Физика твердого тела, 1998, том 40, № 2

Двухчастичные корреляции в 1D-решеточных системах с δ-взаимодействием

© А.Н. Кочарян, А.С. Саакян

Государственный инженерный университет Армении,
375009 Ереван, Армения

(Поступила в Редакцию 20 мая 1997 г.)

Задача двух взаимодействующих частиц на конечной замкнутой и открытой цепочках точно решена методом Лифшица. Найдены корреляционная функция "плотность–плотность", зависимость "поверхностной" энергии от энергии двухчастичного взаимодействия и числа узлов цепочки, распределение двух частиц не цепочке и выяснен характер основного состояния.

1. Известно, что корреляции между частицами определяют физические свойства многих систем. Простейшими моделями, позволяющими последовательно учесть взаимодействие частиц, являются 1D-модели Бозе-газа [1] и Хаббарда [2], точные решения которых получены методом Бете-анзатца [3,4]. В случае конечного числа частиц переход к термодинамическому пределу совершать некорректно, поэтому необходимо решать задачу для конечной цепочки. Двухчастичная задача на конечной низкотемпературной решетке актуальна с точки зрения выяснения механизмов высокотемпературной сверхпроводимости [5], а также выяснения характера магнитного порядка в сильнокоррелированных системах с дырочным обменом [6] (обобщение теоремы Нагаоки). Этим объясняется повышенный интерес к двухчастичной задаче на конечной низкоразмерной решетке. В работах [7,8] вариационным методом исследуется основное состояние двух электронов на замкнутой цепочке и получено асимптотическое по числу узлов N выражение для энергии основного состояния. В работе [8] сделана попытка решить ту же проблему на $2D$-решетке численными методами. В работе [9] эта задача решена для асимптотически больших N. В работе [10] получено точное выражение для корреляционной функции плотность-плотность для двух бесспиновых фермионов на замкнутой цепочке и энергия основного состояния системы. Таким образом, в настоящее время есть целый ряд разрозненных результатов, полученных разными методами, и в основном приближенными. Все эти результаты можно объединить в рамках единого подхода, позволяющего найти точное решение задачи, например методом Лифшица [11]. В настоящей работе решена задача двух частиц (тождественных и нетождественных), и в некоторых случаях проводится сравнение с результатами, полученными в работах [7–10].

2. Гамильтониан системы взаимодействующих бозонов на решетке имеет вид

$$H = \sum J(n_1 - n_2) a^+_{n_1} a_{n_2} + U \sum \delta_{n_1 n_2} a^+_{n_1} a^+_{n_2} a_{n_2} a_{n_1}, \quad (1)$$

где $n_{1,2}$ — дискретные векторы решетки, a^+_n, a_n — бозевские операторы рождения и уничтожения. В случае модели Хаббарда в фермиевских операторах рождения и уничтожения следует добавить спиновый индекс, а оператор взаимодействия имеет вид

$$H_{\text{int}} = \frac{1}{2} U \sum \delta_{n_1 n_2} \delta_{\sigma_1, -\sigma_2} a^+_{n_1\sigma_1} a_{n_1\sigma_1} a^+_{n_2\sigma_2} a_{n_2\sigma_2}. \quad (2)$$

При $U = +\infty$ две частицы не могут оказаться одновременно в одном узле решетки.

Двухчастичная волновая функция выбирается в виде

$$|2\rangle = \sum_{n_1 n_2} \psi(n_1 n_2) a^+_{n_1} a^+_{n_2} |0\rangle, \quad (3)$$

где $\psi(n_1 n_2)$ — "первичноквантованная" волновая функция; $|0\rangle$ — вакуумный кет-вектор, соответствующий пустой решетке. Действуя оператором (1) на состояние (3), придем к уравнению Шредингера

$$\sum_{n'} J(n_1 - n')\psi(n', n_2) + \sum_{n'} J(n_2 - n')\psi(n', n_1) + U\delta_{n_1 n_2}\psi(n_1, n_2) = E\psi(n_1, n_2). \quad (4)$$

Решение уравнения (4) ищем в виде

$$\psi(n_1, n_2) = \frac{1}{N^d} \exp\big(i(Q/2)(n_1 + n_2)\big) \times \sum_k \exp\big(ik(n_1 - n_2)\big)\psi(k, Q), \quad (5)$$

