

## Классический аналог модели Чалкера–Коддингтона

© С.Н. Дороговцев

Физико-технический институт им.А.Ф.Иоффе Российской академии наук,  
194021 Санкт-Петербург, Россия

(Поступила в Редакцию 30 мая 1997 г.)

Описан классический аналог модели Чалкера–Коддингтона — решеточной модели для целочисленного квантового эффекта Холла, в которой в последнее время интенсивно исследуются мезоскопические флуктуации кондактанса в области перехода между плато. Показано, что соответствующей классической проблемой является задача о протекании тока по связям, огибающим кластер протекания на двумерной решетке, — по его так называемой ”скорлупе”. Показано, что, в отличие от стандартных задач о протекании, в скейлинговые зависимости для проводимости, так же как и в функцию распределения по проводимости конечных образцов, в обсуждаемой задаче входит только критический индекс корреляционной длины. Как известно, в подобных зависимостях для целочисленного квантового эффекта Холла также фигурирует лишь критический индекс длины локализации. В результате сделан вывод, о что данная принципиальная особенность квантового эффекта Холла определяется не столько его квантовой природой, сколько геометрией задачи.

Модель Чалкера–Коддингтона [1,2] — сейчас самая популярная решеточная модель целочисленного квантового эффекта Холла. Она позволяет достаточно просто и наглядно описать так называемый переход между плато (plateau transition) в квантовом эффекте Холла при нулевой температуре [3]. В последнее время непосредственно в точке этого перехода наблюдались сильные флуктуации кондактанса в мезоскопических образцах [4]. Функции распределения кондактанса в такой ситуации и поведение кондактанса малых образцов в окрестности перехода между плато удалось исследовать в рамках модели Чалкера–Коддингтона как численно [5,6], так и с помощью метода ренормализационной группы в реальном пространстве [7].

Оказалось, что средний кондактанс малого образца связан с его линейными размерами  $L$  и отклонением от точки перехода  $\Delta$  следующей скейлинговой зависимостью, в которую входит только критический индекс  $\nu$  длины локализации

$$\langle G \rangle = g(L^{1/\nu} \Delta), \quad (1)$$

где  $g(x)$  — скейлинговая функция (смысл  $\Delta$  в модели Чалкера–Коддингтона мы объясним позднее). Функция распределения кондактансов  $P(G)$  в точке перехода между плато от размера  $L$  вообще не зависит.

Казалось бы, проводимость классических протекательных систем вблизи порога протекания ведет себя совершенно иначе. Скажем, в задаче о протекании по связям в скейлинговую зависимость усредненной проводимости образцов размера  $L$  от отклонения концентрации проводящих связей  $p$  от порога протекания  $p_c$  —

$$\langle \sigma \rangle(p, L) = L^{-t/\nu} s(L^{1/\nu}(p - p_c)) \quad (2)$$

— входят как ”статический” индекс  $\nu$  корреляционной длины, так и ”динамический” критический индекс проводимости  $t$  ( $s(x)$  — скейлинговая функция) [8–11]. Общее выражение для функции распределения проводимостей в

пороге протекания также содержит динамический критический индекс

$$P(\sigma, L) = f(L^{1/\nu} \sigma). \quad (3)$$

На первый взгляд такая существенная разница между квантовой и классической задачами не должна вызывать особого удивления. Действительно, в квантовой задаче кондактанс выражается через матрицу прохождения [12], а критический индекс длины локализации нельзя назвать ”статическим”, в то время как в классических задачах протекания разделение критических индексов на ”статические” и ”динамические” имеет принципиальный характер (см., например, подробное обсуждение в обзоре [13]). Следует ли из этого, что между квантовой и классической задачами в этом смысле нет ничего общего? В настоящей работе мы докажем, что это не так. Мы покажем, что классическим аналогом модели Чалкера–Коддингтона является задача о протекании, в которой, в отличие от стандартной, в скейлинговые выражения для проводимости и функцию распределения сопротивлений в пороге протекания входят только статические критические индексы, как обычно, определяемые видом протекательного кластера, а именно

$$\langle \sigma \rangle = L^{-d_h} s(L^{1/\nu}(p - p_c)) \quad (4)$$

и

$$P(\sigma, L) = f(L^{d_h} \sigma). \quad (5)$$

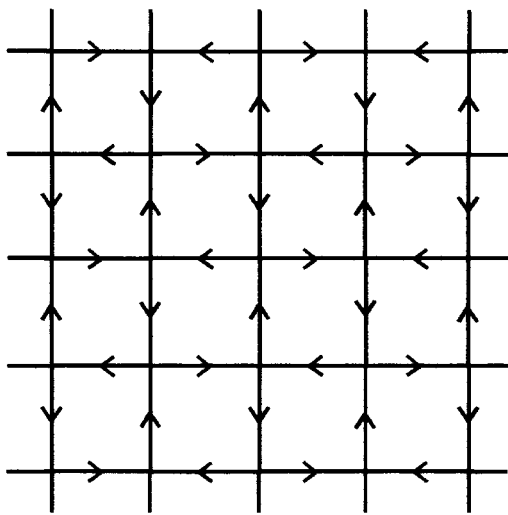
Здесь  $d_h$ , как мы увидим, — фрактальная размерность так называемой скорлупы обычного кластера протекания, то есть статический критический индекс. В двумерной задаче, как известно, эта величина непосредственно выражается через критический индекс корреляционной длины:  $d_h = 1 - 1/\nu$  [14].

