путем математического моделирования поведения системы Лоренца с характерными параметрами $r_0 = 28$, $\sigma = 10$, $b = 8/3$ [3] и $r(t)$ вида (5). В отсутствие управляющего воздействия в системе Лоренца наступает динамический хаос и возникает странный аттрактор. Нами исследована зависимость между начальным отклонением системы Δ от точек c_1, c_2 и величиной минимальной амплитуды управляющего воздействия ΔR , необходимого для гарантированного устранения динамического хаоса в системе Лоренца при различных значениях параметра n управляющего воздействия. Результаты эксперимента приведены на рисунке. Установлено, что минимально необходимая величина ΔR в значительной степени зависит от начального отклонения системы Δ и



На рисунке приведена зависимость между начальным отклонением системы Δ от точек c_1, c_2 и величиной минимальной амплитуды управляющего воздействия ΔR , необходимого для гарантированного устранения динамического хаоса в системе Лоренца при различных значениях параметра n управляющего воздействия.

практически не зависит от номер гармоники n . Это хорошо согласуется с вытекающим из (3) выводом об основном влиянии на поведение динамической системы первой гармоники управляющего воздействия. Действительно, изменение n в (5) изменяет вид $r(t)$, но мало влияет на огибающую $r(t)$ с частотой ω_{kb} , а именно она, как показано в работе, и оказывает определяющее воздействие на поведение динамической системы. Из рисунка видно, что использование управляющего воздействия (5) с глубиной модуляции порядка 7% позволяет устранить динамический хаос в системе Лоренца при начальном отклонении Δ от точек c_1, c_2 до 90%, что указывает на высокую эффективность его использования для управления поведением динамической системы.

Таким образом, предлагаемый вид квазирезонансного управляющего воздействия является эффективным средством управления поведением динамических систем со странными аттракторами.

Выводы

1. Качественный критерий метода Мельникова позволяет анализировать поведение динамических систем со странными аттракторами при наличии внешних воздействий.

2. Анализ поведения нелинейной динамической системы со странным аттрактором по методу Мельникова показал высокую эффективность квазирезонансных воздействий для управления поведением системы. При использовании квазирезонансных воздействий необходим учет фазовых соотношений между внутренним стохастизирующим $\gamma(t)$ и внешним управляющим $\beta(t)$ воздействиями на динамическую систему.

3. В результате математического моделирования поведения системы Лоренца установлено, что применение предлагаемых воздействий на параметр r системы Лоренца с глубиной модуляции в несколько процентов позволяет обеспечить установление регулярного режима в системе, находящейся без управляющего воздействия в стохастическом режиме. Начальное относительное отклонение системы от состояния неустойчивого равновесия при этом может достигать 90%, что указывает на высокую эффективность предлагаемого вида управляющего воздействия.

Список литературы

- [1] *Афанасьев В.В., Польский Ю.Е.* // Письма в ЖТФ. 1989. Т. 15. В. 18. С. 86–89.
- [2] *Мельников В.К.* // Труды Московского математического общества. 1963. Т. 12.
- [3] *Лихтенберг А., Либерман М.* Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984.
- [4] *Афанасьев В.В., Польский Ю.Е.* // Письма в ЖТФ. 1991. Т. 17. В. 8. С. 57–60.
- [5] *Ораевский А.Н.* // Квантовая электроника. 1981. Т. 8. N 1. С. 130–142.