где $\psi(k, Q)$ — двухчастичная волновая функция в импульсном представлении, d — размерность задачи, Q — квазиимпульс центра масс, k — затравочный квазиимпульс относительного движения. Подставив (5) и (4), получим

$$\psi(n_1, n_2) = -\frac{U\tau}{N_d} \exp\big(i(Q/2)(n_1 + n_2)\big) \times \sum_k \frac{\exp\big(ik(n_1 - n_2)\big)}{\varepsilon(k + Q/2) + \varepsilon(k - Q/2) - E}, \quad (6)$$

где

$$\tau = \psi_{\mathrm{rel}}(n_1 - n_2)\big|_{n_1=n_2}$$

— волновая функция относительного движения в нуле,

$$\varepsilon(k) = \frac{1}{N^d}\sum_n J(n)e^{ikn}$$

— закон дисперсии частиц. В дальнейшем мы будем работать в приближении ближайших соседей. Тогда в случае $d = 1$, $\varepsilon(k) = -2t\cos k$, где $2t$ — ширина энергетической зоны. Постоянную решетки полагаем равной единице. Для нахождения постоянной τ следует записать общее решение уравнения (4), добавив к выражению (6) плоскую волну

$$\psi(n_1, n_2) = \exp\big(i(Q/2)(n_1 + n_2)\big) \times \left[\exp\big(ik_0(n_1 - n_2)\big) - \frac{U\tau}{N^d} \times \sum_k \frac{\exp\big(ik(n_1 - n_2)\big)}{\varepsilon(k + Q/2) + \varepsilon(k - Q/2) - E}\right]. \quad (7)$$

Рассматривая это выражение при $n_1 = n_2$, получим следующее условие самосогласования:

$$\tau^{-1} = 1 + \frac{U}{N^d}\sum_k \frac{1}{\varepsilon(k + Q/2) + \varepsilon(k - Q/2) - E}. \quad (8)$$

Энергетический спектр системы E является решением следующего уравнения:

$$\frac{1}{N^d}\sum_k \frac{1}{\varepsilon(k + Q/2) + \varepsilon(k - Q/2) - E} = -\frac{1}{U} \quad (9)$$

и определяется из полюсов амплитуды взаимного рассеяния частиц, т. е. из условия $\tau^{-1} = 0$.

Рассмотрим решение двухбозонной задачи на одномерной решетке. Параметризацию энергии E выберем в виде

$$E = -4t\cos(Q/2)\cos p. \quad (10)$$

Подставив (10) в (6) и перейдя к интегрированию [11], получим два решения, соответствующие сходящейся и расходящейся волнам

$$\psi_\pm(x, y) = \frac{\mp i\eta}{\sin p\cos(Q/2) \pm in} e^{i(\pm px + (Q/2)y)},$$

$$\eta = \frac{U}{4t}, \quad x = n_1 - n_2, \quad y = n_1 + n_2. \quad (11)$$

Собственные состояния оператора четности являются линейными комбинациями $\psi \pm (x, y)$,

$$\psi(x, y) = e^{i(Q/2)y}\big[\cos(kx + \delta)\theta(-x) + \cos(kx - \delta)\theta(x)\big],$$

$$\delta = \mathrm{arctg}\frac{\eta}{\sin p\cos(Q/2)}. \quad (12)$$

Именно эти решения удовлетворяют граничному условию

$$\lim_{x\to 0}\lim_{U\to\infty}\psi(x, y) = 0. \quad (13)$$

Решения, соответствующие отраженной и прошедшей волне имеют вид

$$\psi(x, y) = e^{i(Q/2)y}\begin{cases} e^{-ipx} - \dfrac{i\eta e^{ipx}}{\sin p\cos(Q/2) + i\eta}, & x < 0,\\ \dfrac{\sin p\cos(Q/2)e^{ipx}}{\sin p\cos(Q/2) + i\eta}, & x > 0. \end{cases} \quad (14)$$

Отсюда находим коэффициенты прохождения и отражения

$$R = \frac{i\eta}{\sin p\cos(Q/2) + i\eta},$$

$$S = \frac{\sin p\cos(Q/2)}{\sin p\cos(Q/2) + i\eta}. \quad (15)$$

Переходя от коэффициентов R, S к фазе рассеяния [12], придем опять к собственным состояниям (12).

