Тепловые импульсы в режиме второго звука

© В.Д. Каган

Физико-технический институт им.А.Ф.Иоффе Российской академии наук,
194021 Санкт-Петербург, Россия

(Поступила в Редакцию 10 июня 1997 г.)

При низких теператураx в кристаллах тепло распространяется в виде коллективных возбуждений — волн второго звука. Рассмотрено, как при этом из формы теплового импульса определить параметры фононной системы кристалла.

Для описания тепловых явлений кристаллическую решетку в гармоническом приближении можно заменить набором независимых квазичастиц — фононов. Ангармонические силы вызывают процессы взаимного превращения фононов разных ветвей, в результате которых фононная функция распределения релаксирует к равновесному — планковскому — виду. При этом в фононной системе, казалось бы, невозможны медленно меняющиеся в пространстве и во времени коолективные возбуждения. Но фонон-фононные столкновения разделяются на нормальные и резистивные. Нормальные столкновения описывают превращения фононов разных ветвей с выполнением законов сохранения энергии и импульса. Поэтому эти столкновения сохраняют полный импульс и энергию всей фононной системы. Резистивные процессы, к которым относятся рассеяние фононов на примесях и дефектах решетки, рассеяние на границах образца, фонон-фононные превращения в процессах переброса, сохраняют энергию, но не импульс. При низких температурах нормальные столкновения могут быть значительно сильней резистивных. Тогда нормальные столкновения объединяют фононный газ в единую систему, обладающую упругостью, и возмущение фононной функции распределение не релаксирует, а распространяется в виде волны. Такое коллективное возбуждение в фононном газе, т.е. в газе звуковых квантов называется волной второго звука.

Прямым способом обнаружения этой волны является изучение распространения тепловых импульсов. В экспериментах Нараянмурти [1] был выделен медленный тепловой импульс, максимум интенсивности которого распространялся со скоростью второго звука. Во всех последующих экспериментах применялся такой же способ наблюдения второго звука [2]. Скорость является очень характерной, но отнюдь не единственной характеристикой теплового импульса. Были предприняты попытки извлечь из экспериментальных данных импульса характеристики фононной системы. Однако отсутствие строгой теории распространения тепловых импульсов в режиме второго звука мешает интерпретации экспериментальных данных. Настоящая статья посвящена построению такой теории.

В гармонической волне второго звука частота ω и волновой вектор k связаны соотношением [3]

$$kv-\omega=-b\omega^3\tau_n^2+i\left(1/\tau_R+\omega^2\tau_n\right). \qquad (1)$$

Скорость v в $\sqrt{3}$ раз меньше усредненной по всем ветвям скорости первого звука. Мнимое слагаемое в (1) описывает затухание: τ_R — время релаксации резистивных столкновений, τ_n — время релаксации нормальных столкновений, b — число, порядка единицы.

Дисперсионное уравнение (1) позволяет получить уравнение для огибающей импульса, состоящего из звуковых волн. Изменение температуры T в импульсе удовлетворяет уравнению

$$v\frac{\partial T}{\partial x}+\frac{\partial T}{\partial t}=-b\tau_n{}^2\frac{\partial^3 T}{\partial t^3}-\frac{1}{\tau_R}T+\tau_n\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}. \qquad (2)$$

Все слагаемые правой части — поправочные, и в них можно использовать как пространственные, так и временны́е производные.

К уравнению (2) должно быть указано граничное условие, тогда как к видоизмененному уравнению, где в правой части стоят пространственные производные, должно быть указано начальное условие. Главной, однако, является левая часть уравнения, которая определяет его гиперболический характер. В зависимости от использования начального или граничного условия гиперболическое уравнение имеет разные решения. Между этими решениями имеется разрыв, который происходит вдоль характеристики уравнения, проходящей через начальную пространственно-временну́ю точку $x=vt$. В области $x<vt$ нужно использовать граничное условие, в области $x>vt$ — начальное. Временно́й максимум импульса попадает в первую область, так что мы должны решать уравнение (2) с граничным условием. В статье [4] использовалось начальное условие, что вообще говоря, неверно.