Таким образом, мы убедимся, что проводимость классического аналога модели Чалкера–Коддингтона демонстрирует общие черты с кондактансом квантовой задачи: в соответствующие скейлинговые формулы входит только индекс  $\nu$ . При этом мы не станем приводить строгих

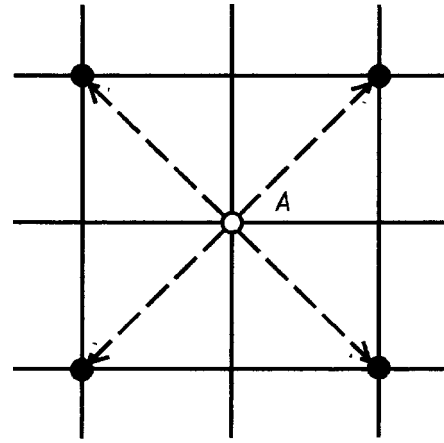
доказательств, а ограничимся весьма поучительным и простым вычислением критических индексов классической задачи.

## 1. Модель Чалкера–Коддингтона и спиральные случайные блуждания

Прежде всего напомним, что такое модель Чалкера–Коддингтона [1]. Квантовая частица (электрон) может пролетать по связям квадратной решетки по направлениям, показанным на рис. 1. После рассеяния на узле решетки частица может повернуть либо налево с амплитудой вероятности  $r$ , либо направо — с амплитудой вероятности  $t$ . При этом амплитуды вероятности рассеяния  $r$  и прохождения  $t$  связаны между собой стандартным образом:  $|r|^2 + |t|^2 = 1$ . (Чтобы исключить термины "правых и левых поворотов", можно ввести две соответствующим образом подобранные матрицы рассеяния для различных узлов решетки: одну матрицу рассеяния для узлов, сумма координат которых  $i + j$  четное число, и вторую, связанную с ней преобразованием поворота на угол  $\pi/2$ , — для узлов, сумма координат которых нечетна [1,5,15].) При движении по связям набираются случайные фазы, по которым в конце, при вычислении конкретных величин, следует произвести усреднение. Ограничение возможных направлений движения моделирует магнитное поле и значительно упрощает задачу о квантовой локализации. На рассматриваемой квадратной решетке делокализация имеет место при  $|t|^2 = 1/2$  — точка перехода между плато в целочисленном квантовом эффекте Холла. Параметр отклонения  $\Delta$  от этой критической точки, фигурирующий в формуле (1), можно выразить через  $|t|$  следующим образом:  $\Delta \equiv \left| |t| - 1/\sqrt{2} \right|$ .



**Рис. 1.** Решетка с направленными связями, используемая в модели Чалкера–Коддингтона и в рассматриваемой модели. Стрелки на связях указывают направления, в которых может двигаться частица.



**Рис. 2.** Узлы решетки, в которые может попасть частица из узла A за два прыжка.

Очевидно, что квантовой модели Чалкера–Коддингтона непосредственно соответствует следующая простая классическая задача о случайных блужданиях на квадратной решетке. Пусть классическая частица после очередного скачка с узла решетки на его ближайшего соседа может прыгнуть налево (на ближайший узел) с вероятностью  $p$  и направо — с вероятностью  $1-p$ . Повторный прыжок в прежнем направлении запрещен. Подобные случайные блуждания относятся к классу спиральных [16].

Если задать направление первого прыжка частицы, то все ее дальнейшие возможные перемещения по решетке образуют ту же самую картину, что используется в модели Чалкера–Коддингтона — см. рис. 1. (Строго говоря, в зависимости от того, в горизонтальном или в вертикальном направлении будет происходить первый прыжок, получаются две картины — одна отличается от другой противоположным направлением соответствующих связей.)

Ясно, что такие случайные блуждания, вообще говоря, являются немарковским процессом, поскольку направление последующего прыжка зависит от предыдущего. В двух случаях, однако, этот процесс сводится к марковскому. Если  $p \ll 1$ , частица почти все время движется вокруг отдельных плакетов, лишь изредка совершая прыжки на соседние плакетты. Фактически происходит обычное случайное блуждание между плакеттами с вероятностью переместиться в одну из четырех сторон после каждого прыжка, равной  $p/4$ . Пусть линейный размер ячейки решетки —  $a$ , а время между прыжками —  $\tau$ . Соседние плакетты, между которыми происходит блуждание частиц, расположены по диагонали (рис. 1), так что расстояние между ними равно  $\sqrt{2}a$ . Воспользовавшись стандартными соотношениями [17], получим следующее выражение для коэффициента диффузии в этом режиме:

$$D = \frac{(\sqrt{2}a)^2}{4\tau} 4p = \frac{2a^2 p}{\tau}. \quad (6)$$

Во втором таком случае вероятности прыжков налево и направо равны —  $p = 1/2$ . Заметим, что при этом независимо от направления предыдущего прыжка частица через два прыжка с равной вероятностью попадет в один из четырех отмеченных на рис. 2 узлов. Таким образом, за два прыжка частица смещается по диагонали элементарной ячейки квадратной решетки опять-таки на  $\sqrt{2}a$  для каждого из четырех возможных направлений с вероятностью  $1/4$ . Тогда

$$D = \frac{(\sqrt{2}a)^2}{4\tau/2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{a^2}{4\tau}. \quad (7)$$