3. В случае замкнутой цепочки на волновую функцию (6) или (12) следует наложить граничные условия

$$\psi_A(n_1 + N, n_2) = \psi_B(n_1, n_2),$$

$$\psi_B(n_1, n_2 + N) = \psi_A(n_1, n_2), \quad (16)$$

где $\psi_{A,B}(n_1, n_2)$ — волновые функции в областях $n_1 < n_2$ и $n_1 > n_2$ соответственно. Для нахождения собственных значений задачи из уравнения Лифшица (9) надо в первую очередь, исходя из граничных условий (16), определить спектр затравочных значений k. Итак, полагаем, что трансляция на N не меняет состояния относительного движения двух частиц. Тогда

$$k = \frac{2\pi m}{N}, \qquad m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ N - 1$$

и уравнение Лифшица принимает вид

$$I(p) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\frac{1}{\cos(2\pi n/N) - \cos p} = \frac{\cos(Q/2)}{\eta}. \quad (17)$$

Для нахождения суммы умножим обе части (17) на $\sin p$ и проинтегрируем по p

$$\int I(p)\sin p\,dp = N\ln 2 + \ln\prod_{m=0}^{N-1}\sin\left(\frac{\pi m}{N} + \frac{p}{2}\right) \times \prod_{m=0}^{N-1}\sin\left(\frac{\pi m}{N} - \frac{p}{2}\right), \quad (18)$$

затем учтем, что [13]

$$\prod_{m=0}^{N-1}\sin\left(\frac{\pi m}{N} \pm \frac{p}{2}\right) = \pm 2^{1-N}\sin\frac{Np}{2}.$$

Окончательно получаем

$$\frac{\operatorname{ctg}(Np/2)}{\sin p} = \frac{\cos(Q/2)}{\eta}. \tag{19}$$

Приведем простейшие решения уравнения (19):

a. $U = 0, \qquad p = 2\pi m/N,$

b. $U = +\infty, \qquad p = (2\pi/N)(n + (1/2)),$

т. е. в основном состоянии $p = \pi/N$,

c. $\eta \gg 1, \quad p = (2\pi n/N) + (\pi/N) - (4\pi/N^2),$

d. $\eta \ll 1, \quad p = \sqrt{\eta/N}.$

Итак, энергия основного состояния, в частности, при $U = +\infty$

$$E_0 = -4t\cos\frac{\pi}{N}, \tag{20}$$

или в асимптотическом по N^{-1} приближении

$$E_0 = -4t\left(1 - \frac{\pi^2}{2N^2}\right). \tag{20a}$$

Результат (20) впервые получен в работе [9] для бесспиновых фермионов, а результат, близкий к (20a), — в работе [6] (см. п. 1 настоящей работы).

В случае притяжения $U < \infty$ решение уравнения Лифшица, соответствующее основному состоянию имеет вид

$$E_0 = -4t\sqrt{1+\eta^2} + O\left(e^{-pN/2}\right), \tag{21}$$

что соответствует связанному состоянию частиц, а волновая функция есть

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{R}}\exp\left(-\frac{|x|}{R}\right), \tag{22}$$

где $R = 1/\operatorname{Arsh}\eta$ — "радиус" связанного состояния.

При отталкивательном взаимодействии плотность вероятностей распределения частиц на цепочке в основном состоянии при $U = +\infty$ задается выражением

$$P(x) = \sin^2\frac{\pi x}{N}, \tag{23}$$

откуда следует, что после одного акта рассеяния частицы расходятся на максимальное расстояние, равное длине цепочки (динамическое основное состояние).