Решение (2) напишем, используя метод Фурье,

$$T(x,t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\omega\exp\Big[-i\omega t+i\frac{x}{v}\left(\omega-b\omega^3\tau_n^2\right)$$

$$-\frac{x}{v\tau_R}-\tau_n\omega^2\frac{x}{v}\Big]\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dt'}{2\pi}T(0,t')\,e^{i\omega t'}. \qquad (3)$$

Малый дисперсионный член не будем удерживать в экспоненте, но разложим по нему, удержав первый неисчезающий член. Считая начальный импульс коротким, пренебрежем его протяженностью во времени по сравнению с масштабами, характеризующими принятый импульс,

$$T(x,t) = \left(\frac{1}{2\pi}\int dt' T(0,t')\right)\exp\left(\frac{-x}{v\tau_R}\right),$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega\left(1 - ib\,\frac{x}{v}\,\tau_n^2\omega^3\right)\exp\left[-i\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)-\omega^2\frac{x\tau_n}{v}\right]. \quad (4)$$

Импульс по мере распространения приобретает универсальную форму

$$T(x,t) = \frac{A}{\sqrt{x}}\left[1-\frac{3}{4}\,b\,\frac{v}{x}\left(t-\frac{x}{v}\right)\right]$$

$$\times\exp\left\{-\frac{x}{v\tau_R}-\left(t-\frac{x}{v}\right)^2\frac{v}{4x\tau_n}\right\}. \quad (5)$$

Если не учитывать дисперсионный член, то максимум теплового импульса распространяется со скоростью второго звука, а его ширина определяется длиной образца, на которой принимают этот импульс, и временем релаксации τ_n. Учет дисперсионного члена изменяет положение максимума интенсивности имульса

$$t_{\max} = \frac{x}{v} - \frac{3}{2}\,b\tau_n. \quad (6)$$

Таким образом, если мы вычислили скорость второго звука, то по разности между истинным положением максимума импульса и простым выражением — первым слагаемым в формуле (6) — можно определить время релаксации τ_n.

Мысль о связи сдвига максимума интенсивности и дисперсионного члена была высказана в статье [1]. Однако реализация этой мысли в указанной статье совершенно непонятна, так как авторы использовали только дисперсионное уравнение (1), формулы же (6) у них не было. Возможно, они ее угадали, но по их статье трудно сказать совершенно определенно, как они связывали время сдвига и время релаксации.

Формула (5) представляет собой тот результат, который позволяет определять характеристики фононной системы из экспериментов по распространению тепловых импульсов. Учет дисперсионного члена позволяет, согласно (6), при вычисленной скорости второго звука определять время релаксации τ_n. Кроме того, из (5) видно, что ширина импульса зависит только от τ_n, но не от τ_R. Соответственно можно определять τ_n и из ширины импульса.

Добавим несколько слов о рассмотрени статье [4], так как эта работа часто цитируется [1,2].

Во-первых, авторы не учитывали дисперсионный член ($b = 0$). Во-вторых, они использовали модифицированное уравнение (2), в правой части которого стояли только пространственные производные. К такому уравнению они ставили начальное условие, что, как уже отмечалось выше, не соответствует условиям эксперимента. Однако температуру в начальный момент времени авторы считали сосредоточенной только вблизи начала координат. Соответственно они приходили к следующей форме теплового импульса:

$$T(x,t) = \frac{B}{\sqrt{t}}\exp\left\{-\frac{t}{\tau_R}-\frac{\left(t-\frac{x}{v}\right)^2}{4t\tau_n}\right\}. \quad (7)$$

Вблизи максимума импульса ($x = vt$) эта формула мало отличается от (5), но при больших временах в ней присутствует нарастающее по времени расплывание импульса, которого нет в формуле (5).

Список литературы

[1] V. Narayanamurti, R.C. Dynes. Phys. Rev. Lett. **28**, *22*, 1461 (1972).

[2] В.А. Данильченко, В.Н. Порошин, О.Г. Сарбей. Письма в ЖЭТФ **30**, *4*, 215 (1979).

[3] В.Л. Гуревич. Кинетика фононных систем. Наука, М. (1980).

[4] C.C. Ackerman, R.A. Guyer. Ann. Phys. (N.Y.) **50**, *1*, 128 (1968).