В результате как и можно было ожидать, в классической задаче, непосредственно соответствующей модели Чалкера–Коддингтона, нет даже намека на критические особенности, имеющие место при переходе между плато в квантовом эффекте Холла. Чтобы обнаружить нечто подобное в классических задачах нам придется обратиться к задачам о протекании [18].

## 2. Модель Чалкера–Коддингтона и задача о протекании

Рассмотрим следующую задачу о протекании. В узлах квадратной решетки с единичной решеточной постоянной находятся отражающие с обеих сторон зеркала. Зеркала наклонены под углом  $+\pi/4$  или  $-\pi/4$  к горизонтали, так что траектория движения частицы по связям однозначно задается расположением зеркал. Координаты узлов решетки обозначим  $(i, j)$ . Пусть вероятность того, что угол наклона зеркала в данном узле равен  $(-1)^{i+j}\pi/4$ , есть  $p$ , а вероятность того, что зеркало наклонено под углом  $-\pi/4$ , равна  $1-p$  (рис. 3).

Сразу же заметим, что траектории частицы в такой задаче не разветвляются, не сходятся и не пересекаются друг с другом. Поэтому они могут быть либо замкнутыми, либо начинаться и заканчиваться на границе образца.

При  $p = 0$  и при  $p = 1$  зеркала упорядочены и расположены в шахматном порядке, а вся решетка оказывается фактически разбита на несвязанные друг с другом плакетки, вокруг которых только и может двигаться частица. Нетрудно также понять (далее мы в этом непосредственно убедимся), что лишь при  $p = 1/2$  частица имеет возможность уйти на бесконечность. (Свет может пройти через такую систему зеркал только при  $p = 1/2$ !) Таким образом в рассматриваемой задаче протекание имеет место лишь в единственной точке  $p = 1/2$ . В квантовой модели этому соответствует делокализация при  $|t|^2 = 1/2$ .

Подчеркнем, что наши зеркала мы можем располагать и на решетке со связями, ориентированными так же как в модели Чалкера–Коддингтона (рис. 1, 3). Это приводит лишь к фиксации направления движения частицы, так что, например, при  $p = 0$  частица будет обходить

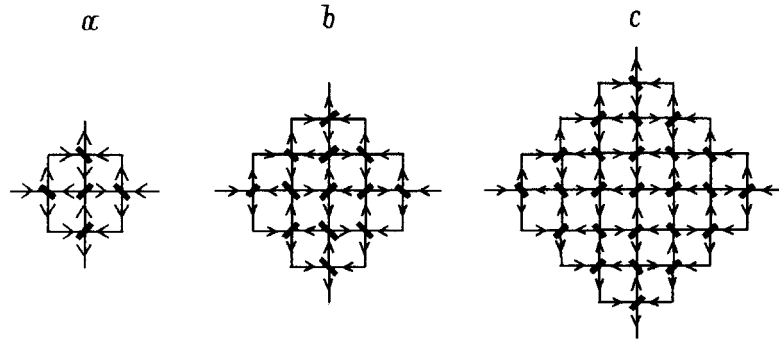
плакетки против часовой стрелки, а при  $p = 1$  — по часовой стрелке. Сам вид траекторий и характеристики критического поведения, разумеется, не меняются.

Таким образом, сформулирована модель, в которой квантовая интерференция между различными траекториями движения частицы в принципе исключена благодаря жесткой фиксации направления рассеяния на каждом из узлов. Вместо квантовой матрицы рассеяния в узлах решетки — классические зеркала, которые однозначно (для данной конфигурации зеркал) определяют, куда частица должна отразиться — направо или налево. Вместо усреднения по набегам фазы квантовой частицы в модели Чалкера–Коддингтона, в нашем случае должно производиться усреднение по различным конфигурациям зеркал. Далее, несмотря на естественные различия между квантовой и классической задачами, мы обнаружим у них общие черты.

Надо отметить, что гораздо более сложная модель протекания, в которую была введена гиротропия для описания влияния сильного магнитного поля, ранее была предложена в работе [19] — так называемое гиротропное протекание.