Из выражений (6) и (19) легко получить энергию основного состояния и волновую функцию "двухатомной молекулы" — системы из двух частиц на двухузельной решетке

$$E_0 = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{U^2 + (8t)^2} - U\right), & U > 0, \\ -\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{U^2 + (8t)^2} + |U|\right), & U < 0, \end{cases} \tag{24a}$$

$$\Psi(n_1, n_2) = \begin{cases} \dfrac{\delta_{n_1 n_2}\cos p}{\sqrt{1+\cos^2 p}} + \dfrac{1-\delta_{n_1 n_2}}{\sqrt{1+\cos^2 p}}, & U > 0, \\ \dfrac{\delta_{n_1 n_2}\operatorname{ch} p}{\sqrt{1+\operatorname{ch}^2 p}} + \dfrac{1-\delta_{n_1 n_2}}{\sqrt{1+\operatorname{ch}^2 p}}, & U < 0, \end{cases} \tag{24b}$$

где

$$\cos p = -\frac{\eta}{2} + \sqrt{\frac{\eta^2}{4} + 1}, \quad U > 0,$$

$$\operatorname{ch} p = \frac{|\eta|}{2} + \sqrt{\frac{\eta^2}{4} + 1}, \quad U < 0.$$

Парная корреляционная функция имеет следующий вид:

$$G(n_1, n_2) = \langle a^+_{n_1} a_{n_1} a^+_{n_2} a_{n_2}\rangle. \tag{25}$$

Усреднение в (25) следует провести по двухчастичным состояниям (3). Подставив (3) в (25) и учитывая (12), получим

$$G(n_1, n_2) = \frac{2}{N}\delta_{n_1 n_2} + \frac{4}{N^2}\cos^2\big\{p(n_1 - n_2) + \big[\theta(n_1 - n_2) - \theta(n_2 - n_1)\big]\delta(p)\big\}. \tag{26}$$

В частности, при $U \to +\infty$

$$G(n_1, n_2) = \frac{2}{N}\delta_{n_1 n_2} + \frac{4}{N^2}\sin^2 p(n_1 - n_2). \tag{27}$$

Выражение (27) впервые получено в работе [10] для 1D-бесспиновых фермионов.

4. Рассмотрим двухбозонную задачу на открытой цепочке. Параметры Q и p представим в виде

$$2Q_{ij} = \varepsilon_i p_1 + \varepsilon_j p_2, \; 2p_{ij} = \varepsilon_i p_1 - \varepsilon_j p_2, \; \varepsilon_i = 1, -1. \tag{28}$$

Это позволит учесть все падающие и отраженные от границ цепочки волны. Спектр затравочных найдем из условия обращения в нуль волновой функции, когда частицы разнесены на длину цепочки, $\psi(0, N) = \psi(N, 0) = 0$. Применяя эти граничные условия к (6), получим

$$kN = \pi(n + 1/2), \quad n = 1, \ldots, N,$$

так что уравнение Лифшица

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{\cos[\pi(2n+1)/2N] - \cos p_{ij}} = \frac{\cos(Q_{ij}/2)}{\eta}$$

после суммирования приобретает вид

$$\operatorname{tg} Np_{ij} = -\frac{1}{\eta}\sin p_{ij}\cos(Q_{ij}/2), \tag{28a}$$

или, учитывая определение параметров p_{ij}, Q_{ij},

$$\operatorname{tg} Np = -\frac{1}{\eta}\sin p\cos(Q/2),$$

$$\operatorname{tg}\frac{NQ}{2} = -\frac{1}{\eta}\cos p\sin(Q/2). \tag{29}$$

Приведем простейшие решения системы уравнений (29)

a. $\eta = 0, \quad p_1 = p_2 = 2\pi m/N,$

в основном состоянии $n = m = 1$,

$$E_0 = -4t\cos(\pi/N),$$

b. $\eta = +\infty, \quad p_1 = \pi(n+1)/N, \quad p_2 = \pi m/N,$

в основном состоянии

$$n = m = 1, \quad E_0 = -2t\big(\cos(\pi/N) + \cos(2\pi/N)\big),$$

c. $n \gg 1$,

$$E_0 = -2t\left[\cos\left(\frac{2\pi}{N} - \frac{2\pi}{\eta N^2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{N} - \frac{\pi}{\eta N^2}\right)\right],$$

d. $\eta \ll 1, \quad E_0 = -4t\cos\left(\frac{\pi}{N} + \frac{2\eta}{\pi}\right)\cos\sqrt{\frac{\eta}{N}}.$

Волновую функцию можно получить, как и в разделе 2, из выражений (6) с учетом (28) и (29)

$$\psi(n_1, n_2) = \begin{cases} (-1)^{l_1}\sin p_1 n_1 \sin p_2(n_2 - N) \\ \qquad + (-1)^{l_2}\sin p_2 n_1 \sin p_1(n_2 - N), \quad n_1 < n_2, \\ (-1)^{l_2}\sin p_2 n_2 \sin p_1(n_1 - N) \\ \qquad + (-1)^{l_1}\sin p_1 n_2 \sin p_2(n_1 - N), \quad n_1 > n_2, \end{cases} \tag{30}$$

где $l_{1,2}$ — одночастичные квантовые числа на открытой цепочке. Основное отличие от задачи на замкнутой цепочке состоит в том, что здесь квазиимпульсы центра масс и относительного движения входят равнозначно: из-за процессов отражения на концах цепочки они "периодически" меняются ролями. В случае притяжения $U > 0$ энергия основного состояния есть

$$E_0 = -4t\sqrt{\eta^2 + \cos^2\frac{\pi}{2N}}. \tag{31}$$

Очевидно, что энергия двухчастичной системы на открытой цепочке выше, чем на замкнутой. Определим поверхностную энергию

$$\Delta E = E_{\text{open}}E_{\text{closed}}. \tag{32}$$

Так, в случае $U = +\infty$

$$\Delta E = \frac{3\pi^2}{N^2}t, \quad N \gg 1, \tag{33}$$

а в случае $U < 0$

$$\Delta E = \frac{2\pi^2}{|U|N^2}t^2, \quad |U|/t \gg 1, \quad N \gg 1.$$

5. Рассмотрим теперь задачу двух электронов на конечной цепочке. Двухчастичную волновую функцию представим в виде

$$|2\rangle = \sum_{\substack{n_1 n_2 \\ \sigma_1\sigma_2}} \psi(n_1\sigma_1, n_2\sigma_2) a^+_{n_1\sigma_1} a^+_{n_2\sigma_2}|0\rangle. \tag{34}$$

Действуя гамильтонианом Хаббарда на состояние (34), придем к уравнению Шредингера

$$\begin{aligned} &\sum_{n'\sigma'} J(n_1 - n')\psi(n'\sigma', n_2\sigma_2) + \sum_{n'\sigma'} J(n_2 - n')\psi(n'\sigma', n_1\sigma_1) \\ &\quad + U\delta_{n_1n_2}\delta_{\sigma_1,-\sigma_2}\sum_{nm\sigma\sigma'}\big[\delta_{nn_1}\delta_{mn_2}\delta_{\sigma_1,\sigma}\delta_{\sigma_2,\sigma'} \\ &\quad - \delta_{nn_2}\delta_{mn_1}\delta_{\sigma_1,\sigma'}\delta_{\sigma_2,\sigma}\big]\psi(n_1\sigma_1, n_2\sigma_2) \\ &\quad = E\psi(n_1\sigma_1, n_2\sigma_2). \end{aligned} \tag{35}$$

Выражение в квадратных скобках есть матричный элемент оператора $\hat{I} - \hat{P}_{12}$, где $\hat{I}$ — единичный оператор, а $\hat{P}_{12}$ — оператор перестановки. В соответствии с этим, решение уравнения ищем в виде

$$\begin{aligned} \psi(n_1\sigma_1, n_2\sigma_2) = (\hat{I} - \hat{P}_{12})\chi_{\alpha\beta}\frac{1}{N^d} \\ \times \sum_{kQ}\exp\big(i(Q/2)(n_1 + n_2)\big) \\ \times \psi_{\sigma_1\sigma_2}(kQ)e^{ik(n_1 - n_2)}, \end{aligned} \tag{36}$$

где $\chi_{\alpha\beta}$ — синглетная спиновая функция. Тогда

$$\begin{aligned} \left[\varepsilon\left(k + \frac{Q}{2}\right) + \varepsilon\left(k - \frac{Q}{2}\right) - E\right]\psi_{\sigma_1\sigma_2}(k, Q) \\ = -U(\tau_{\sigma_1\sigma_2} - \tau_{\sigma_2\sigma_1}), \end{aligned} \tag{37}$$

где

$$\tau_{\sigma_1\sigma_2} = \psi(n_1\sigma_1, n_2\sigma_2)\big|_{n_1 = n_2}.$$

Используя условие самосогласованности (см. п. 2), получим следующее выражение для величин τ:

$$\tau_{\sigma_1\sigma_2(\sigma_2\sigma_1)} = \pm\left(1 \pm \frac{U}{N^d} \times \sum_k \frac{1}{\varepsilon\left(k + \frac{Q}{2}\right) + \varepsilon\left(k - \frac{Q}{2}\right) - E}\right) \tag{38}$$