Каким образом рассматриваемая задача может быть связана с обычной проблемой протекания? Приведем сначала некоторые общие соображения, а затем проверим их непосредственным вычислением критических индексов. При вероятности  $p$ , отличной от нуля или единицы, система разбита на множество кластеров двух типов. В первом из них в узлах решетки  $(i, j)$  находятся зеркала под наклоном  $(-1)^{i+j}\pi/4$  к горизонтали, в узлах второго типа кластеров — зеркала под наклоном  $(-1)^{i+j}\pi/4$  к горизонтали. При  $p \geq 1/2$  возможно обычное ”протекание” по областям первого типа, при  $p \leq 1/2$  — по областям второго типа. Нетрудно убедиться в том, что траектории движения частицы в нашей задаче проходят по границам между кластерами различных типов. (Исключением являются траектории вокруг единичных плакеток, которые оказываются внутри таких кластеров.) Таким образом, наша задача фактически сводится к описанию движения частицы по связям, огибающим кластер протекания в обычной задаче о протекании — по его так называемой ”скорлупе” [14,20–22]. В континуальных задачах протекания этому соответствует движение по уровням равного потенциала вблизи порога протекания [23,24].

Приведенные соображения ни в коем случае нельзя считать строгими. Они нуждаются в серьезном обосновании. Мы же просто найдем методом позиционной ренормгруппы критические индексы обсуждаемой задачи с вполне достаточной точностью, чтобы убедиться в справедливости наших, по сути дела, предположений. Если они верны, критический индекс корреляционной длины рассматриваемой проблемы должен совпасть с индексом корреляционной длины для обычной двумерной задачи протекания. Фрактальная же размерность бесконечной траектории при  $p = 1/2$ , полученная в нашем случае, должна совпасть с фрактальной размерностью



**Рис. 3.** Кластеры, используемые при построении преобразований ренормализационной группы. Множитель масштабного преобразования равен 2, 3 и 4 для кластеров  $a$ ,  $b$  и  $c$  соответственно. Расположение зеркал в узлах выбрано произвольным образом.

”скорлупы” протекательного кластера в обычной задаче протекания (см. формулы (4) и (5)).

Метод позиционной ренормализационной группы или, как его еще называют, метод ренорм-группы в реальном пространстве (см., например, [25–27]) в применении к сформулированной задаче оказывается особенно простым. Для построения ренорм-групповых преобразований вероятности  $p$  оказывается лучше всего использовать кластеры, показанные на рис. 3,  $a, b, c$  для коэффициента масштабного преобразования  $b$ , равного 2, 3 и 4, соответственно. Нетрудно проверить, что число узлов в каждом таком кластере  $n = b^2 + (b - 1)^2$ .

Пусть связи в используемых кластерах ориентированы так, как показано на рис. 3. Если для данной конфигурации зеркал начинающаяся слева траектория выходит, скажем, на верхнюю связь, то легко видеть, что траектория, начинающаяся справа, обязательно приведет вниз. Поэтому преобразование ренормализационной группы строится однозначно: надо определить, с какой вероятностью  $p'$  траектория, начинающаяся справа, приведет вверх, если соответствующая вероятность для отдельных узлов равна  $p$  или  $1 - p$  в зависимости от номера узла решетки (см. формулировку модели в начале раздела). При этом, чтобы найти  $p'$ , надо перебрать всего  $2^n$  возможных конфигураций зеркал.

Простой перебор конфигураций с учетом их весов приводит для кластера с  $b = 2$  (рис. 3,  $a$ ) к следующему преобразованию вероятности  $p$ :

$$p'(p) = 2p^2(1-p)^3 + 8p^3(1-p)^2 + 5p^4(1-p) + p^5. \quad (8)$$

Кстати, преобразование (8) имеет такой же вид, что и у преобразования ренормализационной группы для простейшего самодуального кластера для обычного протекания в задаче связей [25–27]. Оказывается, такое совпадение имеет место лишь в случае  $b = 2$ .

Из-за симметричности используемых кластеров, ренормгрупповые преобразования приводят к точному значению порога протекания. Действительно, фиксированная точка преобразования  $p'(p_c) = p_c$  в точности равняется одной второй —  $p_c = 1/2$ .

Чтобы найти критический индекс  $\nu$  корреляционной длины  $\xi$ , воспользуемся стандартной процедурой [25–27]. Если до преобразования ренормализационной группы корреляционная длина в критической области была равна  $\xi = c_0|p - 1/2|^{-\nu}$ , где  $c_0$  — константа, то после преобразования она выражается через ренормированную вероятность  $p'$  следующим образом:  $\xi = bc_0|p' - 1/2|^{-\nu}$ , поскольку линейный размер ячейки увеличился в  $b$  раз. В результате

$$\nu = \frac{\ln b}{\ln |dp'(p = 1/2)/dp|}. \quad (9)$$

Подставляя в эту формулу для  $b = 2$  соотношение (8), получаем  $\nu = 1.4277$ .

Преобразование ренормализационной группы для кластера с  $b = 3$  (при этом число узлов  $n = 13$ ) — см. рис. 3,  $b$  — находится столь же просто, но имеет несколько более громоздкий вид

$$\begin{aligned} p'(p) = & 3p^3(1-p)^{10} + 38p^4(1-p)^9 + 209p^5(1-p)^8 \\ & + 627p^6(1-p)^7 + 1089p^7(1-p)^6 \\ & + 1078p^8(1-p)^5 + 677p^9(1-p)^4 \\ & + 283p^{10}(1-p)^3 + 78p^{11}(1-p)^2 \\ & + 13p^{12}(1-p) + p^{13}. \end{aligned} \quad (10)$$

Теперь, используя соотношения (9) с  $b = 3$  и (10), легко найти более точное значение критического индекса корреляционной длины —  $\nu = 1.3797$ .

Число конфигураций, которые приходится перебирать, для кластеров с  $b = 3$  и 4 уже довольно велико, поэтому перебор удобнее производить с помощью компьютера, тем более что алгоритм отбора конфигураций, дающих вклад в  $p'$  для нашей задачи, оказывается крайне простым.

Пусть центр кластера имеет координаты  $(0,0)$ . Отбираются такие конфигурации зеркал, в которых траектория частицы, начинающаяся слева — в точке  $(-b, 0)$ , выходит вверх — в точку  $(0, b)$ . Координаты узла, в

которой частица попадет на  $k$ -м шаге, обозначим как  $(i(k), j(k))$ . Введем для каждого из узлов кластера величину  $d(i, j) = \pm 1$ , которая равна  $+1$ , если зеркало в узле имеет наклон  $+\pi/4$  к горизонтали, и равна  $-1$ , если зеркало наклонено под углом  $-\pi/4$ . Во ”внешних” узлах используемого кластера (типа узлов с координатами  $(-b + 1, \pm 1)$ ,  $(b - 1, \pm 1)$  и т.п. — см. рис. 3) мы также поместим зеркала, наклонив их так, чтобы частица оставалась внутри кластера.

Нетрудно убедиться, что координаты частицы после очередного шага должны быть связаны с ее положением в предыдущие ”моменты времени” следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} i(k+1) &= i(k) + d(i(k), j(k)) (j(k) - j(k-1)), \\ j(k+1) &= j(k) + d(i(k), j(k)) (i(k) - i(k-1)). \end{aligned} \quad (11)$$

Поэтому рассчитать всю траекторию частицы для каждого отдельного варианта расположения зеркал и отобразить нужные конфигурации не представляет особого труда.

Для кластера с  $b = 4$ , показанного на рис. 3, с, в результате такого простого перебора  $2^{35}$  конфигураций мы сразу же получаем соотношение

$$\begin{aligned} p'(p) &= 4p^4(1-p)^{21} + 102p^5(1-p)^{20} + 1230p^6(1-p)^{19} \\ &+ 9272p^7(1-p)^{18} + 48718p^8(1-p)^{17} \\ &+ 188512p^9(1-p)^{16} + 553496p^{10}(1-p)^{15} \\ &+ 1252416p^{11}(1-p)^{14} + 2198498p^{12}(1-p)^{13} \\ &+ 3001802p^{13}(1-p)^{12} + 3204984p^{14}(1-p)^{11} \\ &+ 2715264p^{15}(1-p)^{10} + 1854463p^{16}(1-p)^9 \\ &+ 1032857p^{17}(1-p)^8 + 471428p^{18}(1-p)^7 \\ &+ 175870p^{19}(1-p)^6 + 53028p^{20}(1-p)^5 \\ &+ 12646p^{21}(1-p)^4 + 2300p^{22}(1-p)^3 \\ &+ 300p^{23}(1-p)^2 + 25p^{24}(1-p) + p^{25}, \end{aligned} \quad (12)$$

из которого и формулы (9) находим следующее значение критического индекса корреляционной длины:  $\nu = 1.3627$ .

Видно, что значения индекса  $\nu$ , полученные с помощью ренормгрупповой процедуры с  $b$ , равным последовательно 2, 3 и 4, приближаются к  $4/3$  — величине индекса  $\nu$  для обычного протекания в двумерии. Поскольку эта сходимость монотонна, имеет смысл попытаться экстраполировать полученную серию к  $b \rightarrow \infty$  [25–27]. Как всегда, процедура экстраполяции является совершенно не строгой и неоднозначной и может быть произведена, например, следующим образом. Отложим полученные значения индекса  $\nu$  в зависимости от обратных степеней  $b^{-\alpha}$ , причем показатель степени  $\alpha > 0$ , в принципе, произволен. Построим кривую, описываемую квадратным многочленом, проходящую через такие точки. Пе-

ресечение этой кривой с осью ординат и даст искомое экстраполированное значение  $\nu(b \rightarrow \infty)$ .

Ясно, что результат экстраполяции существенно зависит от того, какой показатель степени  $\alpha$  выбрать. Например, для  $\alpha = 1$  получается  $\nu(b \rightarrow \infty) = 1.340$ . Оказывается, что самое близкое к  $4/3$  решение  $\nu(b \rightarrow \infty) = 1.335$  получается, если использовать значение  $\alpha = 1.335$ . Разумеется, это следует считать просто случайным совпадением. По крайней мере найти объяснение ему мы не смогли. В любом случае экстраполяция приводит к значениям  $\nu$ , совсем близким к значению индекса корреляционной длины для обычного протекания, что подтверждает наши предположения. Заметим, что ранее индекс  $\nu$  в подобной задаче оценивался с помощью процедуры, основанной на методе матрицы переноса, и было получено значение  $\nu = 1.29 \pm 0.04$  [3].