и тогда с учетом (36)–(38) получим окончательно для координатной части синглетной волновой функции

$$\begin{aligned} \psi(n_1n_2) = &-\frac{U}{N^d}\exp i(Q/2)(n_1 + n_2) \\ &\times\left[\left(1 + \big(U/N^d\big)\sum_k\frac{1}{z(kQ) - E}\right)^{-1} \times \sum_k\frac{\exp(ik(n_1 - n_2))}{Z(kQ) - E}\right. \\ &\left. + \left(1 - \big(U/N^d\big)\sum_k\frac{1}{Z(kQ) - E}\right)^{-1} \times \sum_k\frac{\exp(-ik(n_1 - n_2))}{z(kQ) - E}\right], \end{aligned}$$

$$Z(kQ) = \varepsilon\left(k + \frac{Q}{2}\right) + \varepsilon\left(k - \frac{Q}{2}\right), \tag{39}$$

а спектр энергий определяется из уравнения (9). Как легко показать, в 1D-случае выражение (39) совпадает с бозевской двухчастичной волновой функцией (12). 1D-волновые функции (12) и (30) обладают той особенностью, что они тождественно обращаются в нуль при $p_1 = p_2$, т.е. удовлетворяют принципу Паули, причем "фермизация" системы происходит при сколь угодно малом взаимодействии, с другой стороны, следует отметить, что этот результат нельзя получить с помощью теории возмущений. Очевидно, что парная корреляционная функция для синглетных электронов определяется выражениями (26), (27).

Таким образом, 1D-системы двух бесспиновых бозонов, двух синглетных электронов, а при $U = +\infty$ двух бесспиновых фермионов эквивалентны, т.е. у них одинаковые волновые функции, спектры энергий и парные корреляционные функции.

6. Аналогично можно получить точное решение задачи двух частиц с разными ширинами зон $t_1 = t_2$. Здесь мы приведем уравнение Лифшица, определяющее спектр энергии системы на замкнутой цепочке

$$\frac{1}{\sin(p+\varphi_0)}\left[\operatorname{ctg}\frac{Np}{2} + \operatorname{ctg} N\left(\frac{p}{2}+\varphi_0\right)\right] = \frac{2t}{U},$$

$$t = \sqrt{t_1^2 + t_2^2 + 2t_1t_2\cos Q}, \quad \operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{t_1 - t_2}{t_1 + t_2}\operatorname{tg}\frac{Q}{2}. \quad (40)$$

Итак, задача двух частиц на цепочке точно решается в рамках подхода Лифшица. Иной подход, в духе Бете-анзатца, также приводит к поставленной цели, причем уравнения Янга совпадают с соответствующими уравнениями Лифшица; т.е. оба подхода к 1D-задаче эквивалентны.

Авторы признательны А.Ф. Андрееву за обсуждение статьи и ценные советы.

Список литературы

[1] T.D. Lee, C.N. Yang. Phys. Rev. **113**, 1406 (1959).
[2] Y. Habbard. Proc. Roy. Soc. **A 276**, 238 (1963).
[3] C.N. Yang. Phys. Rev. Lett. **19**, 1312 (1967).
[4] E.H. Lieb, F.Y. Wu. Phys. Rev. Lett. **64**, 1445 (1968).
[5] Y.G. Bednorz, K.A. Muller. Z. Phys. **64**, 189 (1986).
[6] L. Chen, Ch. Mei. Phys. Rev. **B 39**, *13*, 9006 (1989).
[7] Ch. Mei, L. Chen. Z. Phys. **B 72**, 429 (1988).
[8] A.N. Kocharian, G.B. Reich, A.S. Saakian. Physica **B 206–207**, 332 (1995).
[9] M. Caspers. Z. Phys. **B 74**, 718 (1990).
[10] И.М. Лифшиц. ЖЭТФ **18**, 293 (1948).
[11] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Квантовая механика. Наука, М. (1974).
[12] Г. Липкин. Квантовая механика. Наука, М. (1977).
[13] И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов. Наука, М. (1971).