В заключение этого раздела кратко упомянем о другой модели с зеркалами в узлах, которая, казалось бы, близка к рассматриваемой. В этой модели для каждого из узлов решетки вероятность того, что зеркало имеет наклон  $+\pi/4$  есть  $p$ , и вероятность того, что наклон зеркала  $-\pi/4$  равна  $1 - p$ . В таком случае при  $p = 0$  частицы или свет могут распространяться по одной диагонали решетки и при  $p = 1$  — по другой диагонали. Легко проверить, однако, что при сколь угодно малых значениях  $p$  или  $1 - p$  свет может распространяться далеко уже по обоим диагоналям решетки. Действительно, в этом случае в решетку размера  $N \times N$  свет может проникнуть по одной диагонали, естественно, на расстояние порядка  $N$ , а по другой — на расстояние порядка  $pN$ . Таким образом, в этой модели, в отличие от обсуждаемой в работе, отсутствуют экспоненциальные корреляции и традиционный порог протекания.

### 3. Функции распределения для сопротивлений и проводимостей

Обсудим теперь, как ведут себя сопротивление и проводимость нашей модели в критической области. Какие для них получаются функции распределения в точке  $p = 1/2$  в случае конечного образца? Чему равна фрактальная размерность бесконечной траектории при  $p = 1/2$ ?

В принципе задача нахождения этих функций распределения является очень сложной. Надо построить преобразование ренормализационной группы для соответствующих функций распределения и найти их стационарную точку, которая и представляет собой искомую универсальную функцию распределения. Фактически требуется решить сложное нелинейное интегральное уравнение. Сделать это можно только приближенно, и используемая процедура обычно крайне трудоемка (см., например, [7]). Аналитически подобные проблемы удается решить только в одномерной ситуации или с помощью достаточно искусственного метода Мигдала–Каданова [11].

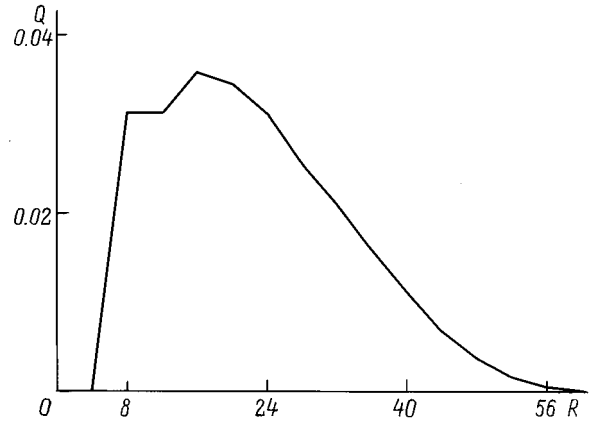
Мы не будем пытаться использовать здесь эти изощренные процедуры, а воспользуемся крайне простым подходом, впервые предложенным для таких задач Киркпатриком [8], который тем не менее приводит к вполне удовлетворительным ответам для критических индексов. (Подчеркнем, однако, что данный подход заведомо не может привести к точным результатам.) В нашем случае он выглядит следующим образом. Функцию распределения по длинам траекторий, проходящим, например, слева направо (рис. 3), до преобразования ренормализационной группы заменим на дельта-функцию, то есть будем считать, что при  $b = 1$  функция распределения имеет вид:  $Q_0(l) = \delta(l - 2)$  (длина связи квадратной решетки или, что в нашем случае то же самое, ее сопротивление, считаются единичными).

Определим, в какую функцию распределения по длинам таких путей она перейдет после ренормгруппового преобразования в точке порога протекания, то есть там, где она имеет универсальный вид. (Ясно, что точную функцию распределения мы можем найти таким образом лишь при  $b \rightarrow \infty$ .) Чтобы найти индексы масштабного преобразования — см. (4) и (5), полученную функцию распределения заменяют опять-таки на дельта-функцию. Вопрос, в каком именно месте лучше расположить эту дельта-функцию, мы обсудим несколько ниже. Обычно строят дельта-функцию в точке среднего сопротивления или средней проводимости. (Поскольку траектории не разветвляются и не пересекаются, длина такой траектории  $l \equiv R$  играет роль сопротивления, а ее обратное значение  $l^{-1} \equiv \sigma$  — проводимости.) Чтобы найти искомым критический индекс, остается сравнить эти значения с соответствующей величиной до ренормгруппового преобразования — 2 или  $1/2$ , соответственно в первом или во втором случаях.

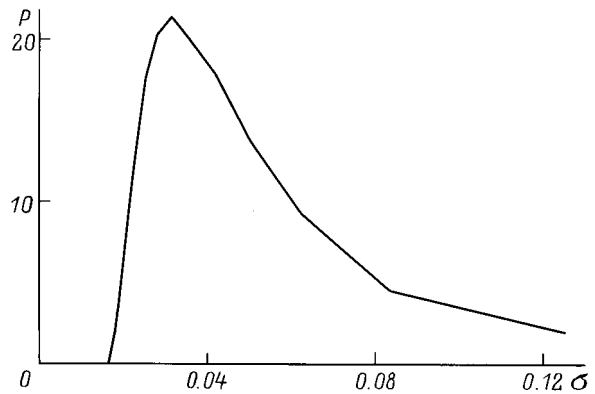
Проведем описанную процедуру последовательно для ренормгрупповых преобразований с масштабными коэффициентами 2, 3 и 4 — см. кластеры на рис. 3. При переборе конфигураций, описанном в предыдущем разделе (теперь мы сразу положим  $p = 1/2$ ), для каждой конфигурации вычислим длину траектории, ведущей, например, слева направо. Получающиеся при этом функции распределения для длин таких путей (т.е. сопротивлений кластеров) и проводимостей имеют вид типа распределений, показанных на рис. 4 и 5 — распределения, полученные после действия на дельта-функцию преобразования ренормализационной группы с масштабным множителем  $b = 4$ .

Собственно говоря, распределение проводимостей  $Q(R)$  получается в виде набора  $b^2 - b + 1$  дискретных значений  $Q(R)\delta_{R,(2b+4k)}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, b^2 - b$ , расположенных с равным шагом 4 от  $R = 2b$  до  $R = 2b(2b - 1)$  — минимальная и максимальная возможные длины траектории в кластере. По этому распределению после сглаживания легко построить распределение проводимостей  $P(\sigma) = Q(\sigma^{-1})/\sigma^2$ .

Уже после применения преобразований с небольшими  $b = 3$  и 4 найденные распределения оказываются



**Рис. 4.** Функция распределения сопротивлений  $Q(R)$ , получающаяся после преобразования ренормализационной группы с  $b = 4$  (см. рис. 3, с). Дискретные значения в точках  $R = 2b + 4k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, b^2 - b$  соединены линией.



**Рис. 5.** Функция распределения проводимостей  $P(\sigma)$ , получающаяся после преобразования ренормализационной группы с  $b = 4$  (см. рис. 3, с). Обращение в нуль функции распределения при значении проводимости  $\sigma = [2b(2b - 1)]^{-1} = 1/56$  — следствие конечности использованного кластера.

близкими друг к другу. Поэтому, к примеру, по виду распределения проводимости  $P(\sigma, b = 4)$ , полученного для кластера со множителем масштабного преобразования  $b = 4$  (рис. 5), можно представить себе, как выглядит универсальная функция распределения, введенная в (5). Из этого соотношения непосредственно следует, что универсальная функция распределения  $f(x) = P(4^{-d_h}x, b = 4)$ . Разумеется, использованная процедура не позволяет определить вид функции распределения при малых и больших значениях проводимости.

Чтобы найти критический индекс  $d_h$ , введенный в соотношении (5), придется, как было описано выше, заменить вычисленные таким образом распределения на дельта-функции, сосредоточенные вокруг, например, среднего сопротивления или средней проводимости. Ясно, что так как распределение проводимостей (рис. 5) выглядит асимметричной распределением сопротивлений (рис. 4), решение, полученное для индекса первым спо-

собою, должно оказаться существенно более точным, чем полученное вторым способом. В первом случае, воспользовавшись (5) и требованием универсальности вида функции распределения в точке порога протекания, нетрудно получить следующее общее соотношение для вычисления индекса  $d_h$ :

$$d_h^r = \ln \left( \frac{\langle R \rangle}{2} \right) / \ln b. \quad (13)$$

При вычислении же искомого индекса по средней проводимости следует использовать несколько иное соотношение

$$d_h^\sigma = \ln \left( \frac{\langle \sigma \rangle}{1/2} \right) / \ln b. \quad (14)$$

Верхние индексы  $r$  и  $\sigma$  у  $d_h$  указывают, каким из двух способов производится вычисление. Подчеркнем, что мы фактически вычисляем фрактальную размерность нашей траектории в пороге протекания.

В результате вычисления критического индекса по формулам (13) и (14) получим сходящиеся серии  $d_h^r = 1.7549, 1.7485, 1.7454$  и  $d_h^\sigma = 1.4764, 1.5289, 1.5623$  для кластеров с  $b = 2, b = 3$  и  $b = 4$ , соответственно.

Экстраполяции, построенные с помощью таких же экстраполирующих функций, что и в предыдущем разделе, приводят к следующим значениям:  $d_h^r(b \rightarrow \infty) = 1.738$  и  $d_h^\sigma(b \rightarrow \infty) = 1.655$ . Как мы отмечали выше, первое значение должно быть существенно ближе к истинному, чем второе. Это позволяет представить себе, с какой погрешностью получен ответ. Итак, найденное приближенное значение индекса (1.738) очень близко к величине фрактальной размерности "скорлупы" обычного протекательного кластера  $d_h = 1 + 1/\nu = 7/4$ . Это, собственно, и подтверждает наши предположения.

Таким образом, несмотря на свою кажущуюся простоту, модель Чалкера–Коддингтона все-таки достаточно сложна в силу сложности интерференции, которая сопровождает процесс распространения квантовой частицы в системе с большим числом центров рассеяния. Природа квантовой локализации в ней не изучена достаточно полно. Например, до сих пор не известно с какой точностью значение критического индекса длины локализации (см., например, подробное обсуждение в работе [7]). Рассмотренный же классический перколяционный аналог этой модели допускает очень простое описание критического поведения, причем обнаруживает некоторые общие черты со своим прообразом — в критические зависимости для сопротивления и проводимости и в их функции распределения в точке порога протекания входит только индекс  $\nu$ . Можно сделать вывод о том, что это свойство является следствием не квантовой природы перехода между плато в целочисленном эффекте Холла, а скорее, общей геометрии рассматриваемых задач.

В заключение отметим, что в работе использованы крайне простые и нетрудоёмкие методы расчета критических индексов, не применялись какие-либо "изошранные" вычислительные процедуры вроде метода Монте-Карло, вообще говоря пригодного для задач данного

круга. Тем не менее, критические индексы получены с удивительно высокой точностью, которую трудно достичь при исследовании обычной задачи протекания.

Можно указать на две причины столь высокой точности. Во-первых, пути, по которым может двигаться частица, имеют в рассматриваемой ситуации очень простую структуру — они не могут сходиться, разветвляться и пересекаться друг с другом. Это значительно упрощает ренорм-групповую процедуру. Во-вторых, удачно выбраны кластеры для преобразований ренормализационной группы. Заметим, что кластер, показанный на рис. 3, а, был использован в работе [7] при исследовании модели Чалкера–Коддингтона.

Автор благодарен А.В. Гольцеву, С.А. Ктигорову, Е.К. Кудинову, А.М. Монахову, А.Н. Самухину, Б.Н. Шалаеву и Ю.А. Фирсову за многочисленные и полезные обсуждения.

Работа частично поддержана грантом Российского фонда фундаментальных исследований.

## Список литературы

- [1] J.T. Chalker, P.D. Coddington. *J. Phys.* **C21**, 2665 (1988).
- [2] Г.В. Мильников, И.М. Соколов. *Письма в ЖЭТФ* **48**, 494 (1988).
- [3] D.-H. Lee, Z. Wang, S. Kivelson. *Phys. Rev. Lett.* **70**, 4130 (1993).
- [4] D.H. Cobden, E. Kogan. *Phys. Rev.* **B54**, R17316 (1996).
- [5] S. Cho, M.P.A. Fisher. *Phys. Rev.* **B55**, 1637 (1997).
- [6] Z. Wang, B. Jovanović, D.-H. Lee. *Phys. Rev. Lett.* **77**, 4426 (1996).
- [7] A.G. Galstyan, M.E. Raikh. *Phys. Rev.* **B55**, in press (1997).
- [8] S. Kirkpatrick. *Rev. Mod. Phys.* **45**, 574 (1973).
- [9] T. Nakayama, K. Yakubo, R.L. Orbach. *Rev. Mod. Phys.* **66**, 381 (1994).
- [10] C. Tsallis, A.C.N. de Magalhães. *Phys. Rep.* **268**, 305 (1996).
- [11] A.N. Samukhin, V.N. Prigodin, L. Jastrabik. *Phys. Rev. Lett.* **78**, 5276 (1997).
- [12] D.S. Fisher, P.A. Lee. *Phys. Rev.* **B23**, 6851 (1981).
- [13] M.B. Isichenko. *Rev. Mod. Phys.* **64**, 961 (1992).
- [14] H. Saleur, B. Duplantier. *Phys. Rev. Lett.* **58**, 2325 (1987).
- [15] S. Cho, M.P.A. Fisher. *Phys. Rev.* **B55**, 1025 (1997).
- [16] D.S. McKenzie. *Phys. Rep.* **27C**, 35 (1976).
- [17] А. Исихара. *Статистическая физика*. Мир, М. (1973). 471 с. (A. Isihara. *Statistical Physics*. Academic Press, N.Y.–London (1971)).
- [18] S.A. Trugman. *Phys. Rev.* **B27**, 7539 (1983).
- [19] С.Н. Дороговцев. *ФТТ* **28**, 10, 3020 (1986).
- [20] R.F. Voss. *J. Phys.* **A17**, L373 (1984).
- [21] R.M. Ziff. *Phys. Rev. Lett.* **56**, 545 (1986).
- [22] P. Grassberger. *J. Phys.* **A19**, 2675 (1986).
- [23] R. Zallen, H. Scher. *Phys. Rev.* **B4**, 4471 (1971).
- [24] А.В. Грузинов, М.Б. Исиченко. *ЖЭТФ* **97**, 476 (1990). *Письма в ЖЭТФ* **70**, 263 (1990).
- [25] J.L. Cardy, S. Ostlund. *Phys. Rev.* **B25**, 6899 (1982).
- [26] J.P. Straley. *J. Phys.* **C10**, 1903 (1977).
- [27] P.J. Reynolds, W. Klein, H.E. Stanley. *J. Phys.* **C10**, L167 (